DEVOIR 19 : SÉRIES ENTIÈRES ALÉATOIRES

PSI 1 2024-2025 **mardi 04 février 2025**

QCM

1 *DSE classiques : vrai ou faux ?*

1.1 $\forall x \in [-1;1],\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

1.2 $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

1.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

1.4 $\forall x \in]-1;1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n$

2 *Séries entières : cas particuliers*

2.1 si $u_n(x) = x^n$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVU sur $]-1;1[$

2.2 si $u_n(x) = \dfrac{x^n}{2^n}$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVN sur $[-1;1]$

2.3 si $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVU sur $]-1;1[$

2.4 si $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n+1}$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVU sur $]-1;1[$

3 *Couples de variables : soit X, Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note $P_{(X,Y)}$, P_X et P_Y respectivement les lois du couple (X,Y), X et Y ; $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que $P(X=x) > 0$*

3.1 P_X et P_Y caractérisent $P_{(X,Y)}$

3.2 $P_{(X,Y)}$ caractérise P_X et P_Y

3.3 X, Y indépendantes implique $P(X=x,\ Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$

3.4 $P_{X=x}(Y=y) = \dfrac{P\big(X=x,\ Y=y\big)}{P(X=x)}$

4 *Lois usuelles : soit un entier $n \geqslant 2$, deux réels $p \in]0;1[$ et $\lambda > 0$, une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, Y suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et deux variables aléatoires Z et W suivant la loi de* Poisson *$\mathcal{P}(\lambda)$*

4.1 $Z + W$ suit la loi $\mathcal{P}(2\lambda)$

4.2 $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$

4.3 $\forall k \geqslant 1,\ P(Y=k) = (1-p)^k p$

4.4 $\forall k \in \mathbb{N},\ P(Z=k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Énoncé Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières à coefficients complexes de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Citer le théorème de comparaison : trois hypothèses faites relativement aux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ qui impliquent des relations entre les rayons de convergence R_a et R_b.

Preuve Soit $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Montrer que la variable aléatoire discrète $X+Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Exercice 1 Calcul du rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$ et de $f(x)$ si f est sa fonction somme.

Exercice 2 Soit $\lambda > 0$, $p \in]0;1[$ et deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et que, pour $n \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant $(X=n)$ est binomiale de paramètres n et p (donc, par convention, $\mathbb{P}(Y=0|X=0) = 1$).

a. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

b. En déduire la loi de Y (calculer sa distribution de probabilités $\big(\mathbb{P}(Y=j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$. La reconnaître.

DEVOIR 19 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 19	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X		
2		X	X		
3		X	X	X	
4				X	

1.1 Vrai : même si $x \in \mathbb{R}$ **1.2** Faux : ici $R = 1$ **1.3** Vrai : cours **1.4** Faux : c'est $(\alpha - n + 1)$ à la fin.
2.1 Faux : si $x \in]-1;1[, R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \dfrac{x^{n-1}}{1-x}$ et R_n n'est pas bornée sur $]-1;1[$ **2.2** Vrai : $R = 2$ et $[-1;1] \subset]-2;2[$ **2.3** Vrai : $R = 1$ et par le CSSA $\left|R_n(x)\right| \leqslant \dfrac{|x|^{2(n+1)}}{n+2}$ donc $||R_n||_{\infty,]-1;1[} \leqslant \dfrac{1}{n+2} \to 0$
2.4 Faux : si $x < 0$, la série n'est pas alternée et $R_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{|x|^k}{k+1} \geqslant \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \dfrac{|x|^{2n-1}}{k+1} = |x|^{2n-1}\big(H_{2n} - H_n\big)$ donc $||R_n||_{\infty,]-1;1[} \geqslant H_{2n} - H_n$ et classiquement $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(H_{2n} - H_n\big) = \ln(2)$.
3.1 Faux : on a vu des contre-exemples en cours **3.2** Vrai : on somme les lignes ou les colonnes du "tableau"
3.3 Vrai : définition **3.4** Vrai : définition.
4.1 Faux : c'est vrai si Z et W sont indépendantes **4.2** Faux : $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ **4.3** Faux : la bonne formule du cours est $P(Y = k) = (1-p)^{k-1}p$ **3.4** Vrai : cours.

Énoncé Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières à coefficients complexes de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors, on a les quatre implications suivantes :

(i) Si $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$ alors $R_b \leqslant R_a$ (ii) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_b \leqslant R_a$

(iii) Si $a_n \underset{+\infty}{=} o(b_n)$ alors $R_b \leqslant R_a$ (iv) Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ alors $R_a = R_b$

Preuve Notons $Z = X + Y$. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $(Z = k) = \bigcup\limits_{0\leqslant i\leqslant k} (X = i, Y = k - i)$ car X et Y prennent des valeurs positives et entières. Comme les évènements de la réunion précédente sont incompatibles deux à deux : $P(Z = k) = \sum\limits_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i)$. Mais comme X et Y sont indépendantes :

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k.$$

Exercice 1 Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{(n-2)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées donc la suite $\left(\dfrac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée quel que soit le réel x. Par définition, $R = +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}$, comme tout converge, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n(n-1)-2}{n!}x^n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-2)!}x^n - 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}x^n = (x^2-2)e^x$.

Exercice 2 **a.** Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on a $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ si $j > i$ par hypothèse et, si $j \in [\![0;i]\!]$, on a $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j|X = i) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \times \dbinom{i}{j}p^j(1-p)^{i-j} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i p^j(1-p)^{i-j}}{j!(i-j)!}$.
b. Pour $j \in \mathbb{N}$, comme $(Y = j) = \bigsqcup\limits_{i\in\mathbb{N}} (X = i, Y = j)$ (réunion disjointe) car $\Omega = \bigsqcup\limits_{i\in\mathbb{N}} (X = i)$, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Y = j) = \sum\limits_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum\limits_{i=j}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i p^j(1-p)^{i-j}}{j!(i-j)!} = \dfrac{e^{-\lambda}p^j\lambda^j}{j!}\sum\limits_{i=j}^{+\infty}\dfrac{(\lambda(1-p))^{i-j}}{(i-j)!}$ ce qui se simplifie en $\mathbb{P}(Y = j) = \dfrac{e^{-\lambda}p^j\lambda^j}{j!} \times e^{\lambda(1-p)} = \dfrac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^j}{j!}$ donc Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.