Correction du DS6

(Inspiré de Centrale PSI 2023 maths 2)

Partie I : 1. a) $\alpha_n \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\boxed{R=1}$ ou avec d'Alembert car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = 1$.

b) $\alpha_{n+1}-\alpha_n = \dfrac{(n+3)^2-(n+2)(n+5)}{(n+3)(n+4)(n+5)} = \dfrac{-n-1}{(n+3)(n+4)(n+5)} \leqslant 0$ donc $\boxed{(\alpha_n) \text{ décroît}}$

Ainsi, $\sum(-1)^n\alpha_n$ CV par CSSA donc $1 \in D_S$ alors que $\alpha_n \sim \dfrac{1}{n}$ (SATP) donc $-1 \notin D_S$ et $\boxed{D_S =]-1,1]}$

2. a) On pose $u_n(x) = (-1)^n\alpha_n x^n$ pour $x \in [0,1]$ et on vérifie :

H1 : les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$.

H2 : pour $x \in [0,1]$, la série $\sum u_n(x)$ vérifie le CSSA (car (α_n) et (x^n) sont décroissantes et positives donc $(u_n(x))$ décroît et $|u_n(x)| \leqslant \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). On a donc $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \alpha_{n+1}$ (indépendant de x) puis $\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \alpha_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sum u_n$ CVU sur $[0,1]$.

On en déduit $\boxed{S \text{ est continue sur } [0,1]}$

b) $R=1$ donc $S \in \mathcal{C}^\infty([0,1[)$ et $xS'(x)+5S(x)-\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n[n\alpha_n+5\alpha_n-1]x^n$. Il suffit donc de poser

$\beta_n = n\alpha_n+5\alpha_n-1 = \dfrac{n(n+2)+5(n+2)-(n+3)(n+4)}{(n+3)(n+4)}$ donc $\boxed{\beta_n = \dfrac{-2}{(n+3)(n+4)}}$

c) Si on pose $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\beta_n x^n$ et $v_n(x) = (-1)^n\beta_n x^n$ alors on vérifie :

H1 : les fonctions v_n sont continues sur $[0,1]$.

H2 : $|v_n(x)| \leqslant |\beta_n|$ (indépendant de x) donc $\|v_n\|_\infty \leqslant \dfrac{2}{(n+3)(n+4)} \sim \dfrac{2}{n^2}$ donc $\sum v_n$ CVN sur $[0,1]$.

Ainsi, $T \in \mathcal{C}^0([0,1])$ donc $\displaystyle\lim_{x\to1} T(x) = T(1)$ est finie. Puis $xS'(x) = T(x)-5S(x)+\dfrac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to1]{} T(1)-5S(1)+\dfrac{1}{2}$ donc $\displaystyle\lim_1 S'$ est finie. Comme $S \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $\boxed{S \in \mathcal{C}^1([0,1])}$ (conséquence du TAF, th de prolongement $\mathcal{C}^1$).

3. a) $\boxed{\alpha_n = \dfrac{-1}{n+3} + \dfrac{2}{n+4}}$

b) Les rayons de convergence des deux séries $\sum(-1)^n\dfrac{x^n}{n+3}$ et $\sum(-1)^n\dfrac{x^n}{n+4}$ valent 1 donc, pour $|x|<1$, $x^3S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+3}}{n+3} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+3}}{n+4} = \sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k} + 2 + 2\sum_{h=4}^{+\infty}(-1)^h\frac{x^{h-1}}{h}$. Pour $x \in]0,1[$, on a donc

$x^3S(x) = \left(-\ln(1+x)+x-\dfrac{x^2}{2}\right) + \dfrac{2}{x}\left(-\ln(1+x)+x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right) = \boxed{2+\dfrac{x^2}{6}-\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\ln(1+x)}$

4. a) $\sum\dfrac{1}{k^2}$ converge donc R_n existe et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0}$ car c'est le reste d'une série convergente.

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \text{ si } n \geqslant 1}$

c) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, si $n \geqslant 1$ et avec la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant R_n$.

Comme $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n}$, on a $R_n - \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant R_n$ donc $0 \leqslant R_n - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ qui donne $\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$

5. a) On a $u_n \sim \dfrac{e^n}{n^n\sqrt{n}} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n} = \sqrt{2\pi}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}\ln(2\pi)}$ par continuité de ln.

b) $w_n = \ln\left[\dfrac{e(n+1)n^n\sqrt{n}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\right] = 1-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ donc, avec **I.3.b** et $\dfrac{1}{n} \in]0,1[$, $\boxed{w_n = -\dfrac{1}{12n^2}+\dfrac{1}{2n^3}S\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

c) S est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée. On déduit de **I.5.b**, $\boxed{\left|v_{n+1}-v_n+\dfrac{1}{12n^2}\right| \leqslant \dfrac{2\|S\|_{\infty,[0,1]}}{n^3}}$

d) Les deux séries $\sum(v_{n+1}-v_n)$ et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, on a par linéarité et télescopage,

$$\left|\left(\lim_{k\to+\infty} v_k\right) - v_n + \frac{1}{12}R_n\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}\left(v_{k+1}-v_k+\frac{1}{12k^2}\right)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\left|v_{k+1}-v_k+\frac{1}{12k^2}\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{C}{k^3} = Cr_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ce qui donne, avec le développement de R_n, $v_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{2}\ln(2\pi)+\dfrac{1}{12n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ puis, par composition par exp,

$u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{2\pi}\exp\left(\dfrac{1}{12n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \overset{\mathrm{DL}}{=} \sqrt{2\pi}\left(1+\dfrac{1}{12n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ et $\boxed{n! \underset{+\infty}{=} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\dfrac{1}{12n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)}$

Partie II :

A.1. Si $Y_1 = \frac{1}{2}(1+X_1)$ alors $Y_1(\Omega) = \{0,1\}$ donc Y_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(Y_1=1) = P(X_1=1) = p$. Comme les X_i sont indépendantes, les Y_i le sont aussi donc $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_n \sim \mathscr{B}(n,p)$. Comme $T_n = \frac{1}{2}(S_n+n)$, on a

$$\boxed{S_n(\Omega) \subset [\![-n,n]\!] \text{ et } P(S_n=k) = \begin{cases} \binom{n}{h} p^h(1-p)^{n-h} & \text{si } k+n=2h \\ 0 & \text{si } k+n \text{ est impair} \end{cases}} \text{ car } S_n = k \Leftrightarrow T_n = \frac{k+n}{2}.$$

2. On commence par simuler une loi de Bernoulli :

```python
def X(p) :
    r = random.random()
    if r < p :
        return 1
    else :
        return 0
```

```python
def nombreRetours(n,p) :
    S,retours = 0,0
    for k in range(n) :
        S += X(p)
        if S == 0 :
            retours += 1
    return retours
```

3. $a_n = P(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n$ car $0+2n$ est pair et $0+2n = 2h$ avec $h=n$.

4. Si $x \neq 0$, $\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_nx^{2n}}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}pqx^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4pqx^2$ donc si $|x| < \frac{1}{2\sqrt{pq}}$, la série est ACV et $R \geqslant \frac{1}{2\sqrt{pq}}$ alors que si $|x| > \frac{1}{2\sqrt{pq}}$, la série est GDV donc $R \leqslant \frac{1}{2\sqrt{pq}}$. On a donc $\boxed{R = \frac{1}{2\sqrt{pq}}}$

5. Si $R>1$, $1 \in]-R,R[$ donc $A(1)$ existe. On vérifie $R>1 \Leftrightarrow pq < \frac{1}{4} \Leftrightarrow p \neq \frac{1}{2}$. Pour $p = \frac{1}{2}$, avec la formule de Stirling, on a $a_n \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{4^n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ (SATP) donc $\sum a_n$ diverge. En résumé, $\boxed{A \text{ est définie en 1 si et seulement si } p \neq \frac{1}{2}}$

6. $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^nn!} = (-1)^n\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$ donc, pour $|x|<1$, $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}(-x)^n$ donc $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{4^n}$. On en déduit $\boxed{A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} \text{ si } |x|<R}$

B.1. Si on note T_1 le temps d'attente du premier retour à l'origine alors $(T_1 = 2k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ est un SCE (avec $T_1 = +\infty$ si on ne revient jamais en 0) et $b_n = P(T_1 = 2n)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S_{2n}=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(S_{2n}=0|T_1=2k)P(T_1=2k) + P(S_{2n}=0|T_1=+\infty)P(T_1=+\infty).$$

- Si $(T_1=+\infty)$ est réalisé, on ne revient pas en 0 donc $P(S_{2n}=0|T_1=+\infty)=0$
- Si $(T_1=2k)$ est réalisé et $k\geqslant n+1$, on ne revient pas en 0 avant l'instant $2n+2$ donc $P(S_{2n}=0|T_1=2k)=0$
- Si $(T_1=2k)$ est réalisé et $k\leqslant n$ alors $P(S_{2n}=0|T_1=2k) = P(S_{2n}-S_{2k}=0|T_1=2k)$ car $(S_{2k}=0)$ est réalisé. $(S_{2n}-S_{2k}=0) = \left(\sum_{i=2k+1}^{2n}X_i = 0\right)$ et $(T_1=2k) = (S_2\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2k-2}\neq 0)\cap(S_{2k}=0)$ sont indépendants par coalition donc $P(S_{2n}=0|T_1=2k) = P(S_{2n}-S_{2k}=0)$. Enfin, avec la propriété admise, $P(S_{2n}-S_{2k}=0) = P(S_{2n-2k}=0) = a_{n-k}$ donc $P(S_{2n}=0|T_1=2k) = a_{n-k}b_k$

On obtient donc $\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} b_ka_{n-k} \text{ pour } n\geqslant 1}$

2. On introduit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ de sorte que $A(x) = f(x^2)$ et $B(x) = g(x^2)$. Le rayon de convergence de la série qui définit f est $R_f = \frac{1}{4pq}$ et comme $(S_2\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2n-2}\neq 0)\cap(S_{2n}=0)\subset(S_{2n}=0)$, on a $0\leqslant b_n\leqslant a_n$ donc $R_g\geqslant R_f$. Pour $|t|<R_f$, par produit de Cauchy, on a $f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}b_ka_{n-k}\right)t^n$, $f(t)g(t) = a_0b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}a_nt^n = f(t)-a_0 = f(t)-1$. Pour $|x| < \frac{1}{2\sqrt{pq}}$, avec $t = x^2$, on a $\boxed{A(x)B(x) = A(x)-1}$

3. Avec l'expression de $A(x)$ précédente, $\boxed{B(x) = 1-\sqrt{1-4pqx^2} \text{ pour } |x| < \frac{1}{2\sqrt{pq}}}$

4. On a $4pq = 4p(1-p)\leqslant 1$ donc l'expression de **II.B.3** est toujours définie en 1. Comme $R_b \geqslant \frac{1}{2\sqrt{pq}}$, la série entière définissant B est définie en 1 si $p \neq \frac{1}{2}$ car $1 < R_b$. Reste le cas $p = \frac{1}{2}$: pour $x \in [0,1[$, on a $\sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k} \leqslant B(x) \leqslant 1$ (car SATP) donc, en faisant tendre x vers 1, la somme étant finie, on a $\sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant 1$; les sommes partielles de la SATP $\sum b_n$ sont majorées par 1 donc $\sum b_n$ converge. Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum b_n \text{ est toujours convergente}}$

C. $(T_1 = +\infty) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (T_1 = 2n)}$ donc, par incompatibilité des $(T_1 = 2n)$, $P(T_1 < +\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_1 = 2n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.
On prouve alors que B est continue en 1 (ce que l'on sait déjà sauf pour $p = \frac{1}{2}$) : on pose $g_n(x) = b_n x^n$ et on a
H1 : les g_n sont continues sur $[0,1]$.
H2 : $|g_n(x)| \leqslant b_n$ (indépendant de x) donc $\|g_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant b_n$ et $\sum b_n$ converge donc $\sum g_n$ CVN sur $[0,1]$.
On en déduit que B est continue sur $[0,1]$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B(1) = \lim_{x\to 1} 1 - \sqrt{1-4pqx^2} = 1 - \sqrt{1-4pq}$ puis $P(T_1 = +\infty) = \sqrt{1-4pq}$. On remarque ensuite $1-4pq = (1-2p)^2 = (p-q)^2$, ce qui donne $\boxed{P(T_1 = +\infty) = |p-q|}$

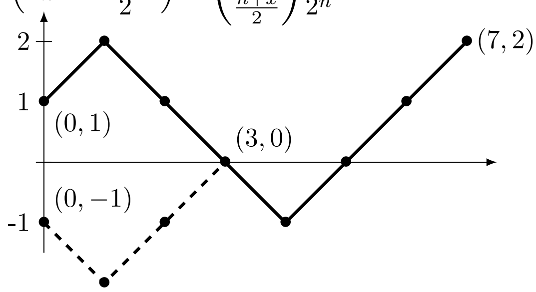
Partie III :

A.1. a) Un chemin reliant $(0,0)$ et (n,x) est un chemin de longueur n avec a déplacements vers le haut et $n-a$ vers le bas avec $x = a-(n-a)$; on doit avoir $n+x = 2a \in 2\mathbb{N}$ et $x \in [\![-n,n]\!]$ pour qu'un tel chemin existe. Dans ce cas, le nombre de chemins est le nombre de façons de placer les a déplacements vers le haut : $\boxed{\binom{n}{a} \text{ possibilités}}$

b) On a $S_n = x$ si et seulement si l'expérience est associée à un chemin reliant $(0,0)$ et (n,x). Le nombre de chemins de longueur n étant 2^n, on a $\boxed{P(S_n = x) = \begin{cases} 2^{-n}\binom{n}{a} & \text{si } n+x = 2a \text{ et } x \in [\![-n,n]\!] \\ 0 & \text{si } |x| > n \text{ ou } n+x \text{ est impair} \end{cases}}$

c) Comme dans la deuxième partie, si $Y_i = \frac{1}{2}(1+X_i) \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ alors $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ car les Y_i sont indépendantes puis $S_n = 2T_n - n$ donc $P(S_n = x) = P\left(T_n = \frac{n+x}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} \frac{1}{2^n}$

2. À un chemin $(k, z_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ reliant $(0,x)$ à (n,y) et qui passe par le point $(k_0, 0)$, on associe le chemin $(k, z'_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $(0,-x)$ à (n,y) tel que $\begin{cases} z'_k = -z_k & \text{si } k \leqslant k_0 \\ z'_k = z_k & \text{si } k > k_0 \end{cases}$ Une telle association est bijective car inversement, tout chemin de $(0,-x)$ à (n,y) franchit au moins une fois l'axe des abscisses en un point $(k_0, 0)$ puisque $-x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$



3. a) Par translation de vecteur $(-1,-1)$, le nombre de chemins de $(1,1)$ à (n,x) est le même que le nombre de chemins de $(0,0)$ à $(n-1, x-1)$ donc $N_{n-1,x-1}$. D'après le principe de réflexion, le nombre de chemin de $(1,1)$ à (n,x) et qui rencontre l'axe des abscisses est le même que le nombre de chemins de $(1,-1)$ à (n,x) donc, à nouveau par translation de vecteur $(-1,-1)$, il y a $N_{n-1,x+1}$ tels chemins. On en déduit le nombre de chemins de $(1,1)$ à (n,x) qui ne rencontre pas l'axe des abscisses $\boxed{N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}}$

b) Si $S_1 > 0$ (donc $S_1 = 1$), le premier point du chemin associé est $(1,1)$ donc le chemin associé à l'événement $(S_1 > 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} = 2k)$ est un chemin de $(0,0)$ à $(2n, 2k)$ qui ne rencontre pas l'axe des abscisses hors de $(0,0)$; ce chemin étant de longueur $2n$, $P(S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2k) = \frac{N_{2n-1,2k-1} - N_{2n-1,2k+1}}{2^{2n}}$ ce qui donne le résultat puisque $P(S_{2n-1} = 2k-1) = \frac{N_{2n-1,2k-1}}{2^{2n-1}}$ et $P(S_{2n-1} = 2k+1) = \frac{N_{2n-1,2k+1}}{2^{2n-1}}$ (**III.1.a**).

c) $(S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} > 0) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} (S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2k)$ donc, par incompatibilité,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{2n} (S_i > 0)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{2n} (S_i > 0), S_{2n} = 2k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} [P(S_{2n-1} = 2k-1) - P(S_{2n-1} = 2k+1)] \overset{\text{télesc}}{=} \frac{1}{2} P(S_{2n-1} = 1)$$

car $(S_{2n-1} = 2k+1) = \emptyset$ pour $k \geqslant n$. De plus, comme $X_{2n}(\Omega) = \{-1, 1\}$, par probabilités totales, on a $P(S_{2n} = 0) = P(S_{2n} = 0, X_{2n} = 1) + P(S_{2n} = 0, X_{2n} = -1) = P(S_{2n-1} = -1, X_{2n} = 1) + P(S_{2n-1} = 1, X_{2n} = -1)$
$P(S_{2n-1} = 1, X_{2n} = -1) = P(S_{2n-1} = 1)P(X_{2n} = -1) = \frac{1}{2} P(S_{2n-1} = 1)$ car, par coalitions, S_{2n-1} et X_{2n} sont indépendantes. On prouve de même $P(S_{2n} = 0, X_{2n} = 1) = \frac{1}{2} P(S_{2n-1} = -1) = P(S_{2n-1} = 1)$, par principe de réflexion. On conclut donc $P(S_{2n-1} = 1) = P(S_{2n} = 0)$ donc $\boxed{P(S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} P(S_{2n} = 0)}$

On prouve de même que $P(S_1 < 0, \dots, S_{2n} < 0) = \dfrac{1}{2} P(S_{2n} = 0)$ et en ajoutant les deux et en remarquant que $(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = [S_1 < 0, \dots, S_{2n} < 0)] \cup [S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0)]$, car un chemin ne peut pas traverser l'axe des abscisses sans que au moins un des S_k ne soit nul, on obtient, par incompatibilité des deux événements précédents, $\boxed{P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0)}$

B.1. $(T_{2n} = 2k) = (S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+2} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n} \neq 0) = (S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+2} - S_{2k} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n} - S_{2k} \neq 0)$.

Si $h \geqslant k$, $S_{2h} - S_{2k} = \displaystyle\sum_{i=2k+1}^{2h} X_i$ et $S_{2k} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2k} X_i$ donc $(S_{2k}=0)$ et $(S_{2k+2}-S_{2k} \neq 0, \dots, S_{2n}-S_{2k} \neq 0)$ sont indépendants, par coalition et indépendance des X_i. Donc $P(T_{2n}=2k) = P(S_{2k}=0) \times P(S_{2k+2}-S_{2k} \neq 0, \dots, S_{2n}-S_{2k} \neq 0)$. On obtient $\boxed{P(T_{2n} = 2k) = P(S_{2k} = 0) \times P((S_2 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n-2k} \neq 0))}$ car $S_{2h} - S_{2k} \sim S_{2h-2k}$ (admis par le texte).

2. $P(S_{2k} = 0) = \dfrac{1}{4^k} \dbinom{2k}{k}$ et $P(S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2k} \neq 0) = P(S_{2n-2k} = 0) = \dfrac{1}{4^{n-k}} \dbinom{2n-2k}{n-k}$ avec **III.A.3.c**.

C.1. On introduit une somme de Riemann associée à f : si $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ alors, comme f est continue sur $[0,1]$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On coupe alors u_n en trois : $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor n\alpha \rfloor} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\beta \rfloor+1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Si $k \leqslant \lfloor n\alpha \rfloor$ alors $\dfrac{k}{n} \leqslant \alpha$ donc $f\left(\dfrac{k}{n}\right) = f(\alpha)$ et $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor n\alpha \rfloor} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} f(\alpha) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha f(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t$. On prouve de même $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\beta \rfloor+1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\beta}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$. On en déduit $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui donne le résultat car, pour $1 + \lfloor n\alpha \rfloor + 1 \leqslant k \leqslant \lfloor n\beta \rfloor$, on a $\dfrac{k}{n} \in [\alpha, \beta]$ donc $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$.

2. Avec la partie I, $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} 2\sqrt{\pi n}\left(1 + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} = \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + \dfrac{1}{24n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \dfrac{1}{6n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

$\dbinom{2n}{n} = \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \dfrac{1}{8n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ que l'on peut réécrire sous la forme $\boxed{\dbinom{2n}{n} = \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \dfrac{(1+o(1))}{8n}\right)}$

3. On a $\dbinom{2k}{k}\dbinom{2n-2k}{n-k}\dfrac{1}{4^n} - \dfrac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} = \dfrac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\left(-\dfrac{\varepsilon_k}{8k} - \dfrac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)} + \dfrac{\varepsilon_k \varepsilon_{n-k}}{64k(n-k)}\right)$. La suite (ε_n) converge donc est bornée et il existe $C > 1$ (donc $C^2 > C$) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\varepsilon_n| \leqslant C$. Par inégalité triangulaire, $\left|\dbinom{2k}{k}\dbinom{2n-2k}{n-k}\dfrac{1}{4^n} - \dfrac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\right| \leqslant \dfrac{C^2}{8\pi\sqrt{k(n-k)}}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{(n-k)} + \dfrac{1}{8k(n-k)}\right)$. Si $\lfloor n\alpha \rfloor + 1 \leqslant k \leqslant \lfloor n\beta \rfloor$ alors $n\alpha \leqslant k \leqslant n\beta$ donc $\left|\dbinom{2k}{k}\dbinom{2n-2k}{n-k}\dfrac{1}{4^n} - \dfrac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\right| \leqslant \dfrac{C^2}{8\pi\sqrt{n\alpha(n-n\beta)}}\left(\dfrac{1}{n\alpha} + \dfrac{1}{(n-n\beta)} + \dfrac{1}{8n\alpha(n-n\beta)}\right)$

$\left|\dbinom{2k}{k}\dbinom{2n-2k}{n-k}\dfrac{1}{4^n} - \dfrac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\right| \leqslant \dfrac{M}{n^{\frac{3}{2}}}$ avec $M > 0$ tel que $\dfrac{C^2}{8\pi\sqrt{\alpha(1-\beta)}}\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{(1-\beta)} + \dfrac{1}{8n\alpha(1-\beta)}\right) \leqslant M$ (qui existe car le dernier terme converge). On somme alors ces inégalités et, par inégalité triangulaire, on obtient $\left|\displaystyle\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\right| \leqslant \dfrac{M}{n^{\frac{3}{2}}}(\lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

4. $\left(\dfrac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = (T_{2n} \in [2n\alpha, 2n\beta]) = (\lceil 2n\alpha \rceil \leqslant T_{2n} \leqslant \lfloor 2n\beta \rfloor)$ car $T_{2n}(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Donc, $(T_{2n} = 2k+1)$ étant impossible, $P\left(\dfrac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \displaystyle\sum_{k=\lceil n\alpha \rceil}^{\lfloor n\beta \rfloor} P(T_{2n} = 2k)$. Si $n\alpha \notin \mathbb{N}$ alors $\lceil n\alpha \rceil = \lfloor n\alpha \rfloor + 1$ et si $n\alpha \in \mathbb{N}$, $\lceil n\alpha \rceil = \lfloor n\alpha \rfloor$ mais $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(T_{2n} = 2n\alpha) = 0$, par **III.B.2** et Stirling, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) - \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} P(T_{2n} = 2k)\right) = 0$.

Avec $\displaystyle\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} P(T_{2n} = 2k) = \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}$, **III.C.1** et **III.C.4**,

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1/\sqrt{t}}{\sqrt{1 - (1/\sqrt{t})^2}}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{\pi}\Big[2\arcsin\left(\sqrt{t}\right)\Big]_{\alpha}^{\beta}}$