TD 19 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 14 février 2025**

19.1 **a.** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in E^2$, par linéarité du produit scalaire à gauche et à droite, on a bien la linéarité de f car $f(\lambda x+y) = (a|\lambda x+y)b - (b|\lambda x+y)a = \lambda(a|x)b + (a|y)b - \lambda(b|x)a - (b|y)a$ qui permet d'avoir la relation attendue, $f(\lambda x+y) = \lambda\big((a|x)b-(b|x)a\big) + \big((a|y)b-(b|y)a\big) = \lambda f(x)+f(y)$. Comme f va de E dans E puisque a et b sont deux vecteurs de E, f est un endomorphisme de E.

b. • Il est clair que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}(a,b)$ puisque si $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = (a|x)b-(b|x)a$.

- Si $n \geqslant 3$, on a donc $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rang}\,(f) \leqslant 2 = \dim\big(\mathrm{Vect}(a,b)\big) < 3$ (car (a,b) est libre donc une base du plan $\mathrm{Vect}(a,b)$). Ainsi, f n'est pas un automorphisme de E.

- Si $n = 2$ et $x \in E$, comme (a,b) est libre par hypothèse, on a $f(x) = 0_E \iff (a|x) = (b|x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \iff x \in (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp} = E^{\perp} = \{0_E\}$. Ainsi f est injective donc $f \in GL(E)$ (dimension finie).

Par conséquent, on a l'équivalence $f \in GL(E) \iff n = 2$.

• Pour $n \geqslant 2$, puisque (a,b) est libre, comme ci-dessus, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a,b)^{\perp}$ et $\mathrm{Vect}(a,b)$ sont stables par f donc dans une base $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_{n-2},a,b)$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Vect}(a,b)$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} -(a|b) & -||b||^2 \\ ||a||^2 & (a|b) \end{pmatrix}$ car $f(a) = -(a|b)a + ||a||^2 b$ et $f(b) = -||b||^2 a + (a|b)b$. Ainsi, $\chi_f = \chi_M = X^{n-2}\chi_A = X^{n-2}\big(X^2 + ||a||^2||b||^2 - (a|b)^2\big)$. Or, comme les vecteurs a et b ne sont pas colinéaires, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $||a||^2||b||^2 - (a|b)^2 > 0$. Il existe donc deux valeurs propres imaginaires pures non réelles de A et f n'est pas diagonalisable car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

C'était prévisible ! En effet, si $(x,y) \in E^2$, il vient $(f(x)|y) = \big((a|x)b - (b|x)a|y\big) = (a|x)(b|y) - (b|x)(a|y)$ alors que $(x|f(y)) = \big(x\big|(a|y)b - (b|y)a\big) = (a|y)(x|b) - (b|y)(x|a)$ donc on a bien $(f(x)|y) = -(x|f(y))$. Ainsi, f est antisymétrique donc son spectre complexe dans inclus dans $i\mathbb{R}$ ce qui montre que f ne peut être diagonalisable que si son spectre vaut $\{0\}$, c'est-à-dire si f est nilpotent.

On a donc l'équivalence, pour f antisymétrique, entre "f diagonalisable" et "$f = 0$".

19.2 **a.** Soit une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, on sait d'après le cours que $f \in O(E) \iff M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O(n)$. Ainsi, si on suppose $f \in O(E)$, on a $M^T M = I_n$ donc, en passant au déterminant : $\det(M)^2 = 1$ donc $\det(M) = \pm 1$. Or, par définition, $\det(f) = \det(M)$ donc $\det(f) = \pm 1$.

b. Si $\det(f) = -1$ et $\dim(E) = 2$, on sait d'après le cours que f est une réflexion (f est autoadjoint).

c. Si $\det(f) = 1$ et $\dim(E) = 3$, on sait que $f = \mathrm{id}_E$ ou que f est une "vraie" rotation de l'espace.

d. Le centre d'un groupe G est l'ensemble des éléments du groupe G qui commutent avec tous les autres, on le note traditionnellement $Z(G)$ (Z pour zentrum , centre en allemand).

<u>Cas $n = 1$</u> Dans ce cas, $\mathcal{L}(E)$ ne contient que des homothéties, $O(E) = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ et $SO(E) = \{\mathrm{id}_E\}$. Comme les homothéties commutent entre elles, deux isométries commutent aussi entre elles ce qui donne $Z(O(E)) = O(E) = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ et $Z(SO(E)) = SO(E) = \{\mathrm{id}_E\}$.

Cas $n \geqslant 2$ pour $Z(O(E))$ Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $u \in Z(O(E))$ une isométrie de E qui commute avec toutes les autres. Soit un vecteur unitaire a de E et s_a la réflexion d'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$ dont l'expression vectorielle est classiquement $s_a(x) = x - 2(x|a)a$. Comme $s_a \in O(E)$, on a donc $s_a \circ u = u \circ s_a$ et, en prenant la valeur en a, on trouve que $s_a(u(a)) = u(-a) = -u(a)$ par linéarité de u et car $s_a(a) = -a$ donc $u(a) \in \mathrm{Ker}(s_a + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(a)$. Comme u conserve la norme, implique que $u(a) = \pm a$. La matrice de u dans n'importe quelle base est donc diagonale avec des ± 1 sur la diagonale.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ (avec $\lambda_k = \pm 1$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$). Soit $s_{i,j}$ la réflexion qui échange e_i et e_j (pour $i \neq j$ et $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$), c'est-à-dire la réflexion d'hyperplan $H_{i,j} = \mathrm{Vect}(e_i - e_j)$ donnée par $s_{i,j}(x) = x - (x|e_i - e_j)(e_i - e_j)$ car $||e_i - e_j|| = \sqrt{2}$. Il vient $\lambda_j e_j = u(e_j) = u(s_{i,j}(e_i)) = s_{i,j}(u(e_i)) = s_{i,j}(\lambda_i e_i) = \lambda_i e_j$ donc $\lambda_i = \lambda_j$ car $e_j \neq 0_E$. On en déduit que la matrice D est une matrice de la forme λI_n avec $\lambda = \pm 1$ donc que $A = \pm I_n$ ce qui montre que $u = \pm \mathrm{id}_E$.

Réciproquement, $\pm \mathrm{id}_E$ commute avec tout endomorphisme de E donc $Z(O(E)) = \{-\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E\}$.

Cas $n = 2$ pour $Z(SO(E))$ Soit E un plan euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Comme $SO(2)$ est commutatif d'après le cours, en représentant toute isométrie par sa matrice dans $\mathcal{B}$, on constate que toutes les rotations ($u \in SO(E)$) du plan E commutent entre elles, ce qui donne $Z(SO(E)) = SO(E)$.

Cas $n \geqslant 3$ pour $Z(SO(E))$ Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 3$ et $u \in Z(SO(E))$. On se donne une base orthonormée de E noté $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n)$. Posons $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si $n = 2p+1$ est impair, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = A = \mathrm{diag}(1, R, \cdots, R)$ par blocs (avec p blocs R). Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et que $\det(A) = 1$ (par blocs), on sait que $v \in SO(E)$. De plus, $\chi_A = (X-1)(X^2+1)^p$ donc 1 est valeur propre simple de v et $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(a)$ (car v envoie e_2 sur e_3 et e_3 sur $-e_2$, etc...). Alors $v \circ u(e_1) = u \circ v(e_1)$ donc $v(u(e_1)) = u(e_1)$ ce qui montre que $u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1)$ puis que $u(e_1) = \pm e_1$. De même, $\forall j \in [\![1; n]\!]$, $u(e_j) = \pm e_j$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i = \pm 1$. Si $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, soit $v_{i,j} \in \mathcal{L}(E)$ telle $v_{i,j}(e_i) = e_j$, $v_{i,j}(e_j) = -e_i$ et $\forall k \notin \{i,j\}$, $v_{i,j}(e_k) = e_k$, alors $v \in SO(E)$ car elle transforme la base orthonormale directe $\mathcal{B}$ en une autre base orthonormale, ainsi $u(v_{i,j}(e_i)) = v_{i,j}(u(e_i))$ donne $u(e_j) = \lambda_j e_j = \lambda_i e_j = v_{i,j}(e_i)$ donc $\lambda_i = \lambda_j$. Ainsi, u est une homothétie et comme elle appartient à $SO(E)$ et que n est impair, on a forcément $g = \mathrm{id}_E$ (car $-\mathrm{id}_E$ est de déterminant -1).

- Si $n = 2p$ est pair, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = A = \mathrm{diag}(1, 1, R, \cdots, R)$ par blocs (avec $p-1$ blocs R). Alors comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et que $\det(A) = 1$ (par blocs), on sait que $v \in SO(E)$. De plus, $\chi_A = (X-1)^2(X^2+1)^{p-1}$ donc 1 est valeur propre double de v et $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ ($v(e_3) = e_4$, $v(e_4) = -e_3$, etc...). Comme $u(v(e_1) = v(u(e_1))$, on a $v(u(e_1)) = u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Par symétrie des rôles joués les vecteurs de $\mathcal{B}$, on a aussi $u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$. Par conséquent $u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \cap \mathrm{Vect}(e_1, e_3) = \mathrm{Vect}(e_1)$ donc $u(e_1) = \pm e_1$ car u est une isométrie. Comme pour le cas précédent, on montre que u est une homothétie donc que $u = \pm \mathrm{id}_E$ (cette fois-ci $-\mathrm{id}_E \in SO(E)$).

En conclusion :

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $Z(O(E)) = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ si E euclidien de dimension n.
- Pour $n = 2$, $Z(SO(E)) = SO(E)$ si E euclidien de dimension 2.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ impair, on a $Z(SO(E)) = \{\mathrm{id}_E\}$ si E euclidien de dimension n.
- Pour tout entier $n \geqslant 4$ pair, on a $Z(SO(E)) = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ si E euclidien de dimension n.

19.3 **a.** Comme par hypothèse $f \in GL(E)$, l'image d'une base de E par f est une base de E. Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base de E. De plus : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow \big(f(e_i)|f(e_j)\big) = (e_i|e_j) = 0$ donc $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale.

b. Si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ et $i \neq j$, on a $(e_i - e_j) \perp (e_i + e_j)$ donc, par propriétés du produit scalaire, il vient : $\big(f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j)\big) = 0 \Longrightarrow \big(f(e_i)|f(e_i)\big) = \big(f(e_j)|f(e_j)\big)$.
Ainsi : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ ||f(e_k)||^2 = ||f(e_1)||^2 = \alpha^2$ en posant $\alpha = ||f(e_1)|| > 0$.

c. On pose $g = \dfrac{1}{\alpha} f$.
Méthode 1 : D'après ce qui précède, g transforme la base orthonormale $\mathcal{B}$ est une autre base orthonormale $\left(\dfrac{1}{\alpha}f(e_1), \cdots, \dfrac{1}{\alpha}f(e_n)\right)$ donc $g \in O(E)$: g est une isométrie vectorielle de E.

Méthode 2 : soit $x \in E$ qu'on décompose $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, alors $||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale. De plus $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k f(e_k)$ donc $||f(x)||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 ||f(e_k)||^2$ car $\mathcal{B}'$ est orthogonale. Donc $||f(x)||^2 = \alpha^2 ||x||^2$ par **b.** et $||g(x)||^2 = ||x||^2$: g conserve la norme et $g \in O(E)$ encore une fois.

• Comme g est une isométrie, elle conserve le produit scalaire. Ainsi, si $(x,y) \in E^2$, on a $(g(x)|g(y)) = (x|y)$ de qui s'écrit $\left(\dfrac{f(x)}{\alpha}\Big|\dfrac{f(y)}{\alpha}\right) = (x|y)$ et, par bilinéarité du produit scalaire, on obtient $(f(x)|f(y)) = \alpha^2 (x|y)$.

On pouvait aussi obtenir ce résultat de manière directe :

• Si $(x,y) \in E^2$ et $||x|| = ||y|| = 1$, $(x+y) \perp (x-y)$ donc $\big(f(x+y)|f(x-y)\big) = 0 \Longleftrightarrow ||f(x)|| = ||f(y)||$ par hypothèse. Notons, d'après ce qui précède, $\alpha > 0$ la norme des images par f de tout vecteur unitaire de E. Par linéarité, si $x \neq 0_E$, $||f(x)|| = ||x|| \left|\left|f\left(\dfrac{x}{||x||}\right)\right|\right| = \alpha ||x||$ (vrai aussi pour $x = 0_E$). Par polarisation : $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = \dfrac{1}{4}\Big(||f(x)+f(y)||^2 + ||f(x)-f(y)||^2\Big) = \dfrac{\alpha^2}{4}\Big(||x+y||^2 + ||x-y||^2\Big) = \alpha^2 (x|y)$.

• Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, on a $A = \big((f(e_j)|e_i)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Posons $G = A^T A = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $c_{i,j} = \big(f(e_i)|f(e_j)\big)$ ($A^T A$ est la matrice de Gram associée à la famille $\mathcal{B}'$). Comme $\mathcal{B}'$ est orthogonale, $A^T A$ diagonale car $c_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. On a montré à la question **b.** que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ c_{k,k} = \alpha^2$ donc $A^T A = \alpha^2 I_n$. Ainsi : $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = X^T A^T A Y = \alpha^2 X^T Y = \alpha^2 (x|y)$ avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

19.4 **a.** Soit $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de la matrice M. Puisque M est une matrice orthogonale, $\mathcal{B} = (C_1, \cdots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Comme la base canonique $\mathcal{B}_0$ est aussi une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, on sait que, comme M est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, on a $m_{i,j} = (e_i|C_j)$. Par conséquent, $\Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\Big| = \Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (e_i|C_j)\Big| = \Big|\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(e_i\Big|\sum\limits_{j=1}^{n} C_j\Big)\Big| = \Big|\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i\Big|\sum\limits_{j=1}^{n} C_j\Big)\Big| = |(u|v)|$ en posant $u = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ et $v = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j$. Les deux vecteurs sont de norme $\sqrt{n}$ par PYTHAGORE. Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $|(u|v)| \leqslant ||u||\,||v|| = (\sqrt{n})^2 = n$ ainsi : $\Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\Big| \leqslant n \ \ (I_1)$.

Il y a égalité dans l'inégalité (I_1) si et seulement si u et v sont des vecteurs colinéaires. Or comme u et v ont même norme, ils sont colinéaires si et seulement si $v = \pm u$. De plus, $v = Mu$. On peut donc conclure que : il y a égalité dans (I_1) si et seulement si u est vecteur propre de M (associé à la valeur propre 1 ou -1).

b. Comme M est orthogonale, on a $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$ (car la norme de la j-ième colonne de la matrice M vaut 1) donc les coefficients $m_{i,j}$ sont dans l'intervalle $[-1;1]$ et il vient $|m_{i,j}| \geqslant m_{i,j}^2$. En sommant : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}| \geqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2 = \sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\Big) = \sum\limits_{j=1}^{n} 1 = n \ \ (I_2)$.

Il y a égalité dans (I_2) si et seulement s'il y a égalité dans les n^2 inégalités qu'on a sommé pour obtenir (I_2), c'est-à-dire si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $|m_{i,j}| = m_{i,j}^2$ ou encore si et seulement si M ne contient que des 0, des 1 ou des -1. Mais ceci ne peut se produire que s'il y a un seul ± 1 par ligne et par colonne. Il y a donc $2^n n!$ matrices pour lesquelles il y a égalité (choix des cases non nulles et des ± 1 pour ces n cases). On peut constater que cet ensemble de matrices constitue un sous-groupe de $O(n)$: c'est le groupe de l'hyper-cube en dimension n.

c. Pour $j \in [\![1;n]\!]$, on définit le nouveau vecteur $v_j = (|m_{1,j}|, \cdots, |m_{n,j}|)$ et toujours $u = (1, \cdots, 1)$. Alors $(u|v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} |m_{i,j}| \leqslant ||u||\,||v_j|| \leqslant \sqrt{n} \times 1 = \sqrt{n}$. Par conséquent : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}| = \sum\limits_{j=1}^{n} (u|v_j) \leqslant n\sqrt{n} \ \ (I_3)$.

Il y a égalité dans (I_3) si et seulement s'il y a égalité dans les n inégalités qu'on a sommé pour obtenir (I_3), c'est-à-dire si et seulement si tous les v_j sont colinéaires à u, c'est-à-dire si et seulement si tous les coefficients de la matrice M sont égaux en valeur absolue. Mais comme la somme des carrés des coefficients d'une colonne vaut 1, cette valeur constante de la valeur absolue ne peut valoir que $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, il y a égalité dans (I_3) si et seulement si M est une matrice de $O(n)$ qui vérifie $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $m_{i,j} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ (matrice de HADAMARD). Par exemple, $M = H_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Autre méthode : on se rappelle du produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $(A|B) = \text{Tr}\,(A^T B)$ qui s'écrit aussi $(A|B) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$ après calculs. Posons $J = (j_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $j_{i,j} = 1$ si $m_{i,j} \geqslant 0$ et $j_{i,j} = -1$ si $m_{i,j} < 0$. Par construction, on a $m_{i,j}j_{i,j} = |m_{i,j}|$ donc $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}| = (M|J) \leqslant ||M||\,||J||$ d'après CAUCHY-SCHWARZ et $||M||^2 = \text{Tr}\,(M^T M) = \text{Tr}\,(I_n) = n$ et $||J||^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1 = n^2$ ce qui donne à nouveau $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}| \leqslant \sqrt{n^3} = n\sqrt{n}$. Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement M et J sont colinéaires si et seulement si les coefficients de M sont égaux en valeur absolue, et on retrouve les matrices de HADAMARD.

19.5 La matrice M est orthogonale en vérifiant calculatoirement que $M^TM = I_3$ ou parce les trois vecteurs colonnes sont unitaires étant donné que $2^2+2^2+1^1 = 4+4+1 = 9 = 3^2$ et que les colonnes sont orthogonales deux à deux puisque $4-2-2 = 2+2-4 = 2-4+2 = 0$. M n'est pas symétrique donc u n'est pas une symétrie sinon on aurait $M^TM = M^2 = I_3$ donc $M = M^T$. Ainsi, u est une rotation ou une rotation-miroir.

De plus $\det(M) = \frac{1}{27}\Big(8+8-1+4+4+4\Big) = 1$ avec la formule de SARRUS. Ainsi u est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on résout $AX = X \Longleftrightarrow X = z\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ce qui montre, après calculs, que l'axe D de la rotation u est engendré par le vecteur $a = (3,1,1)$ (on peut le normer) ; on décide aussi de l'orienter par a. Si on note θ l'angle de cette rotation, on sait que $\mathrm{Tr}\,(M) = 1+2\cos\theta$ donc $\cos\theta = -\frac{5}{6}$ donc $\theta \equiv \pm\,\mathrm{Arccos}\Big(-\frac{5}{6}\Big)$.

De plus, en prenant $v = (1,0,0) \notin D$, comme $3[v, u(v), a] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$ donc $\theta = -\,\mathrm{Arccos}\Big(-\frac{5}{6}\Big)$.

Au final, u est la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de la droite orientée par $a = (3,1,1)$ et d'angle $\theta = -\,\mathrm{Arccos}\Big(-\frac{5}{6}\Big)$.

19.6 Il est sous-entendu dans l'énoncé qu'on prend dans $E = \mathbb{R}^3$ la structure euclidienne orientée canonique.

a. La bilinéarité du produit vectoriel assure la linéarité de f qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

• Si $u = 0$, alors $f = 0$ (endomorphisme nul) et $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$.

• Si $u \neq 0$, on sait d'après le cours que $u \wedge x = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(u)$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$. Ainsi, par la formule du rang, $\mathrm{rang}\,(f) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$. Or on sait aussi que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) \perp u$ donc $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$. Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\mathrm{Im}\,f = \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.

b. Il est aussi sous-entendu qu'on veut la matrice de u dans la base canonique qui a le bon goût d'être une base orthonormale directe pour la structure euclidienne orientée choisie dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, si $u = (a,b,c)$, on obtient classiquement $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ en calculant les produits vectoriels de u avec les trois vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, la formule du double produit vectoriel donne $f \circ f(x) = u \wedge (u \wedge x) = (u|x)u - ||u||^2 x$. Ainsi $A^2 = \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix}$ (expression qu'on peut bien sûr obtenir par un calcul direct de $A \times A$).

c. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, $f^3(x) = (u|x)f(u) - ||u||^2 f(x) = -||u||^2 f(x)$ car $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $f^3 = -||u||^2 f$ et on en déduit par une récurrence facile que $\forall n \geqslant 0,\ f^{2n+1} = (-1)^n ||u||^{2n} f$ et $\forall n \geqslant 1,\ f^{2n} = (-1)^{n-1}||u||^{2n-2} f^2$. On peut aussi utiliser le polynôme annulateur $P = X^3 + ||u||^2 X$ de f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et par division euclidienne de X^n par P, on a $X^n = Q_n P + R_n$ avec $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$. Alors, comme $P(f) = 0$, on a $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n$. Mais, comme les racines de P sont 0 et $\pm i||u||$, on a $c_n = 0$ et $i^n||u||^n = -a_n||u||^2 + b_n i||u||$ et on conclut de même en distinguant selon la parité de n.

d. Par définition, on a $\exp(f) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}$: cette série de vecteurs converge dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension finie donc on peut choisir n'importe quelle norme (elles sont toutes équivalentes).

• Si $u = 0$, $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!} = \mathrm{id}_E$ donc $\exp(f) = \mathrm{id}_E$.

• Si $u \neq 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on décompose la somme partielle $S_{2n}(f) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^k}{k!} = f^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{2k+1}}{(2k+1)!}$ selon les indices pairs ou impairs donc $S_{2n}(f) = \mathrm{id}_E + \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}||u||^{2k-2}}{(2k)!}\Big) f^2 + \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k ||u||^{2k}}{(2k+1)!}\Big) f$. Or on sait que $\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}||u||^{2k-2}}{(2k)!}\Big) = \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2}$ (développement en série entière de $\cos$) et $\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k ||u||^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{||u||}\sin(||u||)$ (développement en série entière de $\sin$). Par les propriétés des suites de vecteurs dans un espace normé, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}(f) = \mathrm{id}_E + \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2} f^2 + \frac{1}{||u||}\sin(||u||) f = g$. Comme $S_{2n+1}(f) = S_{2n}(f) - \frac{f^{2n+1}}{(2n+1)!} = S_{2n}(f) + (-1)^{n+1}\frac{||u||^{2n}}{(2n+1)!} f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{id}_E + \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2} f^2 + \frac{1}{||u||}\sin(||u||) f$ par croissances comparées car $\lim_{n\to+\infty} \frac{||u||^{2n}}{(2n+1)!} = 0$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}(f) = g$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \exp(f) = \mathrm{id}_E + \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2} f^2 + \frac{1}{||u||}\sin(||u||) f$.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, $\exp(f)(x) = x + \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2}\Big((u|x)u - ||u||^2 x\Big) + \frac{1}{||u||}\sin(||u||) u \wedge x$ et, si on note $a = \frac{u}{||u||}$ et $\theta = ||u||$, alors a est unitaire et on a $r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)\, a \wedge x + (1-\cos(\theta))(a|x)a$ et on peut conclure (par une formule vectorielle hors programme) que $\exp(f)$ est la rotation autour de l'axe orienté par le vecteur a (donc le vecteur u) et d'angle $\theta = ||u||$.

19.7 **a.** Classiquement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n + iT_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^{n} (e^{i\theta})^k$. Comme $e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, par les formules d'Euler et la technique de l'"angle moitié" : $S_n + iT_n = \frac{e^{i\theta}}{n} \times \frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Ainsi, il vient $S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{n\sin(\theta/2)}$ et $T_n = \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{n\sin(\theta/2)}$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} T_n = 0$ car $\sin$ et $\cos$ sont des fonctions bornées.

b. • Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et r une rotation de E. Dans toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, d'après le cours, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ si θ est l'angle de r. Comme composer deux rotations de même centre et d'angles α et β conduit à créer une rotation d'angle $\alpha+\beta$, on montre par une récurrence simple que $R_\theta^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$. Si $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^k$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_n) = \begin{pmatrix} S_n & -T_n \\ T_n & S_n \end{pmatrix}$. Le calcul précédent montre alors que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ (dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de dimension finie). Pour $x \in E$, $\varphi_x : u \mapsto u(x)$ qui va de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}^2$ est linéaire donc continue (on est en dimension finie) donc $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_x(v_n) = \varphi_x(\lim_{n\to+\infty} v_n) = \varphi_x(0) = 0_E$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^k(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$. On peut aussi raisonner avec les suites coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$.

• Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et r une rotation de E, il existe d'après le cours une base orthonormale $\mathcal{B} = (a,b,c)$ de E adaptée à cette rotation telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ (par blocs). Comme ci-dessus, si $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^k$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_n & -T_n \\ 0 & T_n & S_n \end{pmatrix}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_n & -T_n \\ 0 & T_n & S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et cette matrice est celle de la projection orthogonale p sur l'axe $\mathrm{Vect}(a)$. Comme avant, $\lim_{n\to+\infty} v_n = p$ (dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E)$ de dimension 9). Pour $x \in E$, $\varphi_x : u \mapsto u(x)$ qui va de $\mathcal{L}(E)$ dans E est linéaire donc continue donc $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_x(v_n) = \varphi_x(\lim_{n\to+\infty} v_n) = \varphi_x(p) = p(x) = (x|a)a$. On a bien montré que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^k(x) = (x|a)a$ pour tout $x \in E$.

c. Si on prend $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $y \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$, il existe un vecteur $z \in E$ tel que $y = u(z) - z$ donc $(x|y) = (x|u(z) - z) = (x|u(z)) - (x|z) = (u(x)|u(z)) - (x|z) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux. Ainsi $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe, et par la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)) = \dim(E)$, on en déduit donc que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E. De plus, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ sont bien des supplémentaires orthogonaux, ce qui se traduit par $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)^{\perp}$.

Soit $x \in E$ qu'on décompose $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$. Comme il existe un vecteur $v \in E$ tel que $z = u(v) - v$, on a $u^k(x) = u^k(y) + u^k(u(v) - v) = y + u^{k+1}(v) - u^k(v)$. Par télescopage, toujours en notant $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k$, on a $v_n(x) = y + \frac{u^{n+1}(v) - u(v)}{n}$. Comme u est une isométrie, $||u^{n+1}(v)|| = ||u(v)|| = ||v||$. Ainsi, $||v_n(x) - y|| \leqslant \frac{2||v||}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. On retrouve les cas particuliers de **b.** dans cette conclusion générale puisque pour une rotation r d'un plan euclidien E on a $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_E) = \{0\}$ et, pour une rotation r d'angle θ autour de l'axe D orienté par le vecteur a d'un espace euclidien de dimension 3, on a $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(a)$.

19.8 ((i) et (ii)) $\Longrightarrow$ (iii) : si f est une isométrie et $f^2 = -\mathrm{id}_E$ alors $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = -(f(x)|f(f(x)))$ car $f^2 = -\mathrm{id}_E$ donc $(f(x)|x) = -(x|f(x))$ car f conserve le produit scalaire et on en déduit que $(x|f(x)) = 0$.

((i) et (iii)) $\Longrightarrow$ (ii) : si f est une isométrie et $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = 0$, montrons que $\forall x \in E$, $||f^2(x) + x||^2 = 0$. Or $0 = (f(x+f(x))|x+f(x)) = (f(x)+f^2(x)|x+f(x)) = ||f(x)||^2 + (f^2(x)|x)$ car $(f(x)|x) = (f^2(x)|f(x)) = 0$. Mais $||f(x)||^2 = ||f^2(x)||^2 = ||x||^2$ car f est une isométrie donc on a aussi $||f^2(x)||^2 + (f^2(x)|x) = ||x||^2 + (f^2(x)|x) = 0$. On somme pour obtenir $||f^2(x)||^2 + 2(f^2(x)|x) + ||x||^2 = ||f^2(x) + x||^2 = 0$ donc $f^2(x) = -x$. Ainsi $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

((ii) et (iii)) $\Longrightarrow$ (i) : si $f^2 = -\mathrm{id}_E$ et $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = 0$ alors, en appliquant (iii) à $x + f(x)$, on a $\forall x \in E$, $(f(x + f(x))|x + f(x)) = 0 \Longleftrightarrow (f(x) - x|x + f(x)) = 0 \Longleftrightarrow ||f(x)||^2 - ||x||^2 = 0$ donc $||f(x)|| = ||x||$ et f est une isométrie car elle conserve la norme.

En dimension 2, si f est une isométrie vectorielle telle que $f^2 = -\mathrm{id}_E$, f ne peut donc pas être une symétrie donc f est une rotation, et comme $f^2 = -\mathrm{id}_E$, c'est une rotation d'angle $\pm\pi/2$: il en existe donc deux.

En dimension 3, $f^2 = -\mathrm{id}_E \Longrightarrow \det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\mathrm{id}_E) = -1$: impossible ! Pas de telle isométrie.

19.9 Méthode 1 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O(n)$. Comme $A^T A = I_n$, on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = \delta_{i,j}$. Si on prend $i = j$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1$ ce qui montre que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j}^2 \leqslant 1$ d'où $|a_{i,j}| \leqslant 1$.

Ainsi, si $A \in O(n)$ vérifie $\text{Tr}\,(A) = n$, alors $n = \text{Tr}\,(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$ ce qui s'écrit aussi $\text{Tr}\,(A) - n = \sum\limits_{k=1}^{n} (1 - a_{k,k}) = 0$. Mais la somme de tous les réels positifs $1 - a_{k,k}$ est nulle, ces réels sont donc tous nuls : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ a_{k,k} = 1$. Ensuite, pour $i \in [\![1;n]\!]$, on a $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1 = a_{i,i}^2 + \sum\limits_{\substack{j=1\\ i \neq j}}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ donc $\sum\limits_{\substack{j=1\\ i \neq j}}^{n} a_{i,j}^2 = 0$. Ceci implique encore, puisqu'une somme nulle de termes positifs implique qu'ils sont tous nuls, que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$. Ainsi, $A = I_n$.

Comme réciproquement $A = I_n$ convient, la seule matrice $A \in O(n)$ telle que $\text{Tr}\,(A) = n$ est la matrice I_n.

Méthode 2 : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Alors, comme A est réelle, $||X||^2 = \overline{X}^T X = \overline{X}^T I_n X = \overline{X}^T A^T A X = \overline{AX}^T A X = ||AX||^2 = ||\lambda X||^2 = |\lambda|^2\, ||X||^2$. Comme $||X|| \neq 0$ car $X \neq 0$, on obtient $|\lambda|^2 = 1$ donc $\lambda \in \mathbb{U}$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $\text{Tr}\,(A)$ est la somme des n valeurs propres complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de A comptées avec leur ordre de multiplicité. Si $\text{Tr}\,(A) = n$, par inégalité triangulaire, $n = |\text{Tr}\,(A)| \leqslant |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| = 1 + \cdots + 1 = n$. Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire ce qui prouve que les valeurs propres λ_i sont positivement liées (dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$) : elles sont donc toutes égales puisque toutes de module 1. Mais comme $\text{Tr}\,(A) = n\lambda_1 = n$, cela montre que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ donc $\chi_A = (X-1)^n$. Supposons que la dimension r du sous-espace propre $F = E_1(A)$ soit strictement inférieure à n, alors on sait que $F^\perp$ est aussi (comme F) stable par u (isométrie canoniquement associée à A). Ainsi, A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec B qui est aussi orthogonale (car $A^T A = I_n$). Par blocs, on trouve que $(X-1)^n = \chi_A = (X-1)^r \chi_B$ ce qui prouve que $\chi_B = (X-1)^{n-r}$. Alors, 1 serait valeur propre de B ce qui est impossible car B est la matrice de $u_{F^\perp}$ dans une base orthonormée de $F^\perp$ et que, par définition, les vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1 sont dans F. On conclut ce raisonnement par l'absurde : $r = n$. Ainsi, $E_1(u) = \mathbb{R}^n$ donc $A = I_n$.

$\boxed{\textbf{19.10}}$ **a.** Soit a un vecteur unitaire de D, on complète (a) en une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ avec (b,c) une base orthonormée directe de P (pour l'orientation de P induite par celle de D par a). Ainsi, $\mathcal{B} = (a,b,c)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle on sait que $R = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si θ est l'angle de la rotation r autour de D orientée par a. Par définition de la réflexion s, comme $a \in P^{\perp}$ et $(b,c) \in P^2$, on a $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $RS = SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ donc $s \circ r = r \circ s$ et les isométries r et s commutent et $r \circ s = s \circ r$ est la rotation-miroir autour de D, d'angle θ.

b. Analyse : supposons que $s \circ r = r \circ s$. Comme r et s commutent les sous-espaces propres de s sont stables par r et vice-versa. Or $E_1(r) = D$, $E_1(s) = P$ et $E_{-1}(s) = P^{\perp}$. En évaluant en a, $s(a) = s(r(a)) = r(s(a))$ donc $s(a) \in E_1(r) = D$ car r n'est pas l'identité. Comme s est une isométrie, $||s(a)|| = ||a|| = 1$ or $s(a) \in D = \text{Vect}(a)$ qui ne contient que deux vecteurs unitaires : a et $-a$. Traitons les deux cas :

- Si $s(a) = -a$, alors $a \in E_{-1}(s) = P^{\perp}$ donc $D \perp P$ et on est dans le cas de la question **a.**.
- Si $s(a) = a$, alors $a \in E_1(s) = P$ donc $D \subset P$. Soit n un vecteur unitaire normal à P, alors $s(n) = -n$ donc, comme $r(s(n)) = s(r(n))$, on a $s(r(n)) = -r(n)$ donc $r(n) \in E_{-1}(s) = P^{\perp}$ et, comme r est une isométrie, $r(b) = \pm b$. Traitons à nouveau les deux cas :
  - Si $r(n) = n$, alors $n \in E_1(r) = D = \text{Vect}(a)$ ce qui est absurde car $a \perp n$.
  - Si $r(n) = -n$, alors $n \in E_{-1}(r)$. Or $\det(r + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 1+\cos\theta \end{vmatrix} = 4(1+\cos\theta)$. Comme $n \neq 0 \in E_{-1}(r) = \text{Ker}(r + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $r + \text{id}_{\mathbb{R}^3} \notin GL(\mathbb{R}^3)$ donc $\det(r + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$ ce qui montre que $\theta = \pi$ et r est un demi-tour.

Synthèse : traitons les deux cas trouvés dans l'analyse :

- si $D \perp P$, on a vu en question **a.** que $s \circ r = r \circ s$ quelle que soit la valeur de l'angle θ.
- si $D \subset P$ et $\theta = \pi$, en prenant a unitaire dans D et n unitaire normal à P (comme dans l'analyse), $\mathcal{B} = (a, n, a \wedge n)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ car a et n sont orthogonaux et unitaires et on a $R = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $RS = SR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $r \circ s = s \circ r$ est la réflexion de plan $P' = \text{Vect}(a, n) = P^{\perp} \oplus D$.

Il existe deux façons pour qu'une rotation r autour de D d'angle θ et une réflexion de plan P commutent :

- Soit $D \perp P$ alors $s \circ r = r \circ s$ est une rotation-miroir pour tout θ.
- Soit $D \subset P$ et r est un demi-tour alors $s \circ r = r \circ s$ est une réflexion.

19.11 **a.** Comme u est un vecteur unitaire de E euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E (et même une infinité). On obtient $f(u) = (u|u)u = u$, $f(v) = v \wedge u = -w$ et $f(w) = w \wedge u = v$ donc l'image de la base orthonormée $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}' = (u, -w, v)$ qui est aussi une base orthonormée directe (on l'obtient à partir de $\mathcal{B}$ en échangeant deux vecteurs et en changeant le signe de l'un d'entre eux) donc f est une isométrie directe de E d'après le cours. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{-\pi/2} \end{pmatrix}$, on peut donc conclure que f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de la droite orientée par le vecteur u.

b. Analyse : soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Alors $f \circ g = g^3 = g \circ f$ donc, la droite $\text{Vect}(u) = E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et le plan $\text{Vect}(v, w) = \text{Vect}(u)^\perp = \text{Ker}(f^2 + \text{id}_E)$ (car $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$) sont stables par g car $f - \text{id}_E$ et g commutent et que $f^2 + \text{id}_E$ et g commutent. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \alpha u$ et il existe $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(v) = \beta v + \gamma w$. Comme $f(v) = -w$, on a $g(w) = -g(f(v)) = -f(g(v)) = -\beta f(v) - \gamma f(w) = -\gamma v + \beta w$. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & \beta \end{pmatrix}$ et, comme $g^2 = f$, $B^2 = A$ d'où $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 - \gamma^2 = 0$ et $2\beta\gamma = -1$ donc $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = -\gamma$.

Synthèse : les matrices $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,

$B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ vérifient $B_k^2 = A$ et ces matrices sont des matrices orthogonales.

En conclusion, il y a quatre endomorphismes g (en fait des isométries) de E tels que $g^2 = f$. Les deux isométries directes (associées à B_1 et B_2) sont les rotations autour de la droite orientée par le vecteur u et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Les deux autres isométries sont des rotations-miroirs.

19.12 **a.** Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et les vecteurs colonnes associés X et Y, alors, avec l'identification classique entre matrice $(1, 1)$ et réels, on a $(x|f(y)) = X^T(AY) = -X^TA^TY = -(A^TX)Y = -(f(x)|y)$ car A est antisymétrique.

b. Par définition, $\det(f) = \det(A) = \det(-A^T) = (-1)^n \det(A^T) = (-1)^n \det(A) = (-1)^n \det(f)$ toujours car A est antisymétrique et parce que $\det(A) = \det(A^T)$.

On en déduit que si n est impair, on a $\det(f) = -\det(f)$ donc $\det(f) = 0$ et f n'est pas un automorphisme.

c. Soit $y \in \text{Im}(f)$, alors $f(y) \in \text{Im}(f)$ par définition donc $\text{Im}(f)$ est stable par f. Il est donc licite de considérer l'endomorphisme g induit par f sur $\text{Im}(f)$, il s'agit de $g : \text{Im}(f) \to \text{Im}(f)$ définie par $g(x) = f(x)$. Soit $x \in \text{Ker}(g)$, on a donc $x \in \text{Im}(f)$ par définition de g et $g(x) = f(x) = 0$ par définition du noyau donc $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi, il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(z)$ et on a donc $||x||^2 = (x|x) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = -(0|z) = 0$ ce qui prouve que x est le vecteur nul. Ainsi, $\text{Ker}(g) = \{0\}$ donc g est un automorphisme de $\text{Im}(f)$.

Pour $(a, b) \in (\text{Im}(f))^2$, on a aussi $(a|g(b)) = (a|f(b)) = -(f(a)|b) = -(g(a)|b)$. Soit une base orthonormale

$\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r)$ de $\mathrm{Im}\,(f)$, alors $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \big((g(v_j)|v_i)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ donc B est aussi antisymétrique car $B^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \big((g(v_i)|v_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} = \big(-(v_j|g(v_i))\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} = -B$. Ainsi, d'après **b.**, comme g est inversible, on a forcément r pair donc, d'après la formule du rang, $\det(\mathrm{Ker}(f)) = n - r$ est de la même parité que n.

d. Comme $n = 3$, on ne peut avoir d'après **c.** que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ ou $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$.

- Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$ donc $f = 0$, la matrice de f dans n'importe quelle base est la matrice nulle qui est de la forme annoncée avec $a = 0$.
- Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, soit v_1 un vecteur unitaire de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme en **c.**, si $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}\,(f)$, il existe $z \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(z)$ et on a $(x|y) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = -(0|z) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}\,(f)$. Soit v_2 un vecteur unitaire de $\mathrm{Im}\,(f)$ ($\mathrm{Im}\,(f)$ est un plan), alors comme $(f(v_2)|v_2) = -(v_2|f(v_2))$, on a $f(v_2) \in \mathrm{Im}\,(f)$, $v_2 \perp f(v_2)$, $f(v_2) \neq 0$ car $v_2 \notin \mathrm{Ker}(f)$. Posons donc $v_3 = \dfrac{f(v_2)}{||f(v_2)||}$ de sorte que $||v_3|| = 1$. Par construction, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et $f(v_2) = av_3$ avec $a = ||f(v_2)||$. On a vu précédemment que la matrice de l'application g induite par f dans $\mathrm{Im}\,(f)$ était antisymétrique dans une base orthonormale de $\mathrm{Im}\,(f)$ et justement (v_2, v_3) en est une, on a forcément $f(v_3) = -av_2$. Ainsi, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ donc $\chi_A = X(X^2 + a^2) = X(X + ia)(X - ia)$ avec $a \neq 0$.

Comme $ia \notin \mathbb{R}$, f (ou A) n'est diagonalisable que si f est nulle.

19.13 **a.** On a $f(v) - f(w) = (1 - y, 2 + x) - (1 - y', 2 + x') = (y' - y, x - x')$ pour $v = (x, y)$ et $w = (x', y')$ donc $||f(v) - f(w)|| = \sqrt{(y' - y)^2 + (x - x')^2} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = ||v - w||$.

Analyse : s'il existe $(u, g) \in \mathbb{R}^2 \times O(\mathbb{R}^2)$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ f(v) = u + g(v)$, en prenant $v = (0, 0)$, on a $f(0, 0) = (1, 3) = u + g(0, 0) = u$ car g est linéaire donc $u = (1, 3)$. De plus, pour tout $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient $g(v) = g(x, y) = f(x, y) - (1, 3) = (-y, x)$.

Synthèse : prenons $u = (1, 2)$ et $g : (x, y) \mapsto (-y, x)$, alors $g \in O(\mathbb{R}^2)$ car la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vaut $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2)$. Comme $\det(A) = 1$, on a même $A \in SO(\mathbb{R}^2)$ et g est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ car $A = R_{\pi/2}$.

Ainsi, il existe un unique couple $(u, g) \in \mathbb{R}^2 \times O(\mathbb{R}^2)$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ f(v) = u + g(v)$, il s'agit du vecteur $u = (1, 2)$ et de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $g : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

Pour aller plus loin dans la description de f, cherchons un vecteur $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(v) = v$. Or $(1 - y, 3 + x) = (x, y) \iff (x = -1, y = 2)$ donc le point $v_0 = (-1, 2)$ est l'unique point fixe de f. Et on a $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ f(v_0 + v) = u + g(v_0 + v) = u + g(v_0) + g(v) = f(v_0) + g(v) = v_0 + g(v)$ donc f est la rotation affine d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du point $v_0 = (-1, 2)$.

b. Avec ces conditions, en prenant $x = 0_E$, on a $f(0_E) = u + g(0_E) = u$ car g est linéaire donc $u = f(0_E)$ et $\forall x \in E,\ g(x) = f(x) - u = f(x) - f(0_E)$.

c. (i) : soit $x \in E$, comme $u = f(0_E)$ et $g(x) = f(x) - f(0_E)$ d'après **a.**, on $f(x) = f(0_E) + f(x) - f(0_E) = u + g(x)$.

(ii) : pour un couple $(x, y) \in E^2$, d'après l'une des trois identités de polarisation, on a la relation suivante :

$(g(x)|g(y)) = \frac{1}{2}\left(||g(x)||^2 + ||g(y)||^2 - ||g(x)-g(y)||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||f(x)-f(0_E)||^2 + ||f(y)-f(0_E)||^2 - ||f(x)-f(y)||^2\right)$.
Ainsi, $(g(x)|g(y)) = \frac{1}{2}\left(||x-0_E||^2 + ||y-0_E||^2 - ||x-y||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||x||^2 + ||y||^2 - ||x-y||^2\right) = (x|y)$ par hypothèse sur f et avec la même identité de polarisation.
(iii) Comme g conserve le produit scalaire, en prenant $x = y$ dans (ii), on obtient la relation $||g(x)||^2 = ||x||^2$ donc g conserve la norme ce qui, par définition, signifie que $g \in O(E)$.