L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comporte un seul problème dont les 3 parties sont indépendantes. Le résultat démontré dans la partie I est seulement utilisé dans la partie III.

Quelques applications de la formule de Stirling

(Inspiré de Centrale PSI 2023 maths 2)

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

I Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

Pour cela, on introduit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \frac{n+2}{(n+3)(n+4)},$$

et la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\alpha_n x^n$ dont on notera la somme $S(x)$, lorsque la série entière est convergente, et D_S l'ensemble de définition de la fonction S :

$$\forall x \in D_S, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\alpha_n x^n.$$

1. Domaine de définition de S.

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\alpha_n x^n$.

b) Vérifier que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire le domaine de définition D_S de S.

2. Régularité de S sur $[0,1]$.

a) Montrer que S est continue sur le segment $[0,1]$.

b) Déterminer une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in [0,1[, \quad xS'(x) + 5S(x) - \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\beta_n x^n.$$

c) La fonction S est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$?

3. Valeur de S.

a) Déterminer deux constantes a et b telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \dfrac{a}{n+3} + \dfrac{b}{n+4}$.

b) En déduire la valeur de $x^3S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles sur $]0,1[$.

4. Une suite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

a) Justifier l'existence, pour $n \geqslant 1$, de R_n. Quelle est la limite de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}$.

c) En déduire le développement

$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On admettra que l'on peut démontrer de même que, si $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, alors

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

5. Application à la formule de Stirling

On introduit les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}} \quad v_n = \ln(u_n) \quad \text{et} \quad w_n = v_{n+1} - v_n$$

a) En utilisant l'équivalent de Stirling de $n!$, déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

b) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de w_n en fonction de n et de $S\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) Déduire de l'étude de S qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| v_{n+1} - v_n + \frac{1}{12n^2} \right| \leqslant \frac{C}{n^3}$$

d) Conclure.

II Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.
Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in]0,1[\text{ et } q = 1 - p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.
L'abscisse S_n du point à l'issue du n-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geqslant 2$, quel que soit l'entier k compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.
On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.
On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (ie $S_k = 0$) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (ie $k = 2n$).
On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = P(S_{2n} = 0) \quad \text{et} \quad b_n = P\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\big)$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

II.A –

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.

2. Écrire une fonction Python `nombreRetours(n:int,p:float)->int` qui prend en argument le nombre n de lancers et le paramètre $p \in]0,1[$ et qui renvoie le nombre de retours du point à l'origine.

On pourra utiliser la fonction Python `random.random()` qui renvoie un nombre flottant pseudo-aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

4. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.

5. Pour quelles valeurs de p l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$?

6. En utilisant le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

II.B –

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $(S_{2n} = 0)$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

2. En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de x elle est valable.

3. Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ pour x dans un intervalle à préciser.

4. Pour quelles valeurs de p l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?

II.C –
En déduire que la probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p - q|$.

III Loi de l'arcsinus

Dans cette partie, on reprend les notations de la partie II et on se place dans le cas particulier $p = q = 1/2$.
Dans ce cas tous les « chemins » de la marche aléatoire sont équiprobables : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

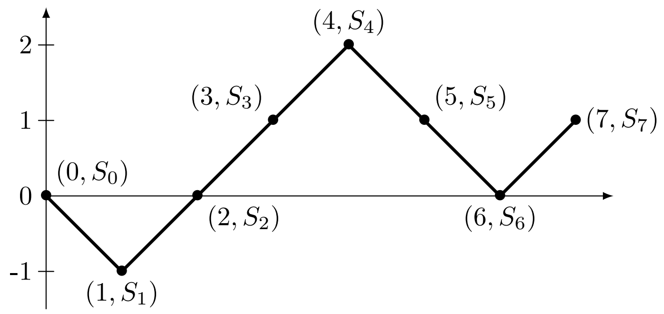
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad P\big([S_1 = x_1] \cap [S_2 = x_1 + x_2] \cap \cdots \cap [S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n]\big) = \frac{1}{2^n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse désormais au moment de la *dernière visite* en 0 de la marche aléatoire au cours des $2n$ premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire T_n définie par

$$T_n = \max\{0 \leqslant k \leqslant 2n \mid S_k = 0\}.$$

On admet dans la suite que T_n est une variable aléatoire discrète, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

III.A – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *chemin de longueur n* toute ligne polygonale reliant les points $(0, S_0)$, $(1, S_1)$, ..., (n, S_n).



Un chemin de longueur 7

Dans cette sous-partie III.A, n, x et y sont des entiers naturels tels que $n > 0$, $x > 0$ et $y > 0$.

1. On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0, 0)$ au point (n, x).

a) Vérifier que si $x \in [\![-n, n]\!]$ et $n - x$ est un entier pair alors

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \quad \text{où} \quad a = \frac{n+x}{2}$$

et que $N_{n,x} = 0$ dans le cas contraire.

b) En déduire $P(S_n = x)$.

c) Retrouver ce résultat à l'aide d'une variable aléatoire bien choisie.

2. Principe de réflexion
Montrer que le nombre de chemins reliant $(0, x)$ à (n, y), tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à (n, y).

3. a) En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à (n, x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}.$$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$P\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]\big) = \frac{1}{2}\Big(P(S_{2n-1} = 2k-1) - P(S_{2n-1} = 2k+1)\Big).$$

c) En remarquant que $[S_{2n} > 0] = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [S_{2n} = 2k]$, démontrer que

$$P\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]\big) = \frac{1}{2} P(S_{2n} = 0)$$

puis que

$$P\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]\big) = P(S_{2n} = 0).$$

III.B – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(T_{2n} = 2k) = P(S_{2k} = 0) \times P\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]\big).$$

2. En déduire que, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}.$$

III.C – Dans cette sous-partie III.C, α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$.

1. On définit la fonction f par $f(t) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } t \in [0, \alpha[\\ \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in [\alpha, \beta] \\ f(\beta) & \text{si } t \in]\beta, 1]. \end{cases}$

En utilisant des sommes de Riemann adaptées à f, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\, \mathrm{d}t.$$

2. À l'aide de la partie I, justifier qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers 1 telle que

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{8n}\right).$$

3. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right) = 0.$$

4. Montrer alors que

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha})\right).$$

Ce résultat a des conséquences assez surprenantes au premier abord. Par exemple $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\dfrac{T_{2n}}{2n} \leqslant \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ *s'interprète ainsi : si deux personnes parient chacune un euro chaque jour de l'année à un jeu de hasard équilibré, alors avec la probabilité* $\dfrac{1}{2}$*, un des deux joueurs sera en tête du premier juillet au 31 décembre.*