Centrale M2 2019 - Corrigé

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

I.A - Dérivées successives

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos x)^2 + \sin(x)(\sin(x)+1)}{(\cos x)^2} = \frac{1+\sin x}{(\cos x)^2},\\
f''(x) &= \frac{(\cos x)^3 + 2\sin x\cos x(1+\sin x)}{(\cos x)^4} = \frac{(\cos x)^2 + 2\sin x + 2(\sin x)^2}{(\cos x)^3}\\
&= \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3}\\
\text{et}\quad f^{(3)}(x) &= \frac{(2\cos x\sin x + 2\cos x)(\cos x)^3 + 3\sin x(\cos x)^2((\sin x)^2 + 2\sin x + 1)}{(\cos x)^6}\\
&= \frac{2(\cos x)^2\sin x + 2(\cos x)^2 + 3(\sin x)^3 + 6(\sin x)^2 + 3\sin x}{(\cos x)^4}\\
&= \frac{(\sin x)^3 + 4(\sin x)^2 + 5\sin x + 2}{(\cos x)^4}.
\end{aligned}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$ (HR_n).
Initialisation : D'après la question précédente, $P_0 = X+1$, $P_1 = X+1$, $P_2 = X^2+2X+1$ et $P_3 = X^3+4X^2+5X+2$ conviennent.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. et supposons HR_n vérifiée.
Alors, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left(\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}\right)'\\
&= \frac{\cos x P_n'(\sin x)(\cos x)^{n+1} + (n+1)\sin x(\cos x)^n P_n(\sin x)}{(\cos x)^{2n+2}} = \frac{(\cos x)^2 P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}\\
&= \frac{(1-(\sin x)^2)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}
\end{aligned}$$

en posant $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X) \in \mathbb{R}[X]$. (car $P \in \mathbb{R}[X]$ d'après HR_n).
Conclusion : D'où l'existence d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
De plus, cette suite vérifie $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. • *Montrons d'abord l'unicité de la suite (P_n). L'article défini "le" de l'énoncé semble indiquer qu'elle est demandée...*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} = \dfrac{Q_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
Alors, pour tout $x \in I$, $(P_n - Q_n)(\sin x) = 0$, donc, comme $\sin(I) =]-1,1[$, pour tout $t \in]-1,1[$, $(P_n - Q_n)(t) = 0$, donc $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, donc $P_n - Q_n = 0$, donc $P_n = Q_n$.
Il y a donc bien unicité de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
• La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• Montrons alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels (HR_n).
Initialisation : $P_1 = X+1$ et $P_2 = X^2+2X+1$ sont bien unitaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\deg(P_1) = 1$ et $\deg(P_2) = 2$.
Hérédité : Soit $n \geq 2$ et supposons HR_n vérifiée. Alors il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ tel que $P_n = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et,

par suite,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1-X^2)P_n'(X)+(n+1)XP_n(X)\\
&= (1-X^2)\left(nX^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1}\right)+(n+1)X\left(X^n+\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right)\\
&= nX^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1}-nX^{n+1}-\sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k+1}+(n+1)X^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}(n+1)a_k X^{k+1}\\
&= X^{n+1}+nX^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}X^k+(n+1)a_0X+\sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{(n+1-k)a_k}_{\in\mathbb{N}}X^{k+1}\in\mathbb{N}[X]
\end{aligned}$$

comme somme de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ (et $\mathbb{N}$ est stable par addition). De plus, cette écriture donne immédiatement P_{n+1} unitaire de degré $n+1$.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

4. Pour tout $x\in I$,

$$f(x)^2+1=\frac{(\sin x+1)^2}{(\cos x)^2}+1=\frac{(\sin x)^2+2\sin x+1+(\cos x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{2+2\sin x}{(\cos x)^2}=2f'(x).$$

5. • En appliquant la relation obtenue dans la question précédente en $x=0$, on obtient

$$2f'(0)=(f(0))^2+1,\quad \text{ie}\quad 2\alpha_1=\alpha_0^2+1.$$

• Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en dérivant n fois la relation obtenue à la question précédente, on obtient, via la formule de Leibniz :

$$\forall x\in I,\quad 2f^{(n+1)}(x)=2(f')^{(n)}(x)=\left((f(x))^2+1\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f(x))^{(k)}(f(x))^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)f(x)^{(n-k)}(x).$$

En appliquant alors en 0, on a bien la relation demandée.

I.B - Développement en série entière

6. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, donc, pour tout $N\in\mathbb{N}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral et on a, pour tout $x\in[0,\pi/2[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\int_0^x\frac{(x-t)^N}{N!}f^{(N+1)}(t)dt\\
&= \sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n+\int_0^x\frac{(x-t)^N}{N!}\frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}}dt.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $x\in[0,\pi/2[$, pour tout $t\in[0,x]$, $\dfrac{(x-t)^N}{N!}\geq 0$, $(\cos t)^{N+2}\geq 0$ (car $t\in[0,\pi/2[$) et, comme P_{N+1} est à coefficients positifs et $\sin t\geq 0$, $P_{N+1}(\sin t)\geq 0$.
On a donc $\dfrac{(x-t)^N}{N!}\dfrac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}}\geq 0$ pour tout $t\in[0,x]$, donc, par positivité de l'intégrale ($x\geq 0$),

$$f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n=\int_0^x\frac{(x-t)^N}{N!}\frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}}dt\geq 0,$$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n\leq f(x)$.

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme $\alpha_n=f^{(n)}(0)=\dfrac{P_n(\sin 0)}{(\cos 0)^{n+1}}=P_n(0)$, α_n est le coefficient constant de P_n, donc un élément de $\mathbb{N}$ (même pour $n=0$ car $P_0=X+1$), donc positif.
Pour tout $x\in[0,\pi/2[$ la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha_n}{n!}x^n$ est donc à termes positifs, donc la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante, et majorée par $f(x)$ d'après la question précédente, donc convergente, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha_n}{n!}x^n$ converge.
Ceci étant valable pour tout $x\in[0,\pi/2[$, on a bien $R\geq\pi/2$.

8. Pour tout $x \in I$, $|x| < R$, donc, par produit de Cauchy de séries entières à l'intérieur du disque de convergence,

$$\begin{aligned}
(g(x))^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \right)^2 + 1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n + 1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha_k \alpha_{n-k} \right) x^n + 1 \\
&= \alpha_0^2 + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k} \right) x^n \\
&= 2\alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha_{n+1}}{n!} x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)!} x^n \\
&= 2g'(x).
\end{aligned}$$

9. Soit $\varphi = \arctan(f)$ et $\psi = \arctan(g)$.
Pour tout $x \in I$,

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{(f(x))^2 + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \psi'(x) = \frac{g'(x)}{(g(x))^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

d'après les relations établies aux questions 4 et 8.
De plus, $\varphi(0) = \arctan(f(0)) = \arctan(1) = \pi/4$ et $\psi(0) = \arctan(g(0)) = \arctan(\alpha_0) = \arctan(f(0)) = \pi/4$, donc φ et ψ sont solutions sur l'intervalle I du même problème de Cauchy $\begin{cases} y' = 1/2 \\ y(0) = \pi/4 \end{cases}$, donc $\varphi = \psi$.
Par suite, $f = \tan(\varphi) = \tan(\psi) = g$ sur I.
On aurait aussi pu intégrer la relation $\varphi'(x) = 1/2$, pour trouver $\varphi(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ sur I, ce qui donne $f(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ pour tout $x \in I$.

10. Si on avait $R > \pi/2$, alors g, continue sur $]-R, R[$, serait continue en $\pi/2$.
Or $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2^-} g(x) = \lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\overbrace{\sin x + 1}^{\to 2}}{\underbrace{\cos x}_{\to 0^+}} = +\infty$, donc g n'est pas continue en $\pi/2$, donc $R \leq \pi/2$, et, par suite, avec la minoration trouvée en 7, on a bien $R = \pi/2$.

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Raisonnons par analyse-synthèse : soit $h : I \to \mathbb{R}$.
Analyse : S'il existe p paire et i impaire telle que $h = p + i$ sur I, alors pour tout $x \in I$,

$$h(x) = p(x) + i(x) \quad \text{et} \quad h(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x),$$

donc $p(x) = \dfrac{h(x) + h(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{h(x) - h(-x)}{2}$.
Synthèse : Réciproquement, soit $p : x \in I \mapsto \dfrac{h(x) + h(-x)}{2}$ et $i : x \in I \mapsto \dfrac{h(x) - h(-x)}{2}$. Alors :
– pour tout $x \in I$, $-x \in I$ et $p(-x) = \dfrac{h(-x) + h(-(-x))}{2} = \dfrac{h(x) + h(-x)}{2} = p(x)$, donc p est paire
– pour tout $x \in I$, $-x \in I$ et $i(-x) = \dfrac{h(-x) - h(-(-x))}{2} = -\dfrac{h(x) - h(-x)}{2} = -i(x)$, donc i est impaire
– pour tout $x \in I$, $p(x) + i(x) = \dfrac{h(x) + h(-x)}{2} + \dfrac{h(x) - h(-x)}{2} = h(x)$, donc $h = p + i$.
Conclusion : D'où, par analyse-synthèse, l'existence et l'unicité demandées.

12. Pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

où $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ est paire et $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est impaire.
Par ailleurs, pour tout $x \in I$, comme les séries qui aparaissent ci-dessous convergent,

$$f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

où $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ est paire et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ est impaire.
D'où, d'après l'unicité de la décomposition prouvée à la question précédente, on a

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

13. tan est développable en série entière sur I, donc coïncide avec sa série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ sur I, donc, par unicité du développement en série entière de tan sur I, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tan^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tan^{(2n+1)}(0) = \alpha_{2n+1}.$$

14. Pour tout $x \in I$, $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$, donc $t' = 1 + t^2$.

15. Pour tout $x \in I$, $t'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} x^{2n}$.
Par produit de Cauchy de série entières sur le disque ouvert de convergence, on a aussi, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} t'(x) = (t(x))^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)^2 + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} \frac{\tan^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \right) x^n + 1. \end{aligned}$$

D'où, par unicité du développement en série entière de t' sur I, on a, $\alpha_1 = 0 + 1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} \frac{\tan^{(2n-k)}(0)}{(2n-k)!} \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \tan^{(k)}(0) \tan^{(2n-k)}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} \underbrace{\tan^{(k)}(0)}_{=0} \tan^{(2n-k)}(0) + \frac{1}{(2n)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k} \tan^{(k)}(0) \tan^{(2n-k)}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \tan^{(2k-1)}(0) \tan^{(2n-(2k-1))}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1} \quad \text{(d'après 13 avec } 2k-1 \text{ et } 2n-2k+1 \text{ impairs)}, \end{aligned}$$

donc, en multipliant de part et d'autre par $(2n)!$, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}.$$

II. Equivalent de α_{2n+1}

II.A - La fonction zêta

16. Posons, pour tout $n \geq 1$, $f_n : t \in]1, +\infty[\mapsto \frac{1}{n^t} = \exp(-t \ln(n))$.
• Pour tout $n \geq 1$, f_n est définie et continue sur $]1, +\infty[$.
• Pour tout $[a, b] \subset]1, +\infty[$ avec $a < b$, pour tout $t \in [a, b]$,

$$|f_n(t)| = \exp(-t \ln(n)) \leq \exp(-a \ln(n)) = \frac{1}{n^a},$$

donc $\|f_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \frac{1}{n^a}$.
Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge (Riemann et $a > 1$), donc, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$.
• $\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est donc définie et continue sur $[a, b]$.
Ceci étant valable pour tout $[a, b] \subset]1, +\infty[$, ζ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

17. Soit $s > 1$.

• Posons $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{t^s} = \exp(-s\ln(t))$.
g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $]1, +\infty[$.

• Par suite, pour tout $n \geq 2$, pour tout $t \in [n, n+1]$, $g(t) \leq g(n)$.
D'où, par positivité de l'intégrale ($n \leq n+1$), on a :

$$\int_n^{n+1} g(t)dt \leq \int_n^{n+1} g(n)dt = g(n).$$

En sommant ces inégalités pour tout $n \geq 2$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient (l'intégrale de Riemann est convergente car $s > 1$) :

$$\int_2^{+\infty} g(t)dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_n^{n+1} g(t)dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} g(n).$$

• De même, pour tout $n \geq 2$, pour tout $t \in [n-1, n]$, $g(t) \geq g(n)$.
D'où, par positivité de l'intégrale ($n-1 \leq n$), on a :

$$\int_{n-1}^{n} g(t)dt \geq \int_{n-1}^{n} g(n)dt = g(n).$$

En sommant ces inégalités pour tout $n \geq 2$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient (l'intégrale de Riemann est convergente car $s > 1$) :

$$\int_1^{+\infty} g(t)dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} g(t)dt \geq \sum_{n=2}^{+\infty} g(n).$$

• On a donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^s}dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}dt$.
Or pour tout $a > 0$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^s}dt = \left[\frac{1}{(1-s)t^{s-1}}\right]_a^{+\infty} = \frac{1}{(s-1)a^{s-1}},$$

donc on a :

$$1 + \frac{1}{(s-1)2^{s-1}} = 1 + \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^s}dt \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}dt = 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} 1 + \frac{1}{(s-1)2^{s-1}} = 1 = \lim_{s\to+\infty} 1 + \frac{1}{(s-1)}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.
On aurait pu se contenter de minorer $\zeta(s)$ par 1, mais l'énoncé demandait deux intégrales...

18. Pour tout $s \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\zeta(s) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{j^s} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{j^s} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^s} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^s k^s} = \frac{1}{2^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{2^s}\zeta(s),
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \zeta(s) - \frac{1}{2^s}\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s),$$

donc $C(s) = 1 - \dfrac{1}{2^s}$ convient.

II.B - Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n dt$.

19. Soit $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$.
• Posons $u'(t) = 4x^2 \cos(2xt)$, $u(t) = 2x \sin(2xt)$, $v(t) = (\cos t)^n$, $v'(t) = -n \sin t (\cos t)^{n-1}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}4x^2 I_n(x) &= \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)dt = [2x\sin(2xt)(\cos t)^n]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} 2x\sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}dt \\ &= n\int_0^{\pi/2} 2x\sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}dt.\end{aligned}$$

Posons à présent $u'(t) = 2x\sin(2xt)$, $u(t) = -\cos(2xt)$, $v(t) = \sin t(\cos t)^{n-1}$, $v'(t) = (\cos t)^n - (n-1)(\sin t)^2(\cos t)^{n-2}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}4x^2 I_n(x) &= n\int_0^{\pi/2} 2x\sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}dt \\ &= n\left[-\cos(2xt)\sin(t)(\cos t)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)((\cos t)^n - (n-1)(\sin t)^2(\cos t)^{n-2})dt \\ &= \underbrace{0}_{\text{car } n\geq 2} + n\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(\cos t)^n dt - n(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(1-(\cos t)^2)(\cos t)^{n-2}dt \\ &= nI_n(x) - n(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(\cos t)^{n-2}dt + n(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(\cos t)^n dt \\ &= nI_n(x) - n(n-1)I_{n-2}(x) + n(n-1)I_n(x) = n^2 I_n(x) - n(n-1)I_{n-2}(x),\end{aligned}$$

donc $(n^2 - 4x^2)I_n(x) = n(n-1)I_{n-2}(x)$, ie, en divisant par $n^2 \neq 0$,

$$\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x).$$

• En particulier, pour $x = 0$, on a $I_n(0) = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}(0)$.
De plus, comme $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue et positive sur $[0, \pi/2]$ et n'est pas la fonction nulle, on a $I_n(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt > 0$, donc on peut diviser par $I_n(0)$ et

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)\frac{I_n(x)}{I_n(0)} &= \frac{\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x)}{I_n(0)} \\ &= \frac{\frac{n-1}{n} I_{n-2}(x)}{\frac{n-1}{n} I_{n-2}(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.\end{aligned}$$

20. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(\pi x) = \pi x \dfrac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$ (HR_n).
Initialisation : Pour $n = 1$:
On a $\sin(\pi x) = \sin(2x(\pi/2)) - \sin(2x \times 0) = [\sin(2xt)]_0^{\pi/2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2x\cos(2xt) = 2xI_0(x)$.
De plus, $I_0(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1dt = \pi/2$, donc

$$\begin{aligned}\pi x \frac{I_2(x)}{I_2(0)} \prod_{k=1}^{1}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) &= \pi x \frac{I_2(x)}{I_2(0)}\left(1 - \frac{4x^2}{2^2}\right) \\ &= \pi x \frac{I_0(x)}{I_0(0)} \quad \text{(d'après la question précédente avec "} n = 2 \text{")} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{2xI_0(x)}{\pi/2} = \sin(\pi x).\end{aligned}$$

On a donc bien HR_1.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_n vérifiée.

Alors

$$\begin{aligned}
\pi x\frac{I_{2n+2}(x)}{I_{2n+2}(0)}\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) &= \pi x\frac{I_{2n+2}(x)}{I_{2n+2}(0)}\left(1-\frac{x^2}{(n+1)^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\\
&= \pi x\frac{I_{2n+2}(x)}{I_{2n+2}(0)}\left(1-\frac{4x^2}{(2n+2)^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\\
&= \pi x\frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) \quad \text{(d'après la question précédente en remplaçant } n \text{ par } 2n+2\geq 2\text{")}\\
&= \pi x\frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \sin(\pi x) \quad (\text{d'après } HR_n).
\end{aligned}$$

On a donc bien HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sin(\pi x) = \pi x\frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

21. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in]0,1[$, $\pi x\in]0,\pi[$, donc $\sin(\pi x)\neq 0$ et, d'après la question précédente avec "$n=2n$" au numérateur et "$n=n$" au dénominateur, on a

$$\begin{aligned}
\cos(\pi x) &= \frac{1}{2}\frac{\sin(2\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi(2x))}{\sin(\pi x)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi(2x)\frac{I_{4n}(x)}{I_{4n}(0)}\prod_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{(2x)^2}{k^2}\right)}{\pi x\frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}\\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\frac{\prod_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{(2x)^2}{k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}\\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(2x)^2}{(2k)^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(2x)^2}{(2k-1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}\\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(2x)^2}{(2k-1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}\\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(2x)^2}{(2k-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

Il semble donc bien qu'il y ait une erreur d'énoncé ici et que le facteur $1/2$ soit en trop...
La formule est encore valable pour $x=0$ (on le vérifie aisément en prenant $x=0$).

II.C - Un autre développement de tangente

22. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $s>1$.
$t\mapsto\dfrac{1}{(2t-1)^s}$ est continue et décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, comme en question 17, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^s}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{(2t-1)^s}dt=\int_n^{+\infty}\frac{1}{(2t-1)^s}dt=\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(1-s)(2t-1)^{s-1}}\right]_n^{+\infty}=\frac{1}{2(s-1)}\frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.$$

23. Soit $x\in[0,1/2[$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $p\geq 1$,

$$\begin{aligned}
0\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} &= 2^{2p+1}x^{2p-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2p}}\\
&\leq 4(2x)^{2p-1}\frac{1}{2(2p-1)}\frac{1}{(2n-1)^{2p-1}} \quad \text{(d'après la question précédente avec } s=2p>1)\\
&\leq 2(2x)^{2p-1} \quad (\text{car } 2p-1\geq 1 \text{ et } 2n-1\geq 1).
\end{aligned}$$

Or $\sum_{p\geq 1}2(2x)^{2p-1}$ converge (série géométrique de raison $(2x)^2\in]-1,1[$, car $x\in[0,1/2[$), donc, par comparaison des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}\right)$ converge, donc $S(x)$ existe.
S_n est donc bien définie sur J.

24. Soit $x \in J$ et majorons un peu plus finement que dans la question précédente : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \geq 1$,

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \leq 4(2x)^{2p-1}\frac{1}{2(2p-1)}\frac{1}{(2n-1)^{2p-1}}$$

$$\leq 2(2x)^{2p-1}\frac{1}{2n-1} \quad \text{(toujours car } 2p-1 \geq 1 \text{ et } 2n-1 \geq 1\text{)},$$

donc $0 \leq S_n(x) \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} 2(2x)^{2p-1}\frac{1}{2n-1} = \frac{2}{2n-1}\frac{1}{1-(4x^2)}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n-1}\frac{1}{1-(4x^2)} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 0$.

La suite de fonctions (S_n) converge donc bien simplement sur J vers la fonction nulle.

25. Comme $\cos(t) > 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2[$, $\varphi : x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$ est définie sur J, et dérivable sur J comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in J$, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{-\pi\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} = -\pi\tan(\pi x).$$

Or, d'après la question 21, pour tout $x \in J \subset [0, 1[$, (formule encore valable pour $x = 0$)

$$\varphi(x) = \ln(\cos(\pi x)) = \ln(I_{4n}(2x)) - \ln(I_{2n}(x)) + \sum_{p=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right) + \ln\left(\frac{I_{2n}(0)}{I_{4n}(0)}\right),$$

où toutes les quantités écrites dans les logarithmes sont bien strictement positives car

- pour $x \in [0, 1/2[$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $2xt \in [0, \pi/2]$, donc $\cos(2xt)(\cos t)^{2n} \geq 0$, donc, par positivité de l'intégrale, $I_{2n}(x) \geq 0$, et, comme $t \mapsto \cos(2xt)(\cos t)^{2n}$ est continue et positive sur $[0, \pi/2]$ et n'est pas la fonction nulle, on a même $I_{2n}(x) > 0$.
  On en déduit aussi $I_{2n}(0) > 0$ (pour $x = 0$) et $I_{4n}(0) > 0$ (en remplaçant n par $2n$).
- pour tout $p \geq 1$, $(2p-1)^2 \geq 1$ et $4x^2 \in [0, 1[$, donc $1 - \dfrac{4x^2}{(2p-1)^2} > 0$.
- Enfin, pour $x \in J$, $\cos(\pi x) > 0$, et, mise à part $I_{4n}(2x)$, toutes les autres quantités apparaissant dans le produit de la formue de la question 21 sont strictement positives, donc $I_{4n}(2x) > 0$.

En dérivant cette nouvelle expression de $\varphi(x)$, on obtient : pour tout $x \in J$,

$$\varphi'(x) = \frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} - \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{n}\frac{\frac{-8x}{(2p-1)^2}}{1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}}.$$

Il ne reste plus alors qu'à identifier les deux écriture obtenues pour $\varphi'(x)$.
Rq : La dérivabilité de I_n, utilisée ici, sera prouvée au début de la question 28.

26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in J$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{4x^2}{(2k-1)^2} \in]-1, 1[$, donc, en utilisant le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$, valable pour tout $t \in]-1, 1[$, et donc pour $t = \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}$, on a :

$$\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}} = \frac{8x}{(2k-1)^2}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)^j = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^{2j+3}x^{2j+1}}{(2k-1)^{2j+2}}$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}.$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}\right)$$

(combinaison linéaire de séries convergentes). Enfin, on a

$$\begin{aligned}
S_n(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}} &= \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}\right)+\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}\right)\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}\right)\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\left(2^{2p+1}x^{2p-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2p}}\right)\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}2^{2p+1}x^{2p-1}\left(1-\frac{1}{2^{2p}}\right)\zeta(2p) \quad \text{(d'après la question 18)}\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1},
\end{aligned}$$

donc on a bien

$$\begin{aligned}
\pi\tan(\pi x)+S_n(x) &= -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)}+\frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}+S_n(x)\\
&= -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)}+\frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)}+\sum_{p=1}^{+\infty}2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.
\end{aligned}$$

27. Soit $\varphi : t \in [0,\pi/2] \mapsto t\cos t - \sin t$.
φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi/2]$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $t\in[0,\pi/2]$,

$$\varphi'(t)=\cos t - t\sin(t)-\cos t = -t\sin t \leq 0.$$

φ est donc décroissante sur $[0,\pi/2]$ et, comme $\varphi(0)=0$, on a $\varphi(t)\leq 0$ pour tout $t\in[0,\pi/2]$, donc $t\cos t\leq \sin t$, pour tout $t\in[0,\pi/2]$.

28. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
• Soit $g : (x,t)\in[0,1]\times[0,\pi/2]\mapsto \cos(2xt)(\cos t)^n$.
– pour tout $x\in[0,1]$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$, donc intégrable sur $[0,\pi/2]$.
– pour tout $t\in[0,\pi/2]$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $x\in[0,1]$, $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-2t\sin(2xt)(\cos t)^n$ est continue (par morceaux) sur $[0,\pi/2]$.
– pour tout $x\in[0,1]$, pour tout $t\in[0,\pi/2]$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq 2t|\sin(2xt)|\,|\cos t|^n\leq \pi=\varphi(t)$$

où φ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$, donc intégrable sur $[0,\pi/2]$.
D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $x\mapsto I_n(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}g(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $x\in[0,1]$,

$$I'_n(x)=\int_0^{\pi/2}-2t\sin(2xt)(\cos t)^n dt.$$

• Pour tout $x\in[0,1]$, pour tout $t\in[0,\pi/2]$, $0\leq t\cos t\leq \sin t$ d'après la question précédente, $(\cos t)^{n-1}\geq 0$ et $\sin(2xt)\geq 0$ (car $2xt\in[0,\pi]$), donc

$$0\leq 2t\sin(2xt)(\cos t)^n\leq 2\sin(t)\sin(2xt)(\cos t)^{n-1}.$$

D'où, par positivité de l'intégrale ($0\leq\pi/2$), on a

$$0\leq\int_0^{\pi/2}2t\sin(2xt)(\cos t)^n dt=-I'_n(x)\leq\int_0^{\pi/2}2\sin(t)\sin(2xt)(\cos t)^{n-1}dt.$$

• Posons alors $u'(t)=\sin(t)(\cos t)^{n-1}$, $u(t)=-\dfrac{(\cos t)^n}{n}$, $v(t)=2\sin(2xt)$, $v'(t)=4x\cos(2xt)$.
Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}2\sin(t)\sin(2xt)(\cos t)^{n-1}dt &= \left[-\frac{2\sin(2xt)(\cos t)^n}{n}\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{4x}{n}\cos(2xt)(\cos t)^n dt\\
&= 0+\frac{4x}{n}I_n(x),
\end{aligned}$$

- En mettant tout bout à bout, on a bien
$$0 \leq -I_n'(x) \leq \frac{4x}{n} I_n(x).$$
- Comme $I_n(x) > 0$ (déjà prouvé), on a alors, en divisant par $I_n(x)$,
$$0 \leq -\frac{I_n'(x)}{I_n(x)} \leq \frac{4x}{n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4x}{n} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n'(x)}{I_n(x)} = 0$.

29. L'égalité obtenue en question 26 est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in J$
$$\begin{aligned}\pi \tan(\pi x) &= \lim_{n\to+\infty} \pi \tan(\pi x)\\ &= \lim_{n\to+\infty} -\frac{2I_{4n}'(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I_{2n}'(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1} - S_n(x)\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1} \quad \text{(d'après la question précédente et la question 24).}\end{aligned}$$

II.D - Un équivalent de α_{2n+1}

30. D'après la question 12, pour tout $x \in J \setminus \{0\}$, comme $\pi x \in]0, \pi/2[\subset I$, on a
$$\pi \tan(\pi x) = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}(\pi x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}\pi^{2n+2}x^{2n+1}.$$
Par ailleurs, d'après la question 29, on a, pour tout $x \in J$, en posant $n = p-1$,
$$\pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2)x^{2n+1}.$$
Ces deux égalités restent valable sur $]-\pi/2, 0]$ par imparité de toutes les fonctions apparaissant ici.
Enfin, par unicité du développement en série entière de $x \mapsto \pi\tan(\pi x)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}\pi^{2n+2} = 2(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2) \Leftrightarrow \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}\zeta(2n+2).$$

31. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \zeta(2n+2) = 1$ (d'après 17), on a $\zeta(2n+2) \sim 1$ et, par suite,
$$\alpha_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2(2^{2n+2})(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} = \frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}.$$
On peut éventuellement aller plus loin en utilisant Stirling, mais quel intérêt ici ?!

III. Permutations alternantes

Dans toute cette partie, on identifiera une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ avec le n-uplet $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.
De plus, on notera $S([\![1,n]\!])$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, $M([\![1,n]\!])$ l'ensemble des permuations montantes de $[\![1,n]\!]$, $D([\![1,n]\!])$ l'ensemble des permutations descendantes de $[\![1,n]\!]$ et $A([\![1,n]\!])$ l'ensemble des permuations alternantes (montantes ou descendantes) de $[\![1,n]\!]$.

III.A - Dénombrement des permutations alternantes

32. - Dans le cas $n = 2$, il y a deux permutations : $(1,2)$ et $(2,1)$.
$(1,2)$ est alternante montante et $(2,1)$ est alternante descendante.
- Pour $n = 3$, seules $(1,3,2)$ et $(2,3,1)$ sont alternantes montantes (parmi les 6 permutations).
- Pour $n = 4$, seules $(1,3,2,4)$, $(1,4,2,3)$, $(2,3,1,4)$, $(2,4,1,3)$ et $(3,4,1,2)$ sont alternantes montantes (parmi les 24 permutations).

33. Soit $\psi : (\sigma(1), \dots, \sigma(n)) \mapsto (n+1-\sigma(1), \dots, n+1-\sigma(n))$.
ψ est clairement une bijection de $S([\![1,n]\!])$ sur lui-même car $\psi^2 = Id$.
De plus, si $\sigma \in M([\![1,n]\!])$, alors $\psi(\sigma) \in D([\![1,n]\!])$ car, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$,
$$\begin{aligned}(-1)^i(\psi(\sigma)(i) - \psi(\sigma(i+1))) &= (-1)^i(n+1-\sigma(i) - (n+1-\sigma(i+1))) = (-1)^i(\sigma(i+1)-\sigma(i))\\ &= -\underbrace{(-1)^i(\sigma(i)-\sigma(i+1))}_{>0 \text{ car } \sigma \in M([\![1,n]\!])} < 0.\end{aligned}$$

Par suite, $\psi(M(\llbracket 1,n\rrbracket)) \subset D(\llbracket 1,n\rrbracket)$, donc $\mathrm{Card}(M(\llbracket 1,n\rrbracket)) \leq \mathrm{Card}(D(\llbracket 1,n\rrbracket))$.
De même, on montre que $\psi(D(\llbracket 1,n\rrbracket)) \subset M(\llbracket 1,n\rrbracket)$, donc $\mathrm{Card}(D(\llbracket 1,n\rrbracket)) \leq \mathrm{Card}(M(\llbracket 1,n\rrbracket))$.
On a donc bien l'égalité des cardinaux.

34. Soit $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ une partie constituée de k éléments de $\llbracket 1,n\rrbracket$.
Quitte à renommer les éléments de A, on peut supposer que $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.
Soit $(y_1, \ldots, y_k)$ une permutation de A. Alors il existe $\sigma \in S(\llbracket 1,k\rrbracket)$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1,k\rrbracket$, $y_i = x_{\sigma(i)}$.
Alors $(y_1, \ldots, y_n)$ est une permutation alternante montante de A si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 1,k-1\rrbracket, (-1)^i(y_i - y_{i+1}) > 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1,k-1\rrbracket, (-1)^i(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)}) > 0.$$

Or, comme $x_1 < \ldots < x_n$

$$x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)} > 0 \Leftrightarrow x_{\sigma(i)} > x_{\sigma(i+1)} \Leftrightarrow \sigma(i) > \sigma(i+1) \Leftrightarrow \sigma(i) - \sigma(i+1) > 0,$$

donc $(-1)^i(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)}) > 0 \Leftrightarrow (-1)^i(\sigma(i) - \sigma(i+1)) > 0$, donc $(y_1, \ldots, y_n)$ est une permutation alternante montante de A si et seulement si σ est une permutation alternante montante de $\llbracket 1,k\rrbracket$.
Par suite, le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à β_k.

35. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A(\llbracket 1,n+1\rrbracket) = \bigcup_{k=1}^{n+1} \{\sigma \in A(\llbracket 1,n+1\rrbracket) : \sigma(k) = n+1\},$$

où cette réunion est disjointe car $\sigma \in S(\llbracket 1,n+1\rrbracket)$ est injective.
Par suite, on a

$$\begin{aligned} 2\beta_{n+1} &= \mathrm{Card}(M(\llbracket 1,n+1\rrbracket)) + \mathrm{Card}(M(\llbracket 1,n+1\rrbracket)) \\ &= \mathrm{Card}(M(\llbracket 1,n+1\rrbracket) + \mathrm{Card}(D(\llbracket 1,n+1\rrbracket) \quad \text{(d'après la question 33)} \\ &= \mathrm{Card}(A(\llbracket 1,n+1\rrbracket) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{Card}\{\sigma \in A(\llbracket 1,n+1\rrbracket : \sigma(k) = n+1\}. \end{aligned}$$

Or,
- pour $k = 1$, on a $\sigma(1) = n+1$, alors $\sigma(2) < \sigma(1)$ car $\sigma(2) \in \llbracket 1,n+1\rrbracket \setminus \{n+1\}$, donc $\sigma \in A(\llbracket 1,n+1\rrbracket)$ si et seulement si $\sigma(2) < \sigma(3) > ...$, ie si et seulement si $(\sigma(2), \ldots, \sigma(n+1)) \in D(\llbracket 1,n\rrbracket)$.
  Par suite, $\mathrm{Card}\{\sigma \in A(\llbracket 1,n+1\rrbracket) : \sigma(k) = n+1\} = \mathrm{Card}(D(\llbracket 1,n\rrbracket)) = \beta_n = \beta_0\beta_n$.
- pour $k = n+1$, on a $\sigma(n+1) = n+1$, alors $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ car $\sigma(n) \in \llbracket 1,n+1\rrbracket \setminus \{n+1\}$, donc $\sigma \in A(\llbracket 1,n+1\rrbracket)$ si et seulement si $\sigma(n) < \sigma(n-1) > \sigma(n-2)...$, ie si et seulement si $(\sigma(n), \sigma(n-1), \ldots, \sigma(1)) \in D(\llbracket 1,n\rrbracket)$.
  Par suite, $\mathrm{Card}\{\sigma \in A(\llbracket 1,n+1\rrbracket) : \sigma(k) = n+1\} = \mathrm{Card}(D(\llbracket 1,n\rrbracket)) = \beta_n = \beta_0\beta_n$.
- pour tout $k \in \llbracket 2,n\rrbracket$, on a $\sigma(k) = n+1$, donc $\sigma(k-1) < \sigma(k) > \sigma(k+1)$.
  Par suite, $\sigma \in A(\llbracket 1,n+1\rrbracket)$ si et seulement si $\sigma(k+1) < \sigma(k+2) > \sigma(k+3)...$ et $\sigma(k-1) < \sigma(k-2) > \sigma(k-3)...$, ie si et seulement si $(\sigma(k+1), \ldots, \sigma(n+1)) \in D(\{\sigma(k+1), \ldots, \sigma(n+1)\})$ et $(\sigma(k-1), \sigma(k-2), \ldots, \sigma(1)) \in D(\{\sigma(1), \ldots, \sigma(k-1)\})$. Par suite,

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\{\sigma \in A(\llbracket 1,n+1\rrbracket) : \sigma(k) = n+1\} &= \mathrm{Card}(D(\{\sigma(k+1), \ldots, \sigma(n+1)\})) \times \mathrm{Card}(D(\{\sigma(1), \ldots, \sigma(k-1)\})) \\ &= \beta_{n+1-(k+1)+1}\beta_{k-1} \quad \text{(d'après la propriété admise après la question 34)} \\ &= \beta_{n-(k-1)}\beta_{k-1} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2\beta_{n+1} &= \beta_0\beta_n + \beta_n\beta_0 + \sum_{k=2}^{n} \beta_{n-(k-1)}\beta_{k-1} \\ &= \beta_0\beta_n + \beta_n\beta_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_{n-j}\beta_j \quad \text{(en posant } j = k-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \beta_k\beta_{n-k}. \end{aligned}$$

36. On a $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$ et (α_n) et (β_n) vérifient la même relation de récurrence d'après les question 5 et 35, donc $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On peut éventuellement faire une récurrence forte pour les moins convaincus...

III.B - Permuations aléatoires

37. Comme $S(\llbracket 1,n\rrbracket)$ est muni de la probabilité uniforme,

$$p_n = \frac{\mathrm{Card}(A(\llbracket 1,n\rrbracket))}{\mathrm{Card}(S(\llbracket 1,n\rrbracket))} = \frac{\beta_n}{n!} = \frac{\alpha_n}{n!}.$$

Par suite, $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite nulle, car $\alpha_{2n}=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p_{2n+1} &= \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}}{(2n+1)!} \quad \text{(d'après la question 31)} \\ &= 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad (\text{car } 2/\pi \in]-1,1[). \end{aligned}$$

Comme les suites extraites (p_{2n}) et (p_{2n+1}) convergent vers 0, la suite (p_n) converge elle-aussi vers 0.

38. • Soit $i\in[\![1,n]\!]$.
Pour tout $\sigma\in S([\![1,n]\!])$, $(M_n(\sigma)>i)$ si et seulement si $(\sigma(1),\dots,\sigma(i))$ est une permutation alternante montante de $\{\sigma(1),\dots,\sigma(i)\}$, $(\sigma(i+1),\dots,\sigma(n))$ étant une permutation quelconque de $\{\sigma(i+1),\dots,\sigma(n)\}$.
Par suite, pour construire une permutation de $[\![1,n]\!]$ vérifiant $M_n(\sigma)>i$,
– on choisit d'abord une partie A à i éléments de $[\![1,n]\!]$: $\binom{n}{i}$ choix
– puis on choisit une permutation alternante montante γ de ces i éléments : β_i choix d'après la question 34
– on pose ensuite $(\sigma(1),\dots,\sigma(i))=\gamma$
– on choisit une permutation quelconque δ de $[\![1,n]\!]\setminus A$: $(n-i)!$ choix
– on pose enfin $(\sigma(i+1),\dots,\sigma(n))=\delta$
Par suite, comme toutes les permutations sont équiprobables, on a

$$P(M_n>i)=\frac{\binom{n}{i}\times\beta_i\times 1\times(n-i)!\times 1}{n!}=\frac{\beta_i}{i!}=p_i.$$

• Cette formule est encore valable pour $i=0$, car $P(M_n>1)=1$ (car $M_n(\Omega)=[\![2,n+1]\!]$) et $p_0=1$.

39. Comme M_n est finie, elle admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \sum_{k=2}^{n+1} kP(M_n=k)=\sum_{k=2}^{n+1} k(P(M_n>k-1)-P(M_n>k)) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} kP(M_n>k-1)-\sum_{k=2}^{n+1} kP(M_n>k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)P(M_n>k)-\sum_{k=2}^{n+1} kP(M_n>k) \\ &= 2P(M_n>1)+\sum_{k=2}^{n}(k+1-k)P(M_n>k)-(n+1)P(M_n>n+1) \\ &= 2+\sum_{k=2}^{n} P(M_n>k)-0 \quad (\text{car } M_n(\Omega)=[\![2,n+1]\!], \text{ donc } M_n>1 \text{ est certain et } M_n>n+1 \text{ est impossible}) \\ &= p_0+p_1+\sum_{k=2}^{n} p_k=\sum_{k=0}^{n} p_k. \end{aligned}$$

Rq : On aurait peut-être pu admettre cette propriété comme étant une propriété du cours... ou fallait-il la redémontrer ?
On a $p_0=1=\frac{\alpha_0}{0!}$, $p_1=1=\frac{\alpha_1}{1!}$ et, pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, $p_k=\frac{\beta_k}{k!}=\frac{\alpha_k}{k!}$, donc

$$E(M_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k!}\underset{n\to+\infty}{\to}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{k!}=g(1)=f(1)=\frac{1+\sin 1}{\cos 1}.$$