# DS 6.1 : extrait de X-ENS 2022 MP Maths B

**PSI 1 2024/2025** **samedi 15 février 2025**

*On appelle fonction cotangente la fonction* $\operatorname{cotan} : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \operatorname{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

*Pour tout entier* $k \geqslant 2$, *on pose* $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

## PARTIE 1 : DÉVELOPPEMENT EULÉRIEN

*Soit les fonctions* $f, g$ *et* $D$ *définies sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)},$$
$$g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) \text{et}$$
$$D(x) = f(x) - g(x).$$

**1.1** *Propriétés*

**1.1.1** Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, justifier que la série définissant $g(x)$ est convergente.

**1.1.2** Montrer que les fonctions $g$ et $D$ sont impaires.

**1.1.3** Montrer que les fonctions $g$ et $D$ sont périodiques de période $1$.

**1.1.4** Montrer que les fonctions $g$ et $D$ sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

**1.2** *Équations fonctionnelles*

**1.2.1** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2f(x).$$

**1.2.2** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2g(x).$$

**1.3** *Le développement*

**1.3.1** Montrer que la fonction $D$ se prolonge par continuité en une fonction $\widetilde{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{D}(0) = 0$.

**1.3.2** Justifier l'existence de $\alpha \in [0;1]$ tel que $\widetilde{D}(\alpha) = M$ où $M = \operatorname*{Sup}_{t \in [0;1]} \widetilde{D}(t)$.

**1.3.3** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$.

**1.3.4** En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}.$$

# PARTIE 2 : BERNOULLI ET EULER

*On rappelle que pour une famille* $(a_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ *de réels positifs, on a la formule de* FUBINI

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{i,j}\right)\in[0;+\infty].$$

**2.1** *Développement en série entière*

**2.1.1** Montrer que, si $x\in]-2\pi;2\pi[$, la famille $\left(\left(\dfrac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

**2.1.2** Montrer que

$$\forall x\in]-2\pi;2\pi[\setminus\{0\},\ \frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k}.$$

**2.1.3** En déduire que

$$\forall x\in]-2\pi;2\pi[\setminus\{0\},\ \frac{ix}{e^{ix}-1}=1-\frac{ix}{2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}.$$

*Soit la fonction* $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par* $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \textit{si } x\neq 0,\\ 1 & \textit{si } x=0.\end{cases}$

**2.1.4** Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<2\pi$, on a

$$z=\left(e^z-1\right)\times\left(1-\frac{z}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}z^{2k}\right).$$

**2.2** *Calcul des valeurs de* $\zeta$ *en les nombres pairs en fonction des nombres de* BERNOULLI

**2.2.1** Montrer que la fonction $h$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$h^{(2n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\zeta(2n).$$

*On définit la suite des nombres de* BERNOULLI $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $b_0=1,\ b_1=-\dfrac{1}{2}$ *et*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_{2n+1}=0\quad\text{et}\quad b_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!\zeta(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

**2.2.2** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!(n+1-k)!}=\begin{cases}1 & \text{si } n=0,\\ 0 & \text{si } n\geqslant 1.\end{cases}$$

**2.2.3** Calculer $b_2$, $b_4$ et $b_6$ et en déduire $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

**2.3** Que vaut le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}b_nz^n$ ?

# DS 6.2 : extrait de X-ENS 2018 PC

**PSI 1 2024/2025** **samedi 15 février 2025**

Ce sujet s'intéresse aux matrices carrées de taille $n$ dont tous les coefficients sont égaux à $1$ ou à $-1$, et en particulier à la différence maximale entre le nombre de $1$ et le nombre de $-1$ que l'on peut obtenir, si l'on autorise à multiplier certaines lignes et colonnes d'une telle matrice par $-1$.

La partie 1 s'intéresse à quelques cas particuliers.

La partie 2 montre que pour certaines matrices, cette différence maximale est beaucoup plus petite que $n^2$.

La partie 3 propose au contraire un minorant à cette différence maximale.

**Notations** *:*

*On identifiera l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *à l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *des matrices colonnes à* $n$ *coordonnées.*

*En particulier, l'espace vectoriel des nombres réels est identifié à* $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$*.*

*On étend les notations précédentes aux parties de* $\mathbb{R}$ *: si* $K$ *est une partie de* $\mathbb{R}$*, on notera par exemple* $\mathcal{M}_{n,k}(K)$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ *constitué des matrices dont les coefficients sont à valeurs dans* $K$*.*

*Le sujet s'intéresse tout particulièrement à* $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$*, l'ensemble des matrices carrées de taille* $n$ *dont tous les coefficients sont égaux à* $1$ *ou à* $-1$*.*

*Si* $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$*, on notera :*

$$S(A) = \{{}^tXAY \mid (X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2\} \quad \text{et} \quad M(A) = \mathrm{Max}(S(A)).$$

*Pour* $n \geqslant 1$*, on notera également*

$$\underline{M}(n) = \mathrm{Min}(\{M(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\}).$$

*Dans tout le sujet,* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires intervenant dans les parties 2 et 3.*

*On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent être construites sur cet espace.*

## PARTIE 1 : CAS PARTICULIERS

**1.1** Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ ? Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**1.2** Montrer que pour toute matrice $A$ dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, l'ensemble $S(A)$ est inclus dans $\{-n^2, \cdots, n^2\}$. Montrer que l'inclusion est stricte, et montrer que $S(A)$ est un ensemble symétrique par rapport à $0$.

**1.3** Soit $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. On suppose qu'il existe des matrices diagonales $C$ et $D$ ne contenant que des $1$ et des $-1$ sur la diagonale, telles que $B = CAD$. Montrer que $S(A) = S(B)$.

**1.4** Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $S(I)$ et $S(J)$, et en déduire la valeur de $S(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\{-1,1\})$.

**1.5** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) $n^2 \in S(A)$.
(ii) Il existe $X$ et $Y$ dans $\{-1,1\}^n$ tels que $A = X\,{}^tY$.
(iii) $A$ est de rang $1$.

**1.6** En déduire la proportion, parmi les matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, des matrices $A$ qui vérifient $n^2 \in S(A)$.

## PARTIE 2 : MAJORATION

*Soit* $k$ *un entier strictement positif et* $U_1, \dots, U_k$ *une suite de* $k$ *variables aléatoires à valeurs dans* $\{-1, 1\}$, *mutuellement indépendantes et de loi uniforme. On note également* $S_k = \sum_{i=1}^{k} U_i$.

**2.1** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(\lambda) = \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}])$. Établir que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$.

**2.2** Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a l'inégalité $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t)$.

**2.3** En déduire l'inégalité de HOEFFDING pour $S_k$ : pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right)$.

*On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme* $C : \Omega \mapsto \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$.
*Pour* $\omega \in \Omega$, *on note* $C_{i,j}(\omega)$ *le coefficient en case* $(i, j)$ *de la matrice* $C(\omega)$.

**2.4** Soit $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ deux vecteurs quelconques dans $\{-1, 1\}^n$.

Montrer que $(x_i y_j C_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une famille de $n^2$ variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes et de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

**2.5** Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}\big(M(C) \geqslant t n^{3/2}\big) \leqslant \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2\ln 2\right)n\right)$.

**2.6** Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\underline{M}(n) \leqslant 2\sqrt{\ln 2}\, n^{3/2}$. Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ telle que $M(A) < (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon) n^{3/2}$.

## PARTIE 3 : MINORATION

*Dans cette partie, on établit un minorant non trivial pour* $\underline{M}(n)$. *Pour* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ *et* $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \{-1, 1\}^n$, *on note* $g_A(Y) = \mathrm{Max}\left(\{{}^tXAY \mid X \in \{-1, 1\}^n\}\right)$.

*Soit aussi une variable aléatoire uniforme* $Z : \Omega \to \{-1, 1\}^n$. *Si* $\omega \in \Omega$, *on note* $Z(\omega) = (Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$.

**3.1** Avec les notations ci-dessus, montrer que $g_A(Y)$ peut se réécrire $g_A(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \right|$.

**3.2** Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\mathbb{E}\left[\ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Z_j \right|\ \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n - 2k|$.

En déduire que $\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n - 2k|$.

**3.3** *Simplification de* $\mathbb{E}[g_A(Z)]$

**3.3.1** Montrer que pour $m \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $\sum_{k=0}^{m} (n - 2k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{m}$.

**3.3.2** En déduire que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, on a $\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

**3.4** *Minoration de* $\underline{M}(n)$

**3.4.1** Montrer que $\underline{M}(n) \geqslant \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

**3.4.2** Montrer ensuite, à l'aide de la formule de STIRLING, que ce minorant est équivalent à $C\, n^{\alpha}$ en $+\infty$, pour des constantes $C$ et $\alpha > 0$ que l'on explicitera. Comparer au majorant de $\underline{M}(n)$ obtenu à la 2.6.