DEVOIR 20 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2024-2025 **mardi 11 février 2025**

QCM

1 *Espérance : soit* X, Y *deux variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et ayant des espérances finies (*$\mathcal{P}$ *pour la loi de* POISSON *et* $\mathcal{G}$ *pour loi géométrique)*

1.1 $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$

1.2 $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathbb{P}(X=n)$ est semi-convergente

1.3 Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$

1.4 Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0;1[$, alors $\mathbb{E}(X) = p$

2 *Variance et covariance : soit* X, Y *deux variables aléatoires réelles sur un même univers* Ω *possédant des moments d'ordre* 2 *et* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $p \in]0;1[$

2.1 $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\,\mathbb{V}(X) + b^2\,\mathbb{V}(Y)$

2.2 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

2.3 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow X$ et Y sont indépendantes

2.4 Si X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(1-p)^2}{p}$

3 *Inégalités : soit* X, Y *deux variables aléatoires réelles positives sur un même univers* Ω *possédant des moments d'ordre* 2 *et* $\varepsilon > 0$

3.1 $\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$

3.2 $\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon}$

3.3 $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$

3.4 $\mathbb{E}(XY) \leqslant \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

4 *Fonctions génératrices : soit* X, Y *deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *qui possèdent des espérances finies et qui suivent respectivement les lois* $\mathcal{G}(p)$ *(*$p \in]0;1[$*) et* $\mathcal{P}(\lambda)$ *(*$\lambda > 0$*)*

4.1 $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$

4.2 $\forall t \in \mathbb{R},\ G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}$

4.3 $G_X'(1) + G_Y'(1) = \mathbb{E}(X+Y)$

4.4 $\forall t \in]-1;1[,\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$

Énoncé Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant des moments d'ordre 2. Donner une formule donnant la variance de leur somme. Et si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes deux à deux ?

Preuve Soit $\lambda > 0$ et X une VADR suivant la loi de POISSON $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

Exercice 1 Soit $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et X, Y des variables aléatoires indép. suivant resp. les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

a. Rappeler quel est le rayon R_X et la somme G_X (resp. G_Y) de la série génératrice de X (resp. Y).

b. En déduire que $X + Y$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ mutuellement indépendantes suivant toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0;1[$. On pose $q = 1 - p$, $U = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}(X_i)$ et $V = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}(X_i)$.

a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, rappeler sans preuve ce que vaut $P(X_i \geqslant k)$.
Écrire l'évènement $(U \geqslant k)$ et déterminer $\mathbb{P}(U \geqslant k)$. Calculer $\mathbb{E}(U)$. Déterminer la loi de U.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $(V \leqslant k)$. Montrer que V admet une espérance finie $\mathbb{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \dbinom{n}{i} \dfrac{1}{1-q^i}$.

DEVOIR 20 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 20 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1			X		
2		X			
3	X		X		
4		X	X		

1.1 Faux : $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\geqslant n)$ **1.2** Faux : SATP donc CVA ou rien **1.3** Vrai : cours **1.4** Faux : $\frac{1}{p}$.
2.1 Faux : on a $\mathbb{V}(aX+bY)=a^2\,\mathbb{V}(X)+b^2\,\mathbb{V}(Y)+2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$ **2.2** Vrai : formule de König-Huyghens
2.3 Faux : on n'a que l'implication $\Longleftarrow$ en général **2.4** Faux : c'est $\mathbb{V}(X)=\frac{1-p}{p^2}$.
3.1 Vrai : Markov **3.2** Faux : c'est ε^2 au dénominateur dans B-Tchebychev **3.3** Vrai : $\mathbb{V}(X)\geqslant 0$ et $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$ **3.4** Faux : on ne sait rien du signe de la covariance et $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
4.1 Faux : le rayon vaut $R_X=\frac{1}{1-p}$ et pas $+\infty$ **4.2** Vrai : $R_Y=+\infty$ et la formule est dans le cours **4.3** Vrai : par le cours et la linéarité de l'espérance **4.4** Faux : on ne sait pas si X et Y sont indépendantes.

Énoncé Soit $X_1,\cdots,X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant des moments d'ordre 2.

Alors $S=X_1+\cdots+X_n$ admet un moment d'ordre 2 : $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.

Si on suppose de plus que les X_i sont deux à deux indépendantes : $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)$.

Preuve Comme la série suivante est absolument convergente et que $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ par définition :

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

De plus, $\mathbb{E}(X(X-1))=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\lambda^2\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}\lambda^2e^{\lambda}=\lambda^2$.
Alors $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X(X-1))+\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X^2)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$.

Exercice 1 $R_X=R_Y=+\infty$ et $\forall t\in\mathbb{R},\ G_X(t)=e^{\lambda(t-1)}$ et $G_Y(t)=e^{\mu(t-1)}$. Or $G_{X+Y}=G_XG_Y$ car $X\perp\!\!\!\perp Y$ donc $\forall t\in\mathbb{R},\ G_{X+Y}(t)=e^{(t-1)}e^{\mu(t-1)}=e^{(\lambda+\mu)(t-1)}=e^{-(\lambda+\mu)}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda+\mu)^nt^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda+\mu)^ne^{-(\lambda+\mu)}}{n!}t^n$ et aussi $G_{X+Y}(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X+Y=n)t^n$ donc, en identifiant, $\mathbb{P}(X+Y=n)=\frac{(\lambda+\mu)^ne^{-(\lambda+\mu)}}{n!}$ et $X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Exercice 2 **a.** $\mathbb{P}(X_i\geqslant k)=(1-p)^{k-1}$ ($k-1$ échecs car le premier succès se fait après le rang k). Clairement $(U\geqslant k)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i\geqslant k)$ donc, par indépendance mutuelle des X_i, $\mathbb{P}(U\geqslant k)=((1-p)^{k-1})^n=(1-p)^{(k-1)n}$. La série géométrique $\sum\limits_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(U\geqslant k)$ converge car $0<(1-p)^n<1$ et on a $\mathbb{E}(U)=\sum\limits_{k=1}\mathbb{P}(U\geqslant k)=\frac{1}{1-(1-p)^n}$.
De plus, $\mathbb{P}(U=k)=\mathbb{P}(U\geqslant k)-\mathbb{P}(U\geqslant k+1)=(1-p)^{(k-1)n}(1-(1-p)^n)$ donc $U\sim\mathcal{G}(1-(1-p)^n)$.
b. On a $(V\leqslant k)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i\leqslant k)$ et $\mathbb{P}(X_i\leqslant k)=1-\mathbb{P}(X_i>k)=1-(1-p)^k=1-q^k$, on obtient $\mathbb{P}(V\leqslant k)=(1-q^k)^n$ donc $\mathbb{P}(V>k)=1-(1-q^k)^n=1-e^{n\ln(1-q^k)}\underset{+\infty}{=}1-e^{-nq^k+o(nq^k)}\underset{+\infty}{=}nq^k+o(nq^k)$ donc $\mathbb{P}(V>k)\underset{+\infty}{\sim}nq^k\underset{+\infty}{=}o(1/k^2)$ donc $\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(V>k)$ converge. Ainsi, V admet une espérance finie et

$$\mathbb{E}(V)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(V>k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}q^{ki}\right)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{+\infty}q^{ki}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{1}{1-q^i}.$$