DEVOIR 21 : ISOMÉTRIES

PSI 1 2024-2025 **mardi 18 février 2025**

QCM

1 *Matrice orthogonale : soit* E *euclidien de dimension* n, $u \in O(E)$, $\mathcal{B}$ *une base de* E *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

1.1 ${}^tAA = I_n$

1.2 $\det(A) = \pm 1$

1.3 u est une réflexion $\iff \left(A^2 = I_n \text{ et } \det(A) = -1\right)$

1.4 u est une réflexion $\iff \left(A^2 = I_n \text{ et } \mathrm{tr}(A) = n-2\right)$

2 *Matrice orthogonale : soit* E *un espace euclidien orienté de dimension* $n \geqslant 2$, u *un endomorphisme de* E, $\mathcal{B}$ *une base orthonormée de* E *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

2.1 $u \in SO(E) \iff A \in SO(n)$

2.2 $A \in O(n) \implies u^2 \in SO(E)$

2.3 $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée directe $\iff u \in SO(E)$

2.4 ($u \in O(E)$ et A symétrique) $\implies u$ symétrie orthogonale

3 *Produit vectoriel : soit* E *un espace euclidien orienté de dimension* 3, a, b, c *trois vecteurs de* E

3.1 $[a,b,c] = (b|a \wedge c)$

3.2 $[a+b, b+c, c+a] = 2(a \wedge b|c)$

3.3 $(a|b)^2 + ||a \wedge b||^2 = ||a||^2||b||^2$

3.4 $a \wedge (b \wedge a) = (a|b)a - ||a||^2 b$

4 *Matrices orthogonales de taille 3 : soit* $A \in O(3)$ *une matrice orthogonale différente de* I_3 *et* $-I_3$ *et* u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *(euclidien orienté canonique) canoniquement associé*

4.1 $A = {}^tA$ et $\mathrm{tr}(A) = -1 \implies u$ demi-tour

4.2 $A = {}^tA$ et $\mathrm{tr}(A) = 1 \implies u$ réflexion

4.3 $A \neq {}^tA$ et $\mathrm{tr}(A) = 0 \implies u$ rotation

4.4 $A \neq {}^tA$ et $\mathrm{tr}(A) = -1 \implies u$ rotation-miroir

Énoncé Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner quelques assertions équivalentes (entre 4 et 5) qui caractérisent le fait que M est une matrice orthogonale.

Preuve Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $\big(u \in O(E)$ (u conserve la norme)$\big) \iff \left(\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y)\right)$.

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est orthogonale. En déduire que u est une réflexion par rapport à un plan P dont vous donnerez une équation.

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est orthogonale et caractériser géométriquement u.

DEVOIR 21 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 21	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X		X	
2	X	X		X	
3		X	X		
4	X	X		X	

1.1 Faux : on n'a pas imposé $\mathcal{B}$ B.O.N. **1.2** Vrai : $\det(u) = \pm 1$ et $\det(A) = \det(u)$ (ne dépend pas de la base choisie) **1.3** Faux : la condition de droite dit juste que u est une symétrie (orthogonale car $u \in O(E)$) parallèlement à un sous-espace de dimension impaire **1.4** Vrai : là encore $u = s_F$ est une symétrie orthogonale mais $\text{tr}(A) = \text{tr}(u) = \dim(F) - \dim(F^\perp) = n - 2$ donc $\dim(F) = n - 1$ et F est bien un hyperplan.
2.1 Vrai : $\mathcal{B}$ bon donc $u \in O(E) \iff A \in O(n)$ puis $\det(A) = \det(u)$ **2.2** Vrai : si $A \in O(n)$ alors $u \in O(E)$ car $\mathcal{B}$ bon puis $u^2 \in O(E)$ car $O(E)$ est un groupe puis $\det(u^2) = (\det(u))^2 = (\pm 1)^2 = 1$ **2.3** Faux : si $u \in SO(E)$, $u(\mathcal{B})$ est une bon de même direction que $\mathcal{B}$ mais on ne sait pas si $\mathcal{B}$ est directe **2.4** Vrai : si $u \in O(E)$ alors $A \in O(n)$ car $\mathcal{B}$ bon donc ${}^tAA = I_n$ puis $A^2 = I_n$ si de plus ${}^tA = A$ don u est une symétrie, elle est donc orthogonale u est une isométrie.
3.1 Faux : car $[a, b, c] = [b, c, a] = (b|c \wedge a)$ **3.2** Vrai : $[a + b, b + c, c + a] = 2[a, b, c]$ par trilinéarité et alternance **3.3** Vrai : relation de LAGRANGE **3.4** Faux : formule BAC-CAB avec $a = c$.
4.1 et **4.2** Vrai : cours **4.3** Faux : c'est une rotation d'angle $\pm\dfrac{2\pi}{3}$ ou une rotation-miroir d'angle $\pm\dfrac{\pi}{3}$
4.4 Vrai : si c'était une "vraie" rotation d'angle θ, on aurait $\text{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta > 1 + 2(-1) = -1$ car $\theta \neq \pi$.

Énoncé Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) ${}^tMM = I_n$ (ii) $M{}^tM = I_n$ (iii) M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.
(iv) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.
(v) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ eucl. canon..

Preuve ($\Longrightarrow$) Si $u \in O(E)$, soit $(x, y) \in E^2$, $||u(x+y)|| = ||x+y||$ donc $||u(x+y)||^2 = ||u(x)+u(y)||^2 = ||x+y||^2$ par linéarité. On développe pour obtenir $||u(x)||^2 + 2(u(x)|u(y)) + ||u(y)||^2 = ||x||^2 + 2(x|y) + ||y||^2$. Par hypothèse $||u(x)||^2 = ||x||^2$ et $||u(y)||^2 = ||y||^2$, on a donc $2(u(x)|u(y)) = 2(x|y)$ donc $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.
($\Longleftarrow$) Si u conserve le produit scalaire, soit $x \in E$, en prenant $y = x$ dans la formule, on a $(u(x)|u(x)) = (x|x)$ donc $||u(x)||^2 = ||x||^2$. Les normes étant positives, en passant à la racine, $||u(x)|| = ||x||$. Alors $u \in O(E)$.

Exercice 1 On vérifie que les vecteurs colonnes de cette matrice forment une B.O.N. de $\mathbb{R}^3$ (en identifiant $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car $1+2+1 = 2+2 = 4$ (vecteurs normés) et $-\sqrt{2}+\sqrt{2} = 1-2+1 = 0$ (vecteurs orthogonaux deux à deux). On peut aussi calculer ${}^tAA$ pour obtenir la relation ${}^tAA = I_3$. Toujours est-il que $A \in O(3)$! Comme A est clairement symétrique, on a $A^2 = {}^tAA = I_3$ donc u est une symétrie. On sait qu'une symétrie qui est une isométrie est une symétrie orthogonale. Comme $\text{tr}(A) = 1$, la symétrie orthogonale se fait par rapport à un espace de dimension 2 (un plan P) donc u est une réflexion. On résout $AX = X$ et on trouve que P est d'équation $x + \sqrt{2}\,y - z = 0$.

Exercice 2 On vérifie que les vecteurs colonnes de cette matrice forment une B.O.N. de $\mathbb{R}^3$ (en identifiant $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car $1+2+1 = 2+2 = 4$ (vecteurs normés) et $-\sqrt{2}+\sqrt{2} = 1-2+1 = 0$ (vecteurs orthogonaux deux à deux). On peut aussi calculer ${}^tAA$ pour obtenir la relation ${}^tAA = I_3$. Toujours est-il que $A \in O(3)$! Par SARRUS, $\det(A) = \dfrac{1}{8}\Big(0 + 2 + 2 + 2 + 2 + 0\Big) = 1$ donc $A \in SO(3)$ et comme la base canonique est une B.O.N, u est une rotation de $\mathbb{R}^3$. On résout $AX = X$ et l'axe D de u est $D = \text{Vect}(a)$ orientée par le vecteur unitaire $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(1, 0, 1\Big)$. En notant θ l'angle de la rotation u, $\text{tr}(A) = 1$ donc $\cos(\theta) = 0$. Prenons $x = (0, 1, 0) \notin D$, $[\sqrt{2}a, x, \sqrt{2}u(x)] = 2[a, x, u(x)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$ donc $\sin(\theta) > 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (quart de tour).