DS 6.1 : extrait de X-ENS 2022 MP Maths B

PSI 1 2024/2025 **samedi 15 février 2025**

PARTIE 1 : DÉVELOPPEMENT EULÉRIEN

1.1 *Propriétés*

1.1.1 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $\frac{1}{x}$ est bien défini et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$ est bien défini. De plus, $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{2x}{x^2 - n^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison, comme la série de RIEMANN $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$, $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right) \text{ converge donc } g(x) \text{ est bien défini.}}$

1.1.2 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a bien $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et

$$g(-x) = \frac{1}{-x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{-x+n} + \frac{1}{-x-n}\right) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right) = -g(x),$$

ce qui prouve que g est impaire. De plus f est impaire par produit car $\cos$ est paire et $\sin$ est impaire ainsi, comme l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est stable par combinaison linéaire, par différence, $D = f - g$ est aussi impaire. Ainsi, $\boxed{\text{les fonctions } g \text{ sont } D \text{ sont impaires.}}$

1.1.3 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a bien $x + 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $x - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ce qui rend possible la 1-périodicité des fonctions citées. On remarque que

$$f(x+1) = \pi \frac{\cos(\pi(x+1))}{\sin(\pi(x+1))} = \pi \frac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \pi \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = f(x)$$

donc f est 1-périodique. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en définissant pour $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par les sommes partielles $S_n(y) = \frac{1}{y} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{y+k} + \frac{1}{y-k}\right)$, on a

$$S_n(x+1) = \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x+1+k} + \frac{1}{x+1-k}\right) = \frac{1}{x} + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x+j} + \frac{1}{x-j}\right)\right) + \frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{x+n}$$

après réorganisation et changements d'indices. Comme $g(x+1) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x+1)$, $g(x) = \lim_{n \to +\infty} S_{n-1}(x)$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{x+n}\right) = 0$, en passant à la limite ci-dessus, on obtient $g(x+1) = g(x)$. Par structure d'espace vectoriel des fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{les fonctions } g \text{ puis } D = f - g \text{ sont 1-périodiques.}}$

1.1.4 Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\sin(x) \neq 0$ donc, par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur le domaine, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Posons $u_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = x \mapsto \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$.

(H_1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur $]0; 1[$.

(H_2) Soit $[a;b] \subset]0;1[$, alors u_0 et u_1 sont continues sur le segment $[a;b]$ donc y sont bornées par le théorème des bornes atteintes. De plus, si $n \geqslant 2$ et $x \in [a;b]$, alors $|u_n(x)| = \dfrac{2x}{(n-x)(n+x)} \leqslant \dfrac{2}{n(n-1)}$ car $n + x \geqslant n$ et $n - x \geqslant n - 1$ donc $||u_n||_{\infty,[a;b]} \leqslant \dfrac{2}{n(n-1)}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{2}{n(n-1)}$ converge par comparaison aux séries de Riemann car $\dfrac{2}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[a;b]$.

D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $g = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $]0;1[$. Or la fonction g est 1-périodique d'après 1.1.3 donc $\boxed{g, \text{ et par différence, } D = f - g \text{ sont continues sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.}$

1.2 *Équations fonctionnelles*

1.2.1 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors on constate que $\frac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ car si on avait $\frac{x}{2} = n \in \mathbb{Z}$, on aurait $x = 2n \in \mathbb{Z}$ et si on avait $\frac{x+1}{2} = m \in \mathbb{Z}$, on aurait $x = 2m - 1 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $f(x)$, $f\left(\frac{x}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1+x}{2}\right)$ sont bien définis. De plus $\cos\left(\pi\frac{1+x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et $\sin\left(\pi\frac{1+x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ donc

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = \pi\frac{-\cos^2(\pi x/2) + \sin^2(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2)\big[-\cos(\pi x/2)\big]} = 2\pi\frac{\cos^2(\pi x/2) - \sin^2(\pi x/2)}{2\sin(\pi x/2)\cos(\pi x/2)} = 2f(x)$$

car $\cos^2(\pi x/2) - \sin^2(\pi x/2) = \cos(\pi x)$ et $2\sin(\pi x/2)\cos(\pi x/2) = \sin(\pi x)$ grâce aux formules de trigonométrie. Ainsi, on a bien l'équation fonctionnelle vérifiée par f suivante : $\boxed{f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2f(x).}$

1.2.2 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors comme à la question précédente, $g(x)$, $g\left(\frac{x}{2}\right)$ et $g\left(\frac{1+x}{2}\right)$ sont bien définis. Avec la notation de la somme partielle introduite en question 1.1.3, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
S_n\left(\frac{x}{2}\right) + S_n\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \frac{1}{x/2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(x/2)+k} + \frac{1}{(x/2)-k}\right) \\
&\quad + \frac{1}{(x+1)/2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{((x+1)/2)+k} + \frac{1}{((x+1)/2)-k}\right) \\
&= \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{x+2k} + \frac{2}{x-2k} + \frac{2}{x+2k+1} + \frac{2}{x-(2k-1)}\right) \\
&= \frac{2}{x} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\,\text{pair}}}^{2n}\left(\frac{2}{x+k} + \frac{2}{x-k}\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\,\text{impair}}}^{2n}\left(\frac{2}{x+k} + \frac{2}{x-k}\right) + \frac{2}{x+2n+1} \\
&= 2\left[\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k}\right)\right] + \frac{2}{x+2n+1} \\
&= 2\,S_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}.
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = g\left(\frac{x+1}{2}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}(x) = g(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{x+2n+1} = 0$, donc en passant à la limite ci-dessus, on obtient $\boxed{g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2g(x).}$

1.3 *Le développement*

1.3.1 Avec les notations de la question 1.1.4,

(H_1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $]-1;1[$.

(H_2) Soit $[-a;a] \subset]-1;1[$ avec $a \in]0;1[$, alors u_1 est continue sur le segment $[-a;a]$ donc u_1 est bornée sur $[-a;a]$ par le théorème des bornes atteintes. De plus, si $n \geqslant 2$ et $x \in [-a;a]$, on peut majorer $|u_n(x)| = \dfrac{2x}{(n-x)(n+x)} \leqslant \dfrac{2}{(n-1)^2}$ car $n+x \geqslant n-1$ et $n-x \geqslant n-1$ donc $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{2}{(n-1)^2}$. Comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{2}{(n-1)^2}$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-a;a]$.

Comme tout segment de $]-1;1[$ est inclus dans un segment du type $[-a;a]$ avec $a \in]0;1[$, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $h = g - u_0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $]-1;1[$ et $h(0) = 0$ car h est impaire comme g et u_0. Par conséquent, $g(x) = u_0(x) + h(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{x} + o(1)$ car $h(x) \underset{0}{=} h(0) + o(1) \underset{0}{=} o(1)$.

Pour $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$,

$$D(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{1}{x} - h(x) = \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} - h(x) = \frac{x\pi\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)} - h(x).$$

Avec les développement limités en 0, on a $x\pi\cos(\pi x) - \sin(\pi x) \underset{0}{=} \pi x\big(1 - O(x^2)\big) - \big(\pi x + O(x^3)\big) \underset{0}{=} o(x^2)$ et $x\sin(\pi x) \underset{0}{\sim} \pi x^2$ donc, en divisant les deux, $\dfrac{x\pi\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)} \underset{0}{=} o(1)$. Ainsi, $D(x) = f(x) - g(x) \underset{0}{=} o(1)$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} D(x) = 0$ ce qui permet le prolongement par continuité de D en $\widetilde{D}$ en 0 avec la valeur $\widetilde{D}(0) = 0$.

Comme D est définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ d'après les questions précédentes, et se prolonge par continuité en 0 avec $\widetilde{D}(0)$, elle se prolonge par continuité en tout entier n avec $\widetilde{D}(n) = \widetilde{D}(0) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\boxed{\text{la fonction } D \text{ se prolonge par continuité en } \widetilde{D} \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ s'annulant en tous les entiers relatifs.}}$

1.3.2 Comme $\widetilde{D}$ est continue sur le segment $[0;1]$, le théorème des bornes atteintes nous permet d'affirmer que $\widetilde{D}$ est bornée sur $[0;1]$ et qu'elle y atteint ses bornes, notamment sa borne supérieure, qui est donc un maximum, d'où l'existence de $\boxed{\alpha \in [0;1] \text{ tel que } \widetilde{D}(\alpha) = M = \operatorname{Sup}_{t\in[0;1]} \widetilde{D}(t) = \operatorname{Max}_{t\in[0;1]} \widetilde{D}(t).}$

1.3.3 Avec les questions 1.2.1 et 1.2.2, par différence, on a $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ D\left(\dfrac{x}{2}\right) + D\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2D(x)$. Comme D se prolonge en $\widetilde{D}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et que tout réel est la limite d'une suite de réels dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a aussi (par densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ en fait), $\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{D}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \widetilde{D}\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\widetilde{D}(x) \quad (1)$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, on a bien $\widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha}{2^0}\right) = \widetilde{D}(\alpha) = M$ d'après 1.3.2.

<u>Hérédité</u> : soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right) = M$. Avec la relation (1) appliquée au réel $x = \dfrac{\alpha}{2^n}$, on a $\widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha}{2^{n+1}}\right) + \widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}\right) = 2\widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right) = 2M$. Comme $\dfrac{\alpha}{2^{n+1}}$ et $\dfrac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}$ sont dans $[0;1]$, on a donc $\widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right) \leqslant M$ et $\widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}\right) \leqslant M$. Or $\left(M - \widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right) + \left(M - \widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}\right)\right) = 0$, et une somme de deux quantités positives ne peut être nulle que si elles sont toutes les deux nulles, d'où $\widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = M\left(= \widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}\right)\right)$.

Par principe de récurrence, on a établi que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \widetilde{D}\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right) = M.}$

1.3.4 Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{2^n}=0$ et que $\widetilde{D}$ est continue en 0, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim\limits_{n\to+\infty}\widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)=\widetilde{D}(0)=0$. Or $\forall n\in\mathbb{N},\ \widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)=M$ donc, par unicité de la limite, $M=0$.
Ainsi, la fonction $\widetilde{D}$ est négative sur $[0;1]$ car $\underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Max}}\ \widetilde{D}(t)=0$. Mais comme elle est 1-périodique, $\widetilde{D}$ est donc négative sur $\mathbb{R}$. Enfin, comme elle est impaire, elle est aussi positive sur $\mathbb{R}$ car $\forall x\in\mathbb{R},\ \widetilde{D}(x)=-\widetilde{D}(-x)\geqslant 0$, ce qui montre que $\widetilde{D}$ est nulle sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ D(x)=f(x)-g(x)=0$ donc $f(x)=g(x)$ ce qui, en multipliant par x, se transforme en $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ \pi x\ \mathrm{cotan}(\pi x)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2}.}$

PARTIE 2 : BERNOULLI ET EULER

2.1 *Développement en série entière*

2.1.1 Soit $x\in]-2\pi;2\pi[$, la famille $\left(\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est composée de réels positifs donc sa somme S appartenant à $[0;+\infty]$ se calcule avec la formule de Fubini et vaut $S=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)$. Or, pour tout entier $n\geqslant 1$, $\frac{x}{2\pi n}\in]-1;1[$ donc la série géométrique $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}$ converge et on a $S=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}$.

Comme $\alpha_n=\frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n$ converge ce qui assure que $S<+\infty$ donc que $\boxed{\text{la famille }\left(\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}\text{ est sommable.}}$

2.1.2 Soit $x\in]-2\pi;2\pi[\setminus\{0\}$, en posant $y=\frac{x}{2\pi}$, on a $y\in]-1;1[\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ donc, d'après 1.3.4,

$$1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^2}{y^2-n^2}=\pi y\ \mathrm{cotan}(\pi y)=\frac{x}{2}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2-n^2}=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}.$$

En reprenant le calcul de la question précédente, toujours avec la formule de Fubini, on a

$$\frac{x}{2}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}=1-2S=1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right).$$

Or, pour $k\in\mathbb{N}^*$, il vient $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}=\frac{x^{2k}}{2^{2k}\pi^{2k}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k}\pi^{2k}}$ par définition de la fonction ζ de Riemann car $2k>1$. On en conclut que $\boxed{\forall x\in]-2\pi;2\pi[\setminus\{0\},\ \frac{x}{2}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}.}$

2.1.3 Soit $x \in]-2\pi;2\pi[\backslash\{0\}$, alors $e^{ix}-1 = e^{ix/2}\big(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\big) = 2i\sin(x/2)e^{ix/2}$ avec les formules d'EULER et $e^{ix} \neq 1$ d'où

$$\frac{ix}{e^{ix}-1} = \frac{ixe^{-ix/2}}{2i\sin(x/2)} = \frac{x\big(\cos(x/2)-i\sin(x/2)\big)}{2\sin(x/2)} = \frac{x}{2}\,\text{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) - i\frac{x}{2}.$$

En utilisant la relation de la question précédente, on en déduit que $\boxed{\dfrac{ix}{e^{ix}-1} = 1 - \dfrac{ix}{2} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}.}$

2.1.4 Comme $i^2=-1$, pour $x \in]-2\pi;2\pi[\backslash\{0\}$, on a $ix = \big(e^{ix}-1\big)\times\Big(1-\dfrac{ix}{2}-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k\zeta(2k)(ix)^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\Big)$ d'après la question précédente. Cette relation est aussi vraie pour $x=0$ car $e^{i0}-1=0$. Par conséquent,

$$\forall x \in]-2\pi;2\pi[,\ ix = \big(e^{ix}-1\big)\times\Big(1-\frac{ix}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)(ix)^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\Big).$$

Avec la définition à venir des nombres de BERNOULLI, la série entière

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{b_k}{k!}z^k = 1-\frac{z}{2}+\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)z^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}$$

de la variable complexe converge pour des imaginaires purs $z=ix$ tels que $|x|<2\pi$ donc son rayon de convergence R vérifie $R\geqslant 2\pi$. On note B sa fonction somme $B : B(0,R)\to\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z\in B(0,R),\ B(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b_k}{k!}z^k = 1-\frac{z}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)z^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}.$$

On sait que $\forall z\in\mathbb{C},\ e^z-1=\Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{z^k}{k!}\Big)-1=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{z^k}{k!}$ et le rayon de convergence R' de $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{z^k}{k!}$ vaut $R'=+\infty$. Par produit de CAUCHY, comme $\text{Min}(R,R')=R$, il existe une suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall z\in B(0,R),\ (e^z-1)B(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_kz^k$ (1). En particulier, en prenant $z=ix$ et $x\in]-2\pi;2\pi[$, on a bien $|z|<R$ donc $(e^{ix}-1)B(ix)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_k(ix)^k = ix$ d'après ce qui précède. Comme $2\pi>0$, en identifiant les coefficients du développement en série entière dans l'égalité $\forall x\in]-2\pi;2\pi[,\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_k(ix)^k=ix$, on a $c_0=0$, $c_1=1$ et $\forall k\geqslant 2,\ c_k=0$. Par conséquent, en revenant à la relation (1) avec ces valeurs de c_k, on a la relation

$$\boxed{\text{pour tout } z\in\mathbb{C} \text{ tel que } |z|<2\pi, \text{ on a } z=\big(e^z-1\big)\times\Big(1-\frac{z}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}z^{2k}\Big).}$$

2.2 *Calcul des valeurs de ζ en les nombres pairs en fonction des nombres de* BERNOULLI

2.2.1 Comme $f : x\mapsto x$ et $g : x\mapsto e^x-1$ sont classiquement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que g ne s'annule qu'en 0, par quotient $h=\dfrac{f}{g}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. D'après la question précédente en prenant $z=x$,

$$\forall x\in]-2\pi;2\pi[,\ h(x)=B(x)=1-\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}$$

(qui marche même avec $x=0$ car $h(0)=1$) donc h est développable en série entière sur $]-2\pi;2\pi[$ et y est donc de classe C^∞ d'après le cours.

Enfin, comme tout réel est intérieur aux intervalles $\mathbb{R}_-^*$, $]-2\pi;2\pi[$ ou $\mathbb{R}_+^*$, h est de classe C^∞ au voisinage de tout réel, $\boxed{h \text{ est une fonction de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Comme h est développable en série entière sur $]-2\pi;2\pi[$, d'après le cours, $\forall x \in]-2\pi;2\pi[$, $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$ qu'on peut identifier, par unicité du développement en série entière, avec $h(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}$, ce qui donne $h(0)=1$, $h'(0) = -\frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h^{(2n+1)}(0) = 0$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\zeta(2n).}$

2.2.2 La relation de 2.1.4 s'écrit, pour $z = x \in]-2\pi;2\pi[$, $x = \left(e^x - 1\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\right)$ ou

$$\forall x \in]-2\pi;2\pi[,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n\right) = x$$

en posant $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 1$ et par définition des nombres de Bernoulli. Par produit de Cauchy sur $]-2\pi;2\pi[$, comme $R \geqslant 2\pi$, on a

$$\forall x \in]-2\pi;2\pi[,\ \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} a_{p-k} \frac{b_k}{k!}\right) = x.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, $a_0 b_0 = 0$ (normal, $a_0 = 0$) et $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 1$ (normal, $a_1 = b_0 = 1$ et $a_0 = 0$) et surtout, pour tout entier $p \geqslant 2$, on obtient $\sum_{k=0}^{p} a_{p-k} \frac{b_k}{k!} = 0$ qui devient $\sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k} \frac{b_k}{k!} = 0$ car $a_0 = 0$ et $a_{p-k} = \frac{1}{(p-k)!}$ si $p - k \geqslant 1$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{k!(p-k)!} = 0$ et en posant $n = p-1$, on en déduit bien que $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}}$

2.2.3 D'après la question précédente comme $2 \geqslant 1$, $0 = \frac{b_0}{0!.3!} + \frac{b_1}{1!.2!} + \frac{b_2}{2!.1!} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{b_2}{2}$ car $b_0 = 1$ et $b_1 = -\frac{1}{2}$ donc $b_2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ d'où $\boxed{b_2 = \frac{1}{6}.}$ Ensuite, $0 = \frac{b_0}{0!.5!} + \frac{b_1}{1!.4!} + \frac{b_2}{2!.3!} + \frac{b_3}{3!.2!} + \frac{b_4}{4!.1!}$ donc $b_4 = -\frac{b_0}{5} - b_1 - 2b_2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{-6+15-10}{30}$ d'où $\boxed{b_4 = -\frac{1}{30}.}$ Continuons avec $n = 6$ dans 2.2.2 et $0 = \frac{b_0}{0!.7!} + \frac{b_1}{1!.6!} + \frac{b_2}{2!.5!} + \frac{b_4}{4!.3!} + \frac{b_6}{6!1!}$ donc $b_6 = -\frac{b_0}{7} - b_1 - 3b_2 - 5b_4 = -\frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ d'où $\boxed{b_6 = \frac{1}{42}.}$

Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} b_{2n}$ par définition des nombres de Bernoulli, on en déduit les trois valeurs $\boxed{\zeta(2) = \frac{(-1)^0 2^1 \pi^2}{2!} b_2 = \frac{\pi^2}{6}}$ puis $\zeta(4) = \frac{(-1)^1 2^3 \pi^4}{4!} b_4 = +\frac{\pi^4}{3! \times 15}$ d'où $\boxed{\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}}$ et $\zeta(6) = \frac{(-1)^2 2^5 \pi^6}{6!} b_6 = \frac{2^5\pi^6}{6! \times 7 \times 6} = \frac{\pi^6}{1 \times 1 \times 3 \times 1 \times 5 \times 3 \times 7 \times 3}$ d'où $\boxed{\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.}$

$\boxed{\textbf{2.3}}$ On a vu en 2.1.4 que $R \geqslant 2\pi$. Si on avait $R > 2\pi$, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n i^n}{n!} x^n$ aurait aussi pour rayon $R > 2\pi$ car la suite $\left(\frac{b_n i^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si la suite $\left(\frac{b_n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ l'est, ce qui montrerait d'après le cours que la fonction somme $A : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n i^n}{n!} x^n$ serait continue (et même de classe C^∞) sur $[-2\pi; 2\pi] \subset]-R; R[$. Or on sait depuis la question 2.1.4 que $\forall x \in]-2\pi; 2\pi[$, $A(x) = \frac{ix}{e^{ix} - 1}$. Mais ceci est impossible car la fonction $x \mapsto \frac{ix}{e^{ix} - 1}$ n'admet pas de limite finie quand x tend vers $2\pi^-$ (par exemple) puisque $\lim_{x\to(2\pi)^-} (e^{ix} - 1) = 0$. On conclut ce raisonnement par l'absurde, et $\boxed{R = 2\pi.}$

DS 6.2 : X-ENS 2018 PC

PSI 1 2024/2025 **samedi 15 février 2025**

PARTIE 1 : CAS PARTICULIERS

1.1 En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$, $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ étant un n^2-uplet de ± 1, $\boxed{\text{card}\,(\mathcal{M}_n(\{-1,1\})) = 2^{n^2}.}$

Comme il ne contient par la matrice nulle, $\boxed{\mathcal{M}_n(\{-1,1\}) \text{ n'est-pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

1.2 Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \{-1,1\}^n$ et $Y = (y_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \{-1,1\}^n$. Alors ${}^tXAY = \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_i a_{i,j} y_j\Big)$ est un entier relatif comme somme d'entiers relatifs, par inégalité triangulaire, $|{}^tXAY| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_i a_{i,j} y_j|\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} 1\Big)$ car $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ x_i, y_j, a_{i,j} \in \{-1,1\}$: $\boxed{S(A) \subset [\![-n^2;n^2]\!].}$

Pour tout $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, notons $E = \{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \mid x_i a_{i,j} y_j = 1\}$, $e = \text{card}\,(E)$, $F = \{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \mid x_i a_{i,j} y_j = -1\}$ et $f = \text{card}\,(F)$. Il est clair que (E,F) forme une partition de $[\![1;n]\!]^2$ donc $e + f = n^2$. De plus, on a vu ci-dessus que ${}^tXAY = e - f$ donc ${}^tXAY = n^2 - 2f$ a la même parité que n^2 d'où $\boxed{S(A) \subset \{n^2 - 2f \mid f \in [\![0;n]\!]\} \text{ strictement inclus dans } [\![-n^2;n^2]\!]}$ (par exemple, $n^2 - 1 \notin S(A)$).

Enfin, si $k \in S(A)$, alors il existe $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tels que $k = {}^tXAY$ et, en prenant $X' = -X \in \{-1,1\}^n$, on a ${}^tX'AY = -{}^tXAY = -k \in S(A)$, donc $\boxed{S(A) \text{ est bien un ensemble symétrique par rapport à } 0.}$

1.3 Si $k \in S(B)$, alors il existe par définition $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tels que $k = {}^tXBY$. En posant $X' = CX$ et $Y' = DY$, X' et Y' sont dans $\{-1,1\}^n$, car l'ensemble $\{-1,1\}$ est stable par multiplication, on en déduit que $k \in S(A)$ car ${}^tX'AY' = {}^t(CX)A(DY) = {}^tX{}^tCADY = {}^tXCADY = {}^tXBY = k$. Par conséquent, $S(B) \subset S(A)$.
Comme $C^2 = I$ et $D^2 = I$, les matrices C et D sont leur propre inverse. Puisque $B = CAD$, on a donc $CBD = C^2AD^2 = A$. D'après ce qui précède, on a donc aussi $S(A) \subset S(B)$.
Par double inclusion, si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})^2$ et s'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$, on a $\boxed{S(A) = S(B).}$

1.4 Soit $X = (x_1,x_2)$ et $Y = (y_1,y_2)$ dans $\{-1,1\}^2$. Alors ${}^tXIY = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = (x_1+x_2)(y_1+y_2)$. Comme $(x_1+x_2, y_1+y_2) \in \{-2,0,2\}^2$, on a ${}^tXAY \in \{-4,0,4\}$: $S(I) \subset \{-4,0,4\}$. De plus, pour $X = (1,1)$ et $Y = (1,1)$, il vient ${}^tXIY = 4$, donc $4 \in S(I)$. Pour $X = (-1,1)$ et $Y = (1,1)$, ${}^tXIY = 0$ donc $0 \in S(I)$. Enfin, $S(I)$ est un ensemble symétrique par rapport à 0, donc $-4 \in S(I)$. Au final, on a $\boxed{S(I) = \{-4,0,4\}.}$
De même, ${}^tXJY = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 = \underbrace{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}_{\in\{-4,0,4\}} - \underbrace{2x_2y_2}_{\in\{-2,2\}}$ donc ${}^tXJY \in \{-6,-2,2,6\}$, ainsi $S(J) \subset \{-6,-2,2,6\}$. De plus, d'après la question 1.2, on a $S(J) \subset [\![-4;4]\!]$ donc $S(J) \subset \{-2,2\}$. Or $2 \in S(J)$ en prenant $X = (1,1)$ et $Y = (1,1)$, donc $-2 \in S(J)$ par symétrie. Par conséquent, $\boxed{S(J) = \{-2,2\}.}$

En choisissant judicieusement C et D, on peut, en effectuant le produit CAD, multiplier les lignes et les colonnes de A par 1 ou -1 de toutes les manières possibles. Par exemple, en prenant $D = \mathrm{diag}(-1,1)$ et $C = \mathrm{diag}(1,-1)$, on multiplie la deuxième ligne de A et la première colonne par -1 en calculant CAD. De plus, ces opérations laissent $S(A)$ inchangé d'après la question 1.3.

• Les matrices qui contiennent exactement 0, 2 ou 4 fois le chiffre 1 s'obtiennent en partant de I et vérifient $S(A) = S(I) = \{-4,0,4\}$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1,1) \times I \times \mathrm{diag}(-1,1)$.

• Les matrices qui contiennent exactement 1 ou 3 fois le chiffre 1 s'obtiennent en partant de J et vérifient $S(A) = S(J) = \{-2,2\}$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,-1) \times J \times \mathrm{diag}(1,-1)$.

Au final, on n'a que deux choix si $n = 2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\{-1,1\})$, c'est $\boxed{S(A) = \{-4,0,4\} \text{ ou } S(A) = \{-2,2\}.}$

1.5 On peut penser à tourner ces implications dans les deux sens. Commençons dans le sens direct :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Pour $(X,Y) \in (\{-1,1\})^2$ avec ${}^tX = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ et ${}^tY = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$, la matrice ${}^tXAY$ s'obtient à partir de A en multipliant les lignes L_i de A par x_i et les colonnes C_j par y_j (à gauche on modifie les lignes, et à droite les colonnes). Ainsi, si $n^2 \in S(A)$, avec les notations de 1.2, cela signifie que $f = 0$: il n'y a pas de -1, donc que des 1, dans tous les termes $a_{i,j}x_iy_j$. Ainsi, en notant $D = \mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(y_1,\cdots,y_n)$, on a $DAD' = (a_{i,j}x_iy_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = J = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Comme $J = U{}^tU$ avec ${}^tU = (1\ \cdots\ 1)$, $D = D^{-1}$ et $D' = D'^{-1}$, cela donne $A = DU{}^tUD' = X{}^tY$ (faire le calcul matriciel).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Si $A = X{}^tY$ avec $(X,Y) \in (\{-1,1\})^2$, les colonnes de A sont les $y_jX \neq 0$, d'où $\mathrm{rg}(A) = 1$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Si $\mathrm{rg}(A) = 1$, comme toutes les colonnes de A sont non nulles, il existe, pour $i \in [\![1;n]\!]$, un entier $y_i = \pm 1$ tel que $C_i = y_iC_1$ (avec $y_1 = 1$). En notant Y le vecteur colonne tel que ${}^tY = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$, la matrice AY est la matrice colonne contenant nC_1 puisque $\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = n$. Par conséquent, en notant $X = C_1 \in \{-1,1\}^n$, ${}^tXAY = n{}^tC_1C_1 = n||C_1||^2 = n^2 \in S(A)$.

Mais on pouvait aussi bien sûr le faire dans le sens inverse :

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Si A est de rang 1, en notant $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de A, comme $C_1 \neq 0$, les autres colonnes sont multiples de C_1 et il existe donc, pour $i \in [\![1;n]\!]$, un entier $y_i = \dfrac{a_{1,i}}{a_{1,1}} = \pm 1$ tel que $C_i = y_iC_1$ (avec $y_1 = 1$ bien sûr). Ainsi $A = C_1 \times (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$ et, en notant X et Y les deux vecteurs colonnes de $\{-1,1\}^n$ tels que $X = C_1$ et ${}^tY = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$, alors $A = X{}^tY$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si $A = X{}^tY$ avec $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$, alors ${}^tXAY = {}^tX(X{}^tY)Y = ({}^tXX)({}^tYY) = ||X||^2||Y||^2 = n^2 \in S(A)$.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Si $n^2 \in S(A)$, alors il existe deux vecteurs colonnes X et Y de $\{-1,1\}^n$ tels que ${}^tX = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ et ${}^tY = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$ et $n^2 = {}^tXAY = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_iy_j\Big)$. Or, pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $x_ia_{i,j}y_j \in \{-1,1\}$, donc la condition $n^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_iy_j\Big)$ se traduit par $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j}x_iy_j = 1$ (somme de n^2 termes, chaque terme valant au plus 1). Par suite, comme $(x_i, a_{i,j}, y_j) \in \{-1,1\}^3$ pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on en déduit que $x_iy_j = a_{i,j}$. On a donc, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $y_jX = C_j$ (colonne j de A) donc toutes les colonnes de A sont multiples de X. Comme $A \neq 0$, on a bien $\mathrm{rg}(A) = 1$.

On a bien montré l'équivalence : $\boxed{n^2 \in S(A) \Longleftrightarrow (\exists (X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2,\ A = X{}^tY) \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(A) = 1.}$

1.6 Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ vérifiant $n^2 \in S(A)$ sont exactement celles de rang 1 d'après la question 1.5.

Pour les dénombrer, on établit un protocole de choix bijectif :

- On choisit la première colonne C_1 de A : 2^n choix (n cases de ± 1).
- Pour $j \in [\![2;n]\!]$, on choisit le terme en case $(1,j)$, les autres termes de la colonne j de A s'en déduisent puisque $C_j = \dfrac{a_{1,j}}{a_{1,1}} C_1$: cela fait 2 choix pour chaque colonne donc 2^{n-1} choix (ils sont indépendants).

Il y a donc 2^{2n-1} telles matrices, donc $\boxed{\text{la proportion cherchée est } \dfrac{2^{2n-1}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2^{n^2-2n+1}} = \dfrac{1}{2^{(n-1)^2}}.}$

PARTIE 2 : MAJORATION

2.1 La variable aléatoire U_1 est finie, de même que $e^{\lambda U_1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $e^{\lambda U_1}$ admet une espérance finie et, d'après le théorème de transfert, avec la loi de U_1 donnée par l'énoncé, on obtient

$$\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}] = e^{-\lambda}\,\mathbb{P}(U_1 = -1) + e^{\lambda}\,\mathbb{P}(U_1 = 1) = \frac{1}{2}(e^{-\lambda} + e^{\lambda}) = \mathrm{ch}(\lambda).$$

Ainsi, $\varphi(\lambda) = \ln(\mathrm{ch}(\lambda))$ et φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(\lambda) = \dfrac{\mathrm{sh}(\lambda)}{\mathrm{ch}(\lambda)} = \mathrm{th}(\lambda)$ et $\varphi''(\lambda) = 1 - \mathrm{th}(\lambda)^2$. On pose $\psi : t \mapsto \varphi(t) - \dfrac{t^2}{2}$, ψ est aussi, par opérations, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on dérive deux fois : $\psi'(t) = \mathrm{th}(t) - t$, $\psi''(t) = -\mathrm{th}^2(t) \leqslant 0$. Ainsi, ψ' est décroissante sur $\mathbb{R}$, comme $\psi'(0) = 0$, ψ' est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$ d'où ψ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, ψ maximale en 0 où elle vaut $\psi(0) = \ln(\mathrm{ch}(0)) = 0$. ψ est donc négative sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda U_1}] \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}.}$

On pouvait aussi, comme on l'a vu cette année, comparer $\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}] = \mathrm{ch}(\lambda)$ et $\exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)$ en passant par les séries entières. En effet, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{(2n)!} \leqslant \dfrac{1}{2^n n!}$ car $\dfrac{(2n)!}{n!} = (n+1) \times \cdots \times (2n) \geqslant 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ pour $n \geqslant 1$ et $0! = 2^0 0! = 1$, il vient

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^n n!},$$

et on utilise ensuite la croissante de la fonction $\ln$ pour retrouver le résultat.

2.2 Soit $t \in \mathbb{R}$, comme $\exp$ est strictement croissante et $\lambda > 0$, $(S_k \geqslant t) = (\lambda S_k \geqslant \lambda t) = (e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda t})$ d'où l'égalité des probabilités $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda t})$. Comme $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} U_i$, S_k admet une espérance finie par somme et, par mutuelle indépendance de $U_1, \cdots, U_k$, $\mathbb{E}[e^{\lambda S_k}] = \prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}[e^{\lambda U_i}] = \prod\limits_{i=1}^{k} e^{\varphi(\lambda)} = e^{k\varphi(\lambda)}$ puisque les U_i suivent la même loi que U_1. Comme $e^{\lambda S_k}$ est positive et admet une espérance finie, d'après l'inégalité de Markov, comme $e^{\lambda t} > 0$, comme attendu, $\boxed{\mathbb{P}(S_k \geqslant t) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda t}) \leqslant \dfrac{E[e^{\lambda S_k}]}{e^{\lambda t}} = \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t).}$

$\boxed{2.3}$ Soit $t > 0$, la majoration de la question précédente est d'autant plus intéressante que le majorant est petit, en les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquelles $k\varphi(\lambda) - \lambda t$ est minimale. Or $k\varphi(\lambda) - \lambda t \leqslant k\dfrac{\lambda^2}{2} - \lambda t = \theta(\lambda)$ d'après la question 2.1 et $\theta'(\lambda) = k\lambda - t$. θ est donc minimale pour $\lambda = \dfrac{t}{k} > 0$ en lequel $\theta\Big(\dfrac{t}{k}\Big) = -\dfrac{t^2}{2k}$. D'après 2.2, en prenant $\lambda = \dfrac{t}{k}$, on trouve donc l'inégalité de HOEFFDING, $\boxed{\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{t^2}{2k}\Big).}$

Bien sûr, étudier le minimum de la fonction $\alpha : \lambda \mapsto k\varphi(\lambda) - \lambda t = k\ln(\mathrm{ch}(\lambda)) - \lambda t = k\ln\Big(\mathrm{ch}(\lambda)e^{\frac{-\lambda t}{k}}\Big)$ serait plus précis mais le majorant n'aurait pas une expression aussi simple. En effet, $\alpha'(\lambda) = k\,\mathrm{th}(\lambda) - t$ donc, comme th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$, on considère trois cas :

- si $t \geqslant k$, α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et, comme $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathrm{ch}(\lambda)e^{\frac{-\lambda t}{k}} = -\infty$ car $\mathrm{ch}(\lambda) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^\lambda}{2}$ donc $\mathrm{ch}(\lambda)e^{\frac{-\lambda t}{k}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\exp\Big(\Big(1-\frac{t}{k}\Big)\Big)$. En faisant tendre λ vers $+\infty$ dans la majoration précédente, on obtient $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant 0$ donc $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) = 0$ ce qui est évident puisque $S_k(\Omega) \subset [\![-k;k]\!]$.
- si $t < k$, α est minimale en λ_0 tel que $k\,\mathrm{th}(\lambda_0) = t$, c'est-à-dire en $\lambda_0 = \mathrm{Argth}\Big(\dfrac{t}{k}\Big) = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{k+t}{k-t}\Big)$. Ainsi, grâce à 2.2, $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda_0) - \lambda_0 t) = \Big(1-\dfrac{t}{k}\Big)^{\frac{t-k}{2}}\Big(1+\dfrac{t}{k}\Big)^{\frac{-t-k}{2}}$ (après calculs).

$\boxed{2.4}$ Comme C suit une loi uniforme, toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ ont la même probabilité $\lambda > 0$ d'être image de $\omega \in \Omega$ par C. Ainsi, C est surjective et card $(C(\Omega))$ = card $(\mathcal{M}_n(\{-1,1\})) = 2^{n^2}$. On peut résumer :

- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $\mathbb{P}(C = M) = \dfrac{1}{2^{n^2}} = \lambda$.
- Pour $E \subset \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $(C \in E) = \bigcup\limits_{M\in E}(C = M)$ (disjoints) donc $\mathbb{P}(C \in E) = \sum\limits_{M\in E}\mathbb{P}(C = M) = \dfrac{\text{card}(E)}{2^{n^2}}$.

Il est clair que chacune des variables aléatoires $x_i y_j C_{i,j}$ est à valeurs dans $\{-1,1\}$ car $\{-1,1\}$ est stable par produit. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, comme les évènements $(x_i y_j C_{i,j} = 1)$ et $(C_{i,j} = x_i y_j)$ sont égaux, on a

$$\mathbb{P}(x_i y_j C_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(C_{i,j} = x_i y_j).$$

Or, $E_{i,j} = \{C \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\}) \mid C_{i,j} = x_i y_j\}$ est une partie de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ de cardinal 2^{n^2-1} car pour chacune des n^2-1 cases différentes de la case (i,j), on a le choix (indépendant) de ± 1 dans celle-ci. Ainsi,

$$\mathbb{P}(x_i y_j C_{i,j} = 1) = \frac{\text{card}(E_{i,j})}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(x_i y_j C_{i,j} = -1) = 1 - \mathbb{P}(x_i y_j C_{i,j} = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{les variables aléatoires } x_i y_j C_{i,j} \text{ suivent donc bien la loi uniforme sur } \{-1,1\}.}$

• Pour $k \in [\![1;n^2]\!]$ et toute famille des cases $(i_p,j_p)_{1\leqslant p\leqslant k} \in ([\![1;n]\!]^2)^k$ formée d'éléments distincts et toute famille correspondante $(\alpha_p)_{1\leqslant p\leqslant k} \in \{-1,1\}^k$, on a

$$\prod_{p=1}^{k}\mathbb{P}(x_{i_p} y_{j_p} C_{i_p,j_p} = \alpha_p) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$$

d'une part, et

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{p=1}^{k}(x_{i_p}y_{j_p}C_{i_p,j_p}=\alpha_p)\Big)=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{p=1}^{k}(C_{i_p,j_p}=\alpha_p x_{i_p}y_{j_p})\Big)=\mathbb{P}(C\in E_k)=\frac{2^{n^2-k}}{2^{n^2}}=\frac{1}{2^k}$$

d'autre part car $E_k=\{C\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\})\mid\forall p\in[\![1;k]\!],\ C_{i_p,j_p}=\alpha_p x_{i_p}y_{j_p}\}$ est de cardinal 2^{n^2-k} (car cela correspond au choix d'un ±1 dans chacune des n^2-k cases qui ne sont pas les $(i_p,j_p)_{1\leqslant p\leqslant k}\in([\![1;n]\!]^2)^k$).
On a donc bien, pour tous ces choix de paramètres,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{p=1}^{k}(x_{i_p}y_{j_p}C_{i_p,j_p}=\alpha_p)\Big)=\prod_{p=1}^{k}\mathbb{P}(x_{i_p}y_{j_p}C_{i_p,j_p}=\alpha_p)$$

ce qui est la définition de $\boxed{\text{l'indépendance mutuelle de la famille des variables aléatoires } (x_iy_jC_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.}$

2.5 • Remarquons déjà que l'inégalité montrée en 2.3 est encore valable pour $t=0$, car $\mathbb{P}(S_k\geqslant 0)\leqslant 1$ est clair.
• Pour tout $t\geqslant 0$, pour tout $\omega\in\Omega$, on a

$$M(C(\omega))\geqslant tn^{3/2}\iff(\exists(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2,\ {}^tXC(\omega)Y\geqslant tn^{3/2},$$

ce qui se traduit au niveau des évènements par

$$(M(C)\geqslant tn^{3/2})=\bigcup_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2}({}^tXCY\geqslant tn^{3/2}).$$

Par suite, par la propriété de sous-additivité (il n'y a aucun raison que ces évènements soient incompatibles),

$$\mathbb{P}(M(C)\geqslant tn^{3/2})\leqslant\sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2}\mathbb{P}({}^tXCY\geqslant tn^{3/2}).$$

• Or, pour $(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2$ fixé, ${}^tXCY=\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}x_iy_jC_{i,j}$, où les variables $(x_iy_jC_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes mutuellement et de loi uniforme d'après la question 2.4. Par conséquent, d'après l'inégalité de Hoeffding, puisque $tn^{3/2}\geqslant 0$, on obtient la majoration

$$\mathbb{P}({}^tXCY\geqslant tn^{3/2})=\mathbb{P}\Big(\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}x_iy_jC_{i,j}\geqslant tn^{3/2}\Big)\leqslant\exp\Big(-\frac{(tn^{3/2})^2}{2n^2}\Big)=\exp\Big(-\frac{t^2n}{2}\Big).$$

• En ré-injectant ce résultat dans l'inégalité obtenue ci-dessus, on obtient :

$$\mathbb{P}(M(C)\geqslant tn^{3/2})\leqslant\sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2}\mathbb{P}({}^tXCY\geqslant tn^{3/2})\leqslant\sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2}\exp\Big(-\frac{t^2n}{2}\Big)=2^{2n}\exp\Big(-\frac{t^2n}{2}\Big)$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(M(C)\geqslant tn^{3/2})\leqslant\exp\Big(2n\ln(2)-\frac{t^2n}{2}\Big)=\exp\Big(-\Big(\frac{t^2}{2}-2\ln 2\Big)n\Big)}$ comme attendu.

2.6 Suivons l'indication : soit un réel $\varepsilon>0$, posons $t=2\sqrt{\ln(2)}+\varepsilon>0$, alors grâce à la question précédente :

$$\mathbb{P}\big(M(C)\geqslant tn^{3/2}\big)\leqslant\exp\Big(-\Big(\frac{(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)^2}{2}-2\ln 2\Big)n\Big)=\exp\Big(-\Big(2\varepsilon\sqrt{\ln 2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\Big)n\Big)<1$$

car $-2\varepsilon\sqrt{\ln 2}-\dfrac{\varepsilon^2}{2}<0$. On en déduit que $\mathbb{P}\big(M(C)<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}\big)=1-\mathbb{P}\big(M(C)\geqslant tn^{3/2}\big)>0$ ce qui montre que l'événement $\big(M(C)<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}\big)$ n'est pas vide.

Il existe donc $\omega\in\Omega$ tel que $M(C(\omega))<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}$. En notant $A=C(\omega)$, on a donc $A\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $M(A)<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}$. Par définition de $\underline{M}(n)$, on a donc $\underline{M}(n)\leqslant M(A)<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon>0$, en faisant tendre ε vers 0 dans cette inégalité stricte, on obtient l'inégalité large souhaitée, à savoir $\boxed{\underline{M}(n)\leqslant 2\sqrt{\ln 2}\,n^{3/2}.}$

PARTIE 3 : MINORATION

3.1 Pour $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $Y=(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\{-1,1\}^n$ fixés, on a pour tout $X\in\{-1,1\}^n$ noté $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et en notant $V=AY=(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $v_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}y_j$ par définition du produit matriciel,

$$^t XAY=(X|AY)=(X|V)=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i \quad\text{donc}\quad ^t XAY\leqslant|^t XAY|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|v_i|$$

par inégalité triangulaire et car $|x_i|=1$ par définition. Ainsi, la quantité $M=\sum\limits_{i=1}^{n}|v_i|$ est un majorant de l'ensemble fini $E_Y=\{^t XAY\mid X\in\{-1,1\}^n\}$. De plus, en définissant le vecteur $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ par $x_i=1$ si $v_i\geqslant 0$ et $x_i=-1$ si $v_i<0$, on a par construction $X\in\{-1,1\}^n$ et $\forall i\in[\![1;n]\!]$, $x_iv_i=|v_i|$ ce qui montre que $M=\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iz_i={}^t XAY\in E_Y$. Par conséquent, M est un élément de E_Y qui majore E_Y : c'est donc le maximum de E_Y d'où, par définition de $g_A(Y)$, $\boxed{g_A(Y)=\mathrm{Max}(E_Y)=M=\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|=\sum\limits_{i=1}^{n}\Big|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}y_j\Big|.}$

3.2 Soit $i\in[\![1;n]\!]$ fixé. Comme à la question 2.4 en remplaçant $\mathbb{R}^{n^2}$ par $\mathbb{R}^n$, on montre que puisque Z est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}^n$, alors $(Z_1,\cdots,Z_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Comme la famille $(a_{i,1},\cdots,a_{n,1})$ ne contient que des ±1, d'après le cours, $(a_{i,1}Z_1,\cdots,a_{n,1}Z_n)$ est aussi une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ (car $-Z_i$ a la même loi que Z_i).

En posant, pour $j\in[\![1;n]\!]$, $B_j=\dfrac{1+a_{i,j}Z_j}{2}$, alors $B_j(\Omega)=\{0,1\}$, puis $\mathbb{P}(B_j=0)=\mathbb{P}(a_{i,j}Z_j=-1)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B_j=1)=\mathbb{P}(a_{i,j}Z_j=1)=\dfrac{1}{2}$ donc B_j est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Encore une fois, $(B_1,\cdots,B_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ donc, d'après le cours, $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}B_j$ est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,1/2)$. Or, en posant $T_n=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}Z_j$, comme $a_{i,j}Z_j=2B_j-1$, on a $T_n=2S_n-n$ donc, puisque $S_n(\Omega)=[\![0;n]\!]$, il vient $T_n(\Omega)=\{-n,-n+2,\cdots,n-2,n\}$. Comme T_n est finie, elle admet une espérance finie qui, par le théorème de transfert, en notant $h:k\mapsto|2k-n|$, vaut

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}Z_j\right|\right]=\mathbb{E}[|2S_n-n|]=\mathbb{E}[h(S_n)]=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)|2k-n|$$

ce qui, en se souvenant de la loi binomiale, $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$, devient

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j\right|\right] = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|2k-n| = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|.$$

Enfin, $g_A(Z) = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j\right|$ d'après la question 3.1 donc la variable aléatoire $g_A(Z)$ admet une espérance finie comme somme finie de variables aléatoires admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance, on a $\boxed{\mathbb{E}[g_A(Z)] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j\right|\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|\right) = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|}$ car, dans la somme, ces espérances $\mathbb{E}\Big[\big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j\big|\Big]$ ne dépendant pas de i.

3.3 *Simplification de* $\mathbb{E}[g_A(Z)]$

3.3.1 Montrons par récurrence que, pour $m \in [\![0; n-1]\!]$, on a $\sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{m}$ $(\mathcal{H}_m)$.

- Pour $m = 0$, $\sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k} = (n-0)\binom{n}{0} = n = n\binom{n-1}{0}$ donc $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.
- Soit $m \in [\![0; n-2]\!]$ tel que $\mathcal{H}_m$ est vraie. Alors

$$\sum_{k=0}^{m+1}(n-2k)\binom{n}{k} = \left(\sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k}\right) + (n-2(m+1))\binom{n}{m+1} = n\binom{n-1}{m} + (n-2m-2)\binom{n}{m+1}$$

par hypothèse de récurrence donc, en revenant aux factorielles,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1}(n-2k)\binom{n}{k} &= n\frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + (n-2m-2)\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}\\ &= (m+1)\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} + (n-2m-2)\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}\end{aligned}$$

qui se simplifie en

$$\sum_{k=0}^{m+1}(n-2k)\binom{n}{k} = (n-m-1)\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = n\frac{(n-1)!}{(m+1)!(n-m-2)!} = n\binom{n-1}{m+1}$$

et on a bien prouvé que $\mathcal{H}_{m+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a bien $\boxed{\forall m \in [\![0; n-1]\!],\ \sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{m}.}$

3.3.2 Séparons les cas n pair et n impair :

- Si n est pair qu'on écrit $n = 2p$, alors $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor = p$ et, d'après la question 3.2, on a

$$\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}|n-2k| + \frac{n}{2^n}\sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|$$

en découpant en deux compte tenu de la valeur absolue. Ainsi, comme $n-p-1=p-1$,

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}[g_A(Z)] & = & \dfrac{n}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k)+\dfrac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{n-p-1}\binom{n}{n-j}|2j-n| & \text{en posant } j=n-k \Longleftrightarrow k=n-j, \\
& = & \dfrac{n}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k)+\dfrac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}(n-2j) & \text{car si } j\leqslant p-1, \text{ alors } 2j-n\leqslant 0, \\
& = & \dfrac{n}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}(n-2k)+\dfrac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}(n-2j) & \text{car } n-2p=0, \\
& = & 2\dfrac{n}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}(n-2k) & \text{car } j \text{ est une variable muette} \\
& = & \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{p} & \text{avec 3.3.1 et } m=\lfloor \frac{n}{2}\rfloor-1=p-1. \\
& = & \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}. &
\end{array}$$

• Si n est impair qu'on écrit $n=2p+1$, alors $\left\lfloor \dfrac{n}{2}\right\rfloor=p$ et, toujours avec 3.2, comme $n-p-1=p$,

$$\begin{array}{rcll}
E[g_A(Z)] & = & \dfrac{n}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}|n-2k|+\dfrac{n}{2^n}\sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| & \text{en coupant en deux} \\
& = & \dfrac{n}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k)+\dfrac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{n-p-1}\binom{n}{n-j}|2j-n| & \text{en posant } j=n-k \Longleftrightarrow k=n-j, \\
& = & \dfrac{n}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k)+\dfrac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{p}\binom{n}{j}(n-2j) & \text{car si } j\leqslant n-p-1, \text{ alors } 2j-n\leqslant 0, \\
& = & 2\dfrac{n}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k) & \text{car } j \text{ est une variable muette} \\
& = & \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{p} & \text{avec 3.3.1 et } m=\lfloor n/2\rfloor=p. \\
& = & \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}. &
\end{array}$$

Dans les deux cas, comme souhaité, on a bien $\boxed{\mathbb{E}[g_A(Z)]=\dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}.}$

On pouvait plus simplement dire que, puisque si $n=2k$, on a $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}|2k-n|=0$, alors, et dans tous les cas pour la parité de n, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|=\sum_{2k\leqslant n}\binom{n}{k}(n-2k)+\sum_{2k\geqslant n}\binom{n}{k}(2k-n)$$

ce qui, en posant $j=n-k$ dans la seconde somme, donne

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|=\sum_{2k\leqslant n}\binom{n}{k}(n-2k)+\sum_{2j\leqslant n}\binom{n}{n-j}(n-2j)$$

puis, puisque $\dbinom{n}{n-j}=\dbinom{n}{j}$ et que j est une variable muette, grâce à la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|=2\sum_{2k\leqslant n}\binom{n}{k}(n-2k)=2n\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$$

3.4 *Minoration de* $\underline{M}(n)$

3.4.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, alors comme $M(A) = \mathrm{Max}(\{g_A(Y) \mid Y \in \{-1,1\}^n\})$ d'après l'énoncé, la variable aléatoire $g_A(Z)$ vérifie $g_A(Z) \leqslant M(A)$. En passant à l'espérance, on trouve $\mathbb{E}[g_A(Z)] \leqslant \mathbb{E}[M(A)] = M(A)$ car l'espérance d'une variable aléatoire constante vaut cette constante. D'après la question précédente, on en déduit donc que $M(A) \geqslant \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ainsi, cette constante majore toutes les valeurs de $M(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ donc, par définition $\boxed{\underline{M}(n) = \mathrm{Min}\{M(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\}) \geqslant \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$ car le minimum est le plus grand des minorants d'une partie.

3.4.2 On pose $a_n = \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Cette quantité $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ nous fait considérer deux cas :

• Si n est pair, on l'écrit $n = 2p$, $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = p$ et $a_n = a_{2p} = \dfrac{4p^2}{2^{2p-1}}\dbinom{2p-1}{p} = \dfrac{4p^2}{2^{2p-1}}\dfrac{(2p-1)!}{p!(p-1)!} = \dfrac{4p^2}{2^{2p}}\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}$ donc, avec la formule de Stirling et quand p tend vers $+\infty$, n tend vers $+\infty$ en étant pair :

$$a_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4p^2}{2^{2p}} \frac{\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}e^{2p}}{(2\pi p)p^{2p}e^{2p}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4p^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$$

après les simplifications habituelles.

• Si n est impair, on l'écrit $n = 2p+1$ et $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = p$ donc $a_n = a_{2p+1} = \dfrac{(2p+1)^2}{2^{2p}}\dbinom{2p}{p} = \dfrac{(2p+1)^2}{2^{2p}}\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}$ ce qui donne à nouveau, comme $(2p+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} 4p^2$, $a_{2p+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4p^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$.

Si on résume les deux renseignements précédents, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{a_{2p}}{(2p)^{3/2}} = \dfrac{4}{2^{3/2}\sqrt{\pi}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ et, comme $(2p+1)^{3/2} \underset{+\infty}{\sim} 2^{3/2}p^{3/2}$, $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{a_{2p+1}}{(2p+1)^{3/2}} = \dfrac{4}{2^{3/2}\sqrt{\pi}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. Comme une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers ℓ si et seulement si les deux suites $(u_{2p})_{p\geqslant 1}$ et $(u_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ tendent vers ℓ, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n^{3/2}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} = C$ ce qui se traduit directement par $\boxed{a_n = \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}n^{3/2} = Cn^{3/2}.}$

Par un calcul simple, on montre que $a_{2n+1} = \dfrac{(2n+1)^2}{(2n)^2}a_{2n}$ donc $a_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} a_{2n}$. Or $(2n+1)^{3/2} \underset{+\infty}{\sim} (2n)^{3/2}$, donc il suffit de montrer l'équivalence précédente dans le cas pair ou dans le cas impair pour conclure.

L'équivalent trouvé de ce minorant de $\underline{M}(n)$ est (heureusement) inférieur au majorant trouvé dans la partie 2. Comme $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sim 0,798$ et $2\sqrt{\ln 2} \sim 1,665$, on trouve en gros un facteur 2 entre ces deux quantités. Mais surtout, on a le bon ordre de grandeur pour $\underline{M}(n)$ qui tend vers $+\infty$ "comme" $n^{3/2}$ et il y a fort à parier qu'il existe une constante $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \leqslant \alpha \leqslant 2\sqrt{\ln 2}$ telle que $\underline{M}(n) \underset{+\infty}{\sim} \alpha\, n^{3/2}$.