TD 20 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 21 février 2025**

20.1 **a.** • Si $B = 0$ et $k > 0$, on a $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T BX = 0 \geqslant k||BX||^2 = 0$ donc toute constante $k > 0$ convient.

• Si $B \neq 0$, notons $r = \text{rang}(B) \geqslant 1$ de sorte que, par la formule du rang, on ait $\dim(\text{Ker}(B)) = n - r \leqslant n - 1$. On sait que $\text{Ker}(B)$ et $\text{Im}(B)$ sont supplémentaires orthogonaux car B est symétrique. Il existe d'après le théorème spectral une base orthonormale $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_r, V_{r+1}, \cdots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(V_{r+1}, \cdots, V_n)$ soit une base orthonormale de $\text{Ker}(B)$ et $(V_1, \cdots, V_r)$ une base orthonormale de $\text{Im}(B)$ constituée de vecteurs propres de B. Pour $i \in [\![1; r]\!]$, soit λ_i la valeur propre associée à V_i de sorte que $BV_i = \lambda_i V_i$. Puisque B est positive et que $V_i \notin \text{Ker}(B)$, $\lambda_i > 0$. Quitte à renuméroter les vecteurs de $\mathcal{B}$, supposons $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on écrit $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i V_i$, on a $BX = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x_i V_i$ donc $X^T BX = (BX|X) = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$ alors que $||BX||^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i^2 x_i^2$. Ainsi, pour $k \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc $X^T BX - k||BX||^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - k \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i^2 x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} (\lambda_i - k\lambda_i^2) x_i^2$.

- si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T BX \geqslant k||BX||^2$, alors en particulier si on prend $X = X_i$ avec $i \in [\![1; r]\!]$, alors l'inégalité précédente montre que $\lambda_i - k\lambda_i^2 \geqslant 0$ car $x_i = 1$ et $x_j = 0$ si $i \neq j$ pour le vecteur X_i.
- Réciproquement, si on suppose $\forall i \in [\![1; r]\!],\ \lambda_i - k\lambda_i^2 \geqslant 0$, alors l'inégalité précédente montre que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^T BX - k||BX||^2 \geqslant 0$ car les x_i^2 sont positifs.

On vient de montrer, pour un réel $k > 0$, que $(\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^T BX - k||BX||^2 \geqslant 0) \Longleftrightarrow (\forall i \in [\![1; r]\!],\ \lambda_i - k\lambda_i^2 \geqslant 0)$. Il convient donc de choisir k tel que $k \leqslant \dfrac{1}{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1; r]\!]$. Et puisqu'on a classé ces valeurs selon l'inégalité $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r$, on a $0 < \dfrac{1}{\lambda_r} \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{1}{\lambda_1}$.

Les constantes $k > 0$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^T BX \geqslant k||BX||^2$ sont exactement les $k \in \left]0; \dfrac{1}{\lambda_r}\right]$: il en existe !

b. Comme avant, les valeurs propres de $A + \rho B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supposée définie positive sont des réels strictement positifs qu'on peut classer $0 < \alpha = \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). On note $(Y_1, \cdots, Y_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A + \rho B$ associés à ces valeurs propres. Comme avant, si $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i Y_i \in \mathbb{R}^n$, $X^T(A + \rho B)X = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \geqslant \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \alpha||X||^2$.

Par conséquent, si $BX = 0$, on a $X^T(A + \rho B)X = X^T AX + \rho X^T BX = X^T AX \geqslant \lambda||X||^2$ (1) en prenant $\lambda = \alpha > 0$. Comme en question **a.**, on peut montrer que les $\lambda > 0$ qui conviennent sont ceux de $]0; \alpha]$: il en existe !

c. Supposons l'existence d'un réel $\lambda > 0$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ BX = 0 \Longrightarrow X^T AX \geqslant \lambda||X||^2$.

<u>Cas élémentaires</u> : si $B = 0$, on a donc un réel $\lambda > 0$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T AX \geqslant \lambda||X||^2$ ce qui montre que si $X \neq 0$, $X^T AX > 0$. La matrice A est donc symétrique définie positive par un théorème du cours et pour tout réel $\rho_0 > 0$, on aura $A + \rho_0 B = A$ définie positive. Si A est elle-même définie positive, pour tout réel $\rho_0 > 0$, pour $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il vient $X^T(A + \rho_0 B)X = X^T AX + \rho_0 X^T BX > 0$ car $X^T AX > 0$ et $X^T BX \geqslant 0$. Par conséquent, dans ce cas, $A + \rho_0 B$ est symétrique définie positive pour n'importe quelle valeur de $\rho_0 > 0$. On suppose donc dans la suite que $B \neq 0$ et A n'est pas symétrique définie positive.

Soit $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec la base orthonormée $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_r, V_{r+1}, \cdots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vue **a.**, on peut décomposer $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 = \sum_{i=1}^{r} x_i V_i \in \mathrm{Im}(B)$ et $X_2 = \sum_{i=r+1}^{n} x_i V_i \in \mathrm{Ker}(B)$. Alors pour tout $\rho > 0$, $X^T(A+\rho B)X = X^T AX + \rho X_2^T BX_2 = X_1^T AX_1 + X_2^T AX_2 + 2X_1^T AX_2 + \rho X_1^T BX_1$.

- Par hypothèse, on a $X_2^T AX_2 \geqslant \lambda ||X_2||^2$ avec $\lambda > 0$ car X_2 vérifie $BX_2 = 0$.
- En notant α la plus petite valeur propre de A ($a \leqslant 0$ car A n'est pas définie positive) et en décomposant X_1 dans une base orthonormale de vecteurs propres de A, $X_1^T AX_1 \geqslant \alpha ||X_1||^2$.
- En notant $a = \underset{\alpha \in Sp(A)}{\mathrm{Max}} |\alpha| \geqslant 0$, $||AX_2||^2 \leqslant a^2 ||X_2||^2$ donc $||AX_2|| \leqslant a ||X_2||$. Par Cauchy-Schwarz, $|(AX_1|X_2)| = |X_1^T AX_2| \leqslant ||AX_1||\,||X_2|| \leqslant a||X_1||\,||X_2||$ donc $X_1^T AX_2 \geqslant -a||X_1||\,||X_2||$.
- λ_1 étant la plus petite valeur propre strictement positive de B, à nouveau $X_1^T BX_1 \geqslant \lambda_1 ||X_1||^2$.

Avec toutes ces minorations, on a $X^T(A+\rho B)X \geqslant \lambda ||X_2||^2 + \alpha ||X_1||^2 - 2a||X_1||\,||X_2|| + \rho \lambda_1 ||X_2||^2$. On met cette quantité sous forme canonique, à savoir $X^T(A+\rho B)X \geqslant \lambda \Big(||X_2|| - \frac{a}{\lambda} ||X_1|| \Big)^2 + (\alpha + \rho \lambda_1 - \frac{a^2}{\lambda}) ||X_1||^2$.
Si $\alpha + \rho_0 \lambda_1 - \dfrac{a^2}{\lambda} > 0$ (on le peut car $\lambda_1 > 0$), alors $X^T(A + \rho_0 B)X \geqslant 0$. De plus, si cette quantité était nulle, on aurait $||X_2|| - \frac{a}{\lambda}||X_1|| = ||X_1|| = 0$ donc $X_1 = X_2 = 0$ d'où $X = X_1 + X_2 = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, $X^T(A+\rho_0 B)X > 0$ si on prend $\rho_0 \in \Big] - \dfrac{a^2 - \alpha\lambda}{\lambda\lambda_1}; +\infty \Big[$, d'où $A + \rho_0 B$ est symétrique définie positive.

20.2 **a.** Soit E un espace euclidien, $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal de E s'il existe un sous-espace F de E tel que p soit la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (notée alors p_F). Si on se donne un sous-espace F et un vecteur v de E, alors la distance de v à F, notée $d(v,F) = \underset{y \in F}{\mathrm{Inf}} \big(||x - y|| \big)$ vérifie $d(v,F) = ||v - p_F(v)||$.

b. p et q sont des projecteurs orthogonaux, donc ce sont des endomorphismes symétriques d'après le cours, ce qui se traduit par $\forall (x,y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$ et $(q(x)|y) = (x|q(y))$. Par bilinéarité du produit scalaire, $(u(x)|y) = (p(x)+q(x)|y) = (p(x)|y) + (q(x)|y) = (x|p(y)) + (x|q(y)) = (x|p(y)+q(y)) = (x|u(y))$. Ainsi, u est aussi un endomorphisme symétrique et on sait d'après le théorème spectral que son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u, et $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. Alors $u(x) = \lambda x$.
Si p est la projection orthogonale sur F, en décomposant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, on a $p(x) = y$ donc $(p(x)|x) = (y|y+z) = ||y||^2$ or, d'après Pythagore, $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$ donc $0 \leqslant ||y||^2 \leqslant ||x||^2$. On a donc $0 \leqslant (p(x)|x) \leqslant ||x||^2$. De même $0 \leqslant (q(x)|x) \leqslant ||x||^2$.
On écrit $(u(x)|x) = (p(x)+q(x)|x) = (p(x)|x)+(q(x)|x)$ dont on déduit $0 \leqslant (u(x)|x) \leqslant 2||x||^2$. Mais on a aussi $(u(x)|x) = \lambda ||x||^2$. Donc $0 \leqslant \lambda ||x||^2 \leqslant 2||x||^2$ ce qui implique $\lambda \in [0;2]$ car $||x||^2 > 0$. Au final $Sp(u) \subset [0;2]$.

d. • Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $(u(x)|x) = 0$ donc $(p(x)|x) + (q(x)|x) = 0$ alors que $(p(x)|x) \geqslant 0$ et $(q(x)|x) \geqslant 0$. Ceci impose $(p(x)|x) = (q(x)|x) = 0$. Or, avec les notations précédentes, $(p(x)|x) = ||y||^2$ donc $y = 0_E$ et $x = z \in \mathrm{Ker}(p)$. De même $x \in \mathrm{Ker}(q)$. On vient de prouver l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. L'inclusion réciproque étant évidente : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
On pouvait aussi constater que, puisque p est une projection orthogonale, on a la relation générale suivante à mémoriser : $\forall x \in E$, $(p(x)|x) = (p(x)|x - p(x) + p(x)) = ||p(x)||^2$ car $x - p(x) \perp p(x)$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{id}_E)$, alors $u(x) = 2x$ donc $(u(x)|x) = 2||x||^2$. Mais $(u(x)|x) = (p(x)|x) + (q(x)|x)$, $(p(x)|x) \leqslant ||x||^2$ et $(q(x)|x) \leqslant ||x||^2$. Ceci impose $(p(x)|x) = ||x||^2$ et $(q(x)|x) = ||x||^2$. À nouveau, on en déduit que $(p(x)|x) = ||y||^2 = ||x||^2$ donc $||z||^2 = 0$ et $z = 0_E$ donc $x = y \in \mathrm{Im}\,(p)$. De même $x \in \mathrm{Im}\,(q)$. On vient d'établir l'inclusion $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(q - \mathrm{id}_E)$. L'inclusion réciproque est claire donc $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(q - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)$.

20.3 **a.** Si $A^2 = A^T$, alors $A^4 = (A^2)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T = (A^T)^T = A$ donc $P = X^4 - X = X(X^3 - 1)$ est annulateur de A. Mais comme les racines de $X^3 - 1$ sont les trois racines cubiques de l'unité, $P = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$. Les valeurs propres de A étant forcément racines de tout polynôme annulateur de A, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1, j, j^2\}$. De plus, comme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b. Si 0 est valeur propre de A, comme A est réelle et que $\mathrm{Tr}\,(A)$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur ordre de multiplicité (puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$), la seconde valeur propre de A est aussi réelle : elle vaut donc 0 ou 1 d'après la question **a.**. Si elle valait 0, comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, la matrice A serait alors semblable à la matrice nulle, donc serait égale à la matrice nulle, ce qui a été exclu. Dans ces conditions, on a $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

Par conséquent, le polynôme $X(X - 1)$ annule A qui est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, d'où l'existence d'une matrice $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ (les deux valeurs propres 0 et 1 sont forcément simples). Ainsi, $A^2 = QD^2Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$ ce qui montre que $A^2 = A = A^T$ donc que A est symétrique. Le théorème spectral (version matricielle) montre alors que A est orthosemblable à la matrice D (ce qui équivaut à l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A), d'où l'existence d'une matrice P orthogonale (matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$) telle que $A = PDP^T$.

c. Si on suppose que A n'a pas de valeur propre réelle, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \{j, j^2\}$ d'après la question **a.**. Mais comme A est réelle, si j est valeur propre de A, alors $\bar{j} = j^2$ l'est aussi, et vice-versa. On en déduit donc que $\mathrm{Sp}(A) = \{j, j^2\}$ et que A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à la matrice $D' = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$, d'où l'existence d'une matrice $U \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = UD'U^{-1}$. Mais comme j et j^2 sont des racines cubiques de l'unité, on a $D'^3 = I_2$ d'où $A^3 = UD'^3U^{-1} = UI_2U^{-1} = I_2$ et on en déduit que $A^2 = A^{-1} = A^T$ donc que A est orthogonale. Comme $\det(A^3) = \det(A)^3 = \det(I_2) = 1$, on a $\det(A) = 1$ et A est l'une des matrices R_θ du cours. Or $(R_\theta)^3 = R_{3\theta} = I_2$ implique alors $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$. Mais $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ n'est pas possible car alors on aurait $R_\theta = I_2$ avec 1 comme valeur propre double. Les deux seules matrices A qui conviennent dans ce cas sont $R_{2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ ou $R_{-2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

20.4 **a.** $S^2 = (MM^T)(MM^T) = M(M^TM)M^T = M(MM^T)M^T = M^2(M^T)^2 = M^2(M^2)^T = (-4I_n)(-4I_n)^T = 16I_n$ en raison des hypothèses $(*)$ et par associativité. Ainsi, $S^2 = 16I_n$ donc $X^2 - 16$ est annulateur de S.
La matrice S est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Mais sans ça, comme $X^2 - 16 = (X-4)(X+4)$ est annulateur de S et scindé à racines simples, S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{Sp}(S) \subset \{-4, 4\}$. On a $(S - 4I_n)(S + 4I_n) = 0$ et $(M/2) \in O(n) \iff (M/2)(M/2)^T = I_n \iff S = 4I_n$.

On voudrait donc prouver que $S + 4I_n$ est inversible, c'est-à-dire que -4 n'est pas valeur propre de S.

Par l'absurde, si -4 était valeur propre de S, il existerait $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $SX = -4X$. On aurait donc $M^TMX = -4X$ d'où $||MX||^2 = X^TM^TMX = -4X^TX = -4||X||^2$ en multipliant par X^T à gauche. Or $||X||^2 > 0$ car $X \neq 0$ donc cela donnerait $||MX||^2 < 0$ ce qui ne se peut ! Comme $S + 4I_n$ est inversible, $(S - 4I_n)(S + 4I_n) = 0$ devient $S - 4I_n = 0$ en multipliant par $(S + 4I_n)^{-1}$ à droite. On pouvait dire aussi que comme $Sp(S) \neq \emptyset$ puisque S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'on a vu que $Sp(S) \subset \{-4, 4\}$ et que $-4 \notin Sp(S)$, alors $Sp(S) = \{4\}$ donc S est semblable à $4I_n$ donc $S = P(4I_n)P^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $S = 4I_n$. Toujours est-il que $S = MM^T = 4I_n$ donc $(M/2)(M/2)^T = I_n$ et $(M/2) \in O(n)$.

b. Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4I_2 = 0$ et $M^TM = MM^T$, alors $\frac{M}{2} \in O(2)$ et $\left(\frac{M}{2}\right)^2 = -I_2$. On sait que les matrices de $O(2)$ sont les $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO(2)$ ou les $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in O(2) \setminus SO(2)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Or $S_\theta^2 = I_2 \neq -I_2$ et $R_\theta^2 = R_{2\theta} = -I_2 = R_\pi$ si et seulement si $2\theta \equiv \pi\ [2\pi] \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ainsi $\frac{M}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\frac{M}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme réciproquement elles conviennent, les seules matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + 4I_2 = 0$ et $M^TM = MM^T$ sont les matrices antisymétriques $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $(*)$, alors $M^2 = -4I_3$ donc $\det(M^2) = (\det(M))^2 = -64 = \det(-4I_3)$, ce ne se peut ! Il n'y a donc aucune matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $(*)$ pour $n = 3$.

20.5 **a.** Comme A est symétrique réelle, par le théorème spectral matriciel, il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ (contenant les valeur propres de A) et une matrice orthogonale U telles que $A = UDU^T$. Comme $Sp(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$, posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1} \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ et $R = P\Delta P^T$ de sorte que R est bien inversible par produit et, comme $R^T = R$, on a $R^TR = R^2 = P\Delta P^TP\Delta P^T = P\Delta^2P^T = PDP^T = A$.

b. <u>Analyse</u> : supposons que de telles matrices P et D existent, alors $P^TP = R^TR$ d'après la question **b.** donc $(R^T)^{-1}P^TPR^{-1} = (PR^{-1})^T(PR^{-1}) = I_n$ ce qui montre que $Q = PR^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Comme $P = QR$, on a $B = P^TDP = R^TQ^TDQR$ d'où $Q^TDQ = (R^T)^{-1}BR^{-1}$.

<u>Synthèse</u> : Soit $S = (R^T)^{-1}BR^{-1}$, comme B est symétrique, $S^T = (R^T)^{-1}B^TR^{-1} = S$ donc S est symétrique réelle ce qui montre, par le théorème spectral version matricielle, qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D (dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de S) telles que $S = Q^TDQ$. Posons $P = QR$, alors P est inversible car Q et R le sont et, comme $R = Q^{-1}P = Q^TP$, on a $A = R^TR = P^TQQ^TP = P^TP$ car Q est orthogonale. Comme $S = Q^TDQ = (R^T)^{-1}BR^{-1}$, on a $B = R^TQ^TDQR$ donc $B = P^TDP$ car $P = QR$. Il existe donc bien $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = P^TP$ et $B = P^TDP$.

c. Puisque $S = Q^TDQ$, si on pose $D = \text{diag}(\mu_1, \cdots \mu_n)$, les μ_k sont les valeurs propres de la matrice symétrique S. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^TSX = X^T(R^T)^{-1}BR^{-1}X = Y^TBY$ en posant $Y = R^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme B est symétrique positive, on a $Y^TBY \geqslant 0$ donc $X^TSX \geqslant 0$ ce qui montre, d'après le cours, que S est symétrique positive. Par conséquent, les μ_k sont tous positifs.

Comme $\det(A + B) = \det(P^TP + P^TDP) = \det(P^T)\det(I_n + D)\det(P)$ par multiplicativité du déterminant, on a $\det(A + B) = \det(P)^2\det(I_n + D)$. De même, $\det(A) = \det(P)^2$ et $\det(B) = \det(P)^2\det(D)$ donc l'inégalité à établir se ramène à $\det(I_n+D) \geqslant 1+\det(D)$ car $\det(P)^2 > 0$. En développant ces déterminants diagonaux, $\det(D) = \prod_{k=1}^{n} \mu_k$ et $\det(I_n + D) = \prod_{k=1}^{n} (1 + \mu_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \mu_i\mu_j + \cdots + \prod_{k=1}^{n} \mu_k$. Comme tous les termes intermédiaires sont positifs, on a bien $\prod_{k=1}^{n} (1 + \mu_k) \geqslant 1 + \prod_{k=1}^{n} \mu_k$ donc $\det(I_n + D) \geqslant 1 + \det(D)$, ce qui permet de conclure à l'inégalité attendue, $\det(A + B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

20.6 **a.** D'après le théorème spectral version matricielle, si M est symétrique réelle, elle est ODZ. Réciproquement, s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O(n)$ telles que $M = PDP^T$, alors $M^T = PD^TP^T = PDP^T = M$ donc M est symétrique et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a M est ODZ si et seulement si M est symétrique.

b. Si $N(\theta)$ est OTZ, alors $N(\theta)$ est semblable à une matrice triangulaire T donc, comme T, $N(\theta)$ admet deux valeurs propres réelles. Or $\chi_{N(\theta)} = \begin{vmatrix} X - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & X - \cos(\theta) \end{vmatrix} = (X - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ donc $\chi_{N(\theta)} = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ donc $e^{\pm i\theta} \in \mathbb{R}$ ce qui impose $\theta \equiv 0\ [\pi]$.

Réciproquement, si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ (resp. $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$) alors $N(\theta) = I_2$ (resp. $N(\theta) = -I_2$) qui est OTZ.

Ainsi, $N(\theta)$ est OTZ si et seulement si $\theta \equiv 0\ [\pi]$ si et seulement si $N = \pm I_2$.

c. Si M est OTZ, alors M est semblable à une matrice triangulaire T donc $\chi_M = \chi_T$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Réciproquement, si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, on sait d'après le cours que M est trigonalisable donc il existe une matrice inversible U et une matrice triangulaire supérieure T' telles que $M = UT'U^{-1}$. Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à M et si U est la matrice de passage entre la base canonique $\mathcal{B}_0$ et une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$, la formule $M = UT'U^{-1}$ montre que $T' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ car $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$. Par orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormale (dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique) $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ telle que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k)$. Si on note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la condition précédente montre que Q est triangulaire supérieure. La formule de changement de base montre que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = Q^{-1}T'Q$. Comme Q est triangulaire supérieure et inversible, Q^{-1} est aussi triangulaire supérieure donc, par produit de trois telles matrices, $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire supérieure. Si on note P la matrice de passage entre les deux bases orthonormales $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'$, on sait d'après le cours que $P \in O(n)$ et on a aussi $M = PTP^{-1} = PTP^T$ ce qui clôt la preuve.

Ainsi, M est OTZ si et seulement si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

20.7 **a.** Comme $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $B = A^TA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $BX = 0$, alors $A^TAX = 0$ donc, en multipliant par X^T à gauche, $X^TA^TAX = 0$ donc $||AX||^2 = 0$ donc $AX = 0$. En notant f l'application linéaire canoniquement associée à A, on a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{rang}\,(f) = \mathrm{rang}\,(A) = p$ donc f est injective car son rang vaut la dimension de son espace de départ. Par conséquent, $AX = 0$ implique $X = 0$ et on a montré que $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$ donc B est "injective". Comme B est une matrice carrée, B inversible.

b. On calcule aisément $P^2 = AB^{-1}A^TAB^{-1}A^T = AB^{-1}BB^{-1}A^T = AB^{-1}A^T = P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc P est une matrice de projection de l'espace $\mathbb{R}^n$.

- Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comme A est "injective" et B^{-1} est inversible, on a l'équivalence suivante $PY = 0 \Longleftrightarrow AB^{-1}A^TY = 0 \Longleftrightarrow A^TY = 0$ qui prouve que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(A^T)$.

- Comme $P = AB^{-1}A^T$, on a clairement $\text{Im}(P) \subset \text{Im}(A)$. Or, avec la formule du rang, on trouve que $\text{rang}(P) = n - \dim(\text{Ker}(P)) = n - \dim(\text{Ker}(A^T))$ mais $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) = n - \dim(\text{Ker}(A^T))$ donc $\text{rang}(P) = \text{rang}(A) = p$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $\text{Im}(P) = \text{Im}(A)$.

Précisément, P est la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\text{Im}(A)$ parallèlement à $\text{Ker}(A^T)$. Soit $(Y, Z) \in \text{Im}(A) \times \text{Ker}(A^T)$, alors $A^T Z = 0$ et il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = AX$ et $(Y|Z) = (AX|Z) = (AX)^T Z = X^T A^T Z = X^T 0 = 0$ donc $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A^T)$ sont orthogonaux. Ainsi, P est la projection orthogonale sur $\text{Im}(A)$.

On pouvait aussi le prouver en constatant que $P^T = (AB^{-1}A^T)^T = A(B^T)^{-1}A^T$ or B est symétrique (matrice de Gram) donc $P^T = AB^{-1}A^T = P$ ce qui montre aussi que P est une projection orthogonale car la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale.

20.8 **a.** $\det(M(M^TM)^2) = \det(M)\det(M^T)\det(M)\det(M^T)\det(M) = \det(M)^2 = \det(I_n) = 1$ par multiplicativité du déterminant et par hypothèse sur M donc, comme $t \mapsto t^5$ est injective sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\det(M) = 1$ donc $\det(M) \neq 0$ et M est bien inversible.

b. Comme $(M^TM)^T = M^T(M^T)^T = M^TM$, la matrice M^TM est symétrique (matrice de Gram associée à la matrice M) et elle est inversible d'après **a.** donc son carré est aussi symétrique et l'inverse de son carré est aussi symétrique. Ainsi, comme $M = ((M^TM)^2)^{-1}$ est symétrique.

c. La relation $M(M^TM)^2 = I_n$ devient donc, puisque M est symétrique, $M^5 = I_n$. Le polynôme $P = X^5 - 1$ est donc annulateur de M donc les valeurs propres de M font partie des racines de P. Or on sait avec le théorème spectral que les valeurs propres de M sont toutes réelles. Les racines de P sont les racines cinquièmes de l'unité dont une seule est réelle, 1. Ainsi, 1 est la seule valeur propre de M et, M étant diagonalisable par le théorème spectral, M est semblable (et même orthosemblable) à la matrice I_n, donc $M = I_n$.

20.9 **a.** Par un calcul matriciel par blocs, on trouve $M^TM = \begin{pmatrix} 1 + ||C||^2 & 0 \\ 0 & CC^T + I_n \end{pmatrix}$ (matrice de Gram associée à M) donc $\det(M^TM) = (1 + ||C||^2)\det(I_n + CC^T)$. Or $C^TC = 0$ si $C = 0$ et C^TC est de rang 1 (toutes les colonnes de CC^T sont proportionnelles à C) sinon.

- Si $C = 0$, $M = I_{n+1}$ donc M est inversible.
- Si $C \neq 0$, CC^T est symétrique et de rang 1 donc, d'après le théorème spectral, CC^T est diagonalisable avec 0 valeur propre de multiplicité $n - 1$, l'autre valeur propre étant $\text{Tr}(CC^T) = \text{Tr}(C^TC) = ||C||^2$ donc CC^T est semblable à $\text{diag}(0, \cdots, 0, ||C||^2)$ donc $I_n + CC^T$ est semblable à $\text{diag}(1, \cdots, 1, 1 + ||C||^2)$ d'où $\det(I_n + CC^T) = 1 + ||C||^2$. Par conséquent, $\det(M)^2 = \det(M^TM) = (1 + ||C||^2)^2 > 0$ donc $\det(M) \neq 0$ et la matrice M est bien inversible.

Dans les deux cas, que $C = 0$ ou $C \neq 0$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est inversible.

b. Comme $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$, on a $N^TN = M(M^{-1})^TM^{-1}M^T = M(MM^T)^{-1}M^T$. Mais on vérifie par calcul que $MM^T = M^TM = \begin{pmatrix} 1 + ||C||^2 & 0 \\ 0 & CC^T + I_n \end{pmatrix}$. Ainsi, $N^TN = M(M^TM)^{-1}M^T = MM^{-1}(M^T)^{-1}M^{-1}$ donc $N^TN = I_{n+1}I_{n+1}^T = I_{n+1}$ et la matrice N est bien orthogonale par définition. De plus, N est une matrice de rotation (isométrie directe) car $\det(N) = \det(M^{-1}) \times \det(M^T) = \dfrac{\det(M)}{\det(M)} = 1$: $N \in SO(n + 1)$.

20.10 **a.** Soit $(x,y) \in E^2$ et X,Y les vecteurs colonnes associés des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}_0$. Comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale, on a $\big(p(x)|y\big) = (AX)^TY = X^TA^TY = X^T(A^TY) = \big(x|q(y)\big)$.

b. Par définition, $\mathrm{Tr}\ (q \circ p)$ est la trace de la matrice de $q \circ p$ dans n'importe quelle base, choisissons la base $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q \circ p) = \big((v_i|q \circ p(v_j))\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ce qui montre que $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (B) = \sum\limits_{k=1}^{n} (v_k|q \circ p(v_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2$ avec la question **a.** avec $x = v_k$ et $y = p(v_k)$.

c. Si p est un projecteur orthogonal, $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E donc il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ de E telle que $(v_1, \cdots, v_r)$ (resp. $(v_{r+1}, \cdots, v_n)$) soit une base orthonormée de $\mathrm{Im}\,(p)$ (resp. $\mathrm{Ker}(p)$). Si on applique **b.** avec $\mathcal{B}$, on a $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2 = r$ car $\forall k \in [\![1;r]\!],\ p(v_k) = v_k$ car $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $\forall k \in [\![r+1;n]\!],\ p(v_k) = 0_E$. Or, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Tr}\ (p) = \mathrm{rang}\,(p) = r$ et on a bien $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p)$.

d. Dans le cas général, on prend une base orthonormée $(v_1, \cdots, v_r)$ de $\mathrm{Im}\,(p)$ qu'on complète en une base orthonormale $(v_1, \cdots, v_n)$ de E (c'est-à-dire que $(v_{r++1}, \cdots, v_n)$ est une base orthonormale de $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$). D'après **b.**, $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2 = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2$ car, comme avant, $\forall k \in [\![1;r]\!],\ p(v_k) = v_k$. Comme $\sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 \geqslant 0$ et qu'on a encore $\mathrm{Tr}\ (p) = r$, on a bien $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 \geqslant r = \mathrm{Tr}\ (p)$.

Avec une base orthonormée $\mathcal{B}$ choisie comme dans **d.**, comme $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2$, on a l'équivalence $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p) \iff \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 = 0 \iff (\forall k \in [\![r+1;n]\!],\ p(v_k) = 0_E)$. Cette condition revient à $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}\mathrm{Vect}(v_{r+1}, \cdots, v_n) \subset \mathrm{Ker}(p)$ ou encore, par égalité des dimensions car $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des supplémentaires de $\mathrm{Im}\,(p)$, à $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp} = \mathrm{Ker}(p)$.

Ainsi, on a bien l'équivalence $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p) \iff p$ est orthogonal.

20.11 On vérifie rapidement que l'application $(A,B) \mapsto \int_0^1 A(t)B(t)dt$ définit bien un produit scalaire sur E. Déjà AB est continue sur le segment $[0;1]$ donc l'intégrale est bien définie. La symétrie, la positivité et la bilinéarité sont claires. Soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$, alors $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$ et la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue sur $[0;1]$ donc $\forall t \in [0;1],\ P(t)^2 = 0$ donc $P(t) = 0$ et P admet une infinité de racines donc $P = 0$. $(\,.\,|\,.\,)$ est donc bien un produit scalaire sur E.

a. Soit $P \in E$, comme $t \mapsto (x+t)^n P(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$, $u(P)(x)$ est bien défini et, avec le binôme de Newton, $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \int_0^1 \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k t^{n-k}\Big) P(t)dt$ donc, par linéarité de l'intégrale, avec les mêmes arguments, $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(\binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k}P(t)dt\Big)x^k$, d'où $u(P) \in E$. De plus, si $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u(\lambda P+Q) = \int_0^1 (x+t)^n(\lambda P(t)+Q(t))dt = \lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt + \int_0^1 (x+t)^n Q(t)dt = \lambda u(P)+u(Q)$ par linéarité de l'intégrale donc u est linéaire : u est donc un endomorphisme de E.

b. Pour $(P,Q) \in E^2$, avec l'expression de **b.**, $(u(P)|Q) = \int_0^1 \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \Big(\binom{n}{k} \int_0^1 u^{n-k}P(u)du\Big)t^k\Big)Q(t)dt$ donc, par linéarité de l'intégrale, on a $(u(P)|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X^{n-k}|P) \int_0^1 t^kQ(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X^{n-k}|P)(X^k|Q)$. En effectuant le changement d'indice $j = n - k$, on a $(u(P)|Q) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (X^j|P)(X^{n-j}|Q) = (u(Q)|P)$ avec le calcul précédent car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ainsi, $(u(P)|Q) = (P|u(Q))$ par symétrie donc u est autoadjoint.

Comme u est un endomorphisme en dimension finie, u est bijectif si et seulement si u est injectif. Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 (x+t)^n P(t) dt = 0$. Soit $x_0, \cdots, x_n$ des réels distincts, considérons la famille $\mathcal{B} = ((X + x_0)^n, \cdots, (X + x_n)^n)$. La famille $\mathcal{B}$ est de cardinal $n + 1$, soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique inversée $\mathcal{B}_0 = (X^n, X^{n-1}, \cdots, X, 1)$, comme $(X + x_j)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_j^i X^{n-i}$, on a $M = \left(\binom{n}{i} x_j^i \right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui est quasiment une matrice de Vandermonde. Plus précisément, en utilisant la multilinéarité du déterminant sur les $n+1$ lignes, on a $\det(M) = \left(\prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \right) \times \prod_{0 \leqslant j < j' \leqslant n} (x_{j'} - x_j) \neq 0$ car on a choisi les $x_0, \cdots, x_n$ distincts. Ainsi, comme M est inversible, $\mathcal{B}$ est une base de E et il existe donc des scalaires $a_0, \cdots, a_n$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X + x_k)^n$. Alors, $P^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k (X + x_k)^n P$ donc, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 \big(P(t)\big)^2 dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 (x_k + t)^n P(t) dt = \sum_{k=0}^{n} a_k u(P)(x_k) = 0$. Mais comme P^2 est continue et positive sur $[0; 1]$, d'après le cours, $\forall t \in [0; 1]$, $P(t)^2 = 0$ donc $P(t) = 0$. Le polynôme P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Comme $\mathrm{Ker}(P) = \{0\}$, on a u injectif donc u bijectif.

20.12 D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^T$. Ainsi, $S^2 = PD^2P^T$ donc, comme S^2 et D^2 sont semblables (et même orthosemblables), on a $\mathrm{Tr}\,(S^2) = \mathrm{Tr}\,(D^2)$. En notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité, ces valeurs propres se trouvent sur la diagonale de D donc $\mathrm{Tr}\,(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.
Comme S est symétrique, $S^2 = S^T S$ et on a classiquement $\mathrm{Tr}\,(S^2) = \mathrm{Tr}\,(S^T S) = ||S||^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j}^2$ en notant $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On isole les termes diagonaux pour avoir $||S||^2 = \sum_{k=1}^{n} s_{k,k}^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} s_{i,j}^2$ (car S est symétrique). Par hypothèse, les valeurs propres se trouvent sur la diagonale de S donc $\sum_{k=1}^{n} s_{k,k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ et il ne reste dans $\mathrm{Tr}\,(S^2) = \mathrm{Tr}\,(D^2)$, après simplification, que $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} s_{i,j}^2$. Or une somme de termes positifs nest nulle que si tous ses termes sont nuls donc $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i < j \Longrightarrow s_{i,j} = 0$ et S est bien diagonale.

20.13 **a.** Soit p la projection orthogonale sur le sous-espace $F \subset E$. Soit $(x, y) \in E^2$, on décompose ces deux vecteurs en $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F^2$ et $(x_2, y_2) \in (F^{\perp})^2$. Alors p est symétrique car on a $(p(x)|y) = (x_1|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) = (x_1|y_1) = (x_1|y_1) + (x_2|y_1) = (x_1 + x_2|y_1) = (x|p(y))$.

b. p et q étant des projecteurs orthogonaux, ils sont symétriques d'après **a.** donc par, par composition, $p \circ q \circ p$ est symétrique. En effet, si $(x, y) \in E^2$, $(p \circ q \circ p(x)|y) = (q \circ p(x)|p(y)) = (p(x)|q \circ p(y)) = (x|p \circ q \circ p(y))$ car, successivement, p est symétrique, q est symétrique, p est symétrique.

Comme $\mathrm{Im}\,(q)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des sous-espaces E, on sait que $(\mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Ker}(q))^{\perp} = (\mathrm{Im}\,(p))^{\perp} \cap (\mathrm{Ker}(q))^{\perp}$.
Or p (même chose pour q) est un projecteur orthogonal donc $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = E_1(p) \perp E_0(p) = \mathrm{Ker}(p)$.
On conclut par égalité des dimensions que $\big(\mathrm{Im}\,(p)\big)^{\perp} = \mathrm{Ker}(p)$. De même $(\mathrm{Ker}(q))^{\perp} = \mathrm{Im}\,(q)$.

Ainsi : $(\mathrm{Im}\,(p)+\mathrm{Ker}(q))^{\perp}=\mathrm{Im}\,(q)\cap\mathrm{Ker}(p)$.

c. D'après la question précédente, $E=\mathrm{Im}\,(p)+\mathrm{Ker}(q)+(\mathrm{Im}\,(q)\cap\mathrm{Ker}(p))$, ces sous-espaces ne sont pas forcément supplémentaires car on ne sait pas si $\mathrm{Im}\,(p)\cap\mathrm{Ker}(p)=\{0_E\}$. L'endomorphisme $u=p\circ q\circ p$ est symétrique donc diagonalisable d'après le théorème spectral. On va étudier $p\circ q$ sur chacun des trois sous-espaces précédents.

- Comme $\mathrm{Im}\,(p)$ est stable par $u=p\circ(q\circ p)$, l'endomorphisme induit par u dans $\mathrm{Im}\,(p)$ est aussi symétrique donc diagonalisable et il existe donc une base orthonormale $(e_1,\cdots,e_r)$ de $\mathrm{Im}\,(p)$ formée de vecteurs propres de u (associés aux valeurs propres $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$). Or $\forall k\in[\![1;r]\!],\ p(e_k)=e_k$ donc $p\circ q\circ p(e_k)=\lambda_k e_k$ devient $p\circ q(e_k)=\lambda_k e_k$ et e_k est aussi un vecteur propre de $p\circ q$.
- On complète la famille libre $(e_1,\cdots,e_r)$ de $\mathrm{Im}\,(p)+\mathrm{Ker}(q)$ en une base $(e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_m)$ de $\mathrm{Im}\,(p)+\mathrm{Ker}(q)$ avec des vecteurs $e_{r+1},\cdots,e_m$ de $\mathrm{Ker}(q)$ (théorème de la base extraite). Or $\forall k\in[\![r+1;m]\!],\ q(e_k)=0_E$ donc $p\circ q(e_k)=0_E$ et e_k est aussi un vecteur propre de $p\circ q$.
- Enfin, on complète la famille libre $(e_1,\cdots,e_m)$ de E en une base $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_n)$ de E en la complétant avec une base de $(\mathrm{Im}\,(p)+\mathrm{Ker}(q))^{\perp}=\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Im}\,(q)$. Or $\forall k\in[\![m+1;n]\!]$, on a $p\circ q(e_k)=p(q(e_k))=p(e_k)=0_E$ donc e_k est à nouveau un vecteur propre de $p\circ q$.

Au final on obtient une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de $p\circ q$ donc $p\circ q$ est diagonalisable.

En général, si v est un projecteur orthogonal sur F de E, on a $\forall x\in E,\ 0\leqslant(u(x)|x)\leqslant||x||^2$. En effet, avec $x\in E$ qu'on écrit $x=y+z$ avec $y\in F$ et $z\in F^{\perp}$, on a $(u(x)|x)=(y|y+z)=||y||^2+(y|z)=||y||^2=||x||^2-||z||^2$ avec PYTHAGORE. Ainsi $0\leqslant||y||^2=(u(x)|x)=||x||^2-||z||^2\leqslant||x||^2$ donc $0\leqslant(u(x)|x)\leqslant||x||^2$.

Traitons maintenant deux cas :

- Soit $k\in[\![r+1;n]\!]$, alors $p\circ q(e_k)=0_E$ donc e_k est associé à la valeur propre 0.
- Soit $k\in[\![1;r]\!]$, $p\circ q(e_k)=\lambda_k e_k$ donc $(p\circ q(e_k)|e_k)=\lambda_k||e_k||^2$. Mais, avec l'inégalité précédente, comme p est symétrique et que $p(e_k)=e_k$, on a $0\leqslant(p\circ q(e_k)|e_k)=(q(e_k)|p(e_k))=(q(e_k)|e_k)\leqslant||e_k||^2$. Comme $||e_k||^2>0$ car $e_k\neq 0_E$, on en déduit que $0\leqslant\lambda_k\leqslant 1$.

Par conséquent, toutes les valeurs propres de $p\circ q$ sont dans l'intervalle $[0;1]$.

20.14 **a.** Après calculs, on a $\chi_A=\begin{vmatrix} X-1 & -3 & 0\\ -3 & X+2 & 1\\ 0 & 1 & X-1\end{vmatrix}=(X-1)(X-3)(X+4)$ donc $\mathrm{Sp}(A)=\{-4,1,3\}$. Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\mathbb{K}^3=E_1(A)\oplus E_3(A)\oplus E_{-4}(A)$. On peut aussi dire que A est symétrique et réelle donc, d'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc a fortiori dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. De plus, si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, toujours avec le théorème spectral, les sous-espaces propres de A sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

On résout les trois systèmes $AX=X$, $AX=3X$ et $AX=-4X$ avec $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ pour trouver les trois droites propres $E_1(A)=\mathrm{Vect}(v_1)$, $E_3(A)=\mathrm{Vect}(v_2)$ et $E_{-4}(A)=\mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_1=(1,0,3)$, $v_2=(3,2,-1)$ et $v_3=(3,-5,-1)$ (on constate que ces vecteurs sont bien orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$). On a donc diagonalisé A en $A=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&2&-5\\3&-1&-1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ par formule de changement de base.

Méthode 1: $F = \{0\}$ et $F = \mathbb{K}^3$ sont clairement des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A et il n'y a pas d'autres sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ de dimension 0 ou 3. On sait que les droites stables sont celles qui sont engendrées par des vecteurs donc il y a trois droites stables : $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Comme, A est symétrique, les orthogonaux des sous-espaces stables par A le sont aussi. Ainsi, il existe exactement trois plans stables qui sont $F = E_1(A_F)^\perp$ ou $F = E_3(A_F)^\perp$ ou $F = E_{-4}(A_F)^\perp$, c'est-à-dire $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$, $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ ou $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$.

Méthode 2: Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}^3$ stable par A, alors A induit sur F un endomorphisme qu'on sait être diagonalisable d'après le cours. On sait aussi que χ_{A_F} divise χ_A. Traitons alors plusieurs cas :

- si $\underline{\dim(F) = 0}$, alors $F = \{0\}$.
- si $\underline{\dim(F) = 1}$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = X-1$ ou $\chi_{A_F} = X-3$ ou $\chi_{A_F} = X+4$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 1$. Comme A_F est diagonalisable, F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Mais, par exemple si $\chi_{A_F} = X - 1$, 1 est valeur propre de A_F donc $v_1 \in F$ et on a $F = \mathrm{Vect}(v_1) = E_1(A)$. Ainsi, on a $F = E_1(A)$ ou $F = E_3(A)$ ou $F = E_{-4}(A)$.
- si $\underline{\dim(F) = 2}$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = (X-1)(X-3)$ ou $\chi_{A_F} = (X-1)(X+4)$ ou $\chi_{A_F} = (X-3)(X+4)$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 2$. A_F est diagonalisable donc F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$ (car v_1 et v_2 sont forcément dans F puisque 1 et 3 sont valeurs propres de A_F) ou $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ (idem v_1 et v_3 sont dans F) ou $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$.
- si $\underline{\dim(F) = 3}$, alors $F = \mathbb{K}^3$.

La méthode 1 utilise la propriété de symétrie de A (mais seulement dans $\mathbb{R}^3$) alors que la méthode 2 est plus générale pour trouver les sous-espaces stables par un endomorphisme (ou une matrice).

Réciproquement, ces huit sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ sont stables par A car ils possèdent tous une base de vecteurs propres de A. Il existe donc exactement 8 sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ stables par A.

b. La matrice 0 appartient à $C(A)$ donc $C(A) \neq \emptyset$ et $C(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $(M, N) \in C(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$ donc $\lambda M + N \in C(A)$. Ainsi, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel.

De plus, $A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$ par associativité du produit matriciel donc $C(A)$ est aussi stable par produit. Comme $I_3 \in C(A)$, $C(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Méthode 1 : Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $N = P^{-1}MP$, alors $M \in C(A) \iff AM = MA$ ce qui donne en remplaçant $M \in C(A) \iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \iff DN = ND$. Si on effectue les calculs ND et DN et qu'on identifie, on trouve sans peine que $M \in C(A) \iff N$ est diagonale.

Méthode 2 : Si $M \in C(A)$, les sous-espaces propres de A sont stables par M, ce qui prouve que l'on a $Mv_1 \in \mathrm{Vect}(v_1)$, $Mv_2 \in \mathrm{Vect}(v_2)$ et $Mv_3 \in \mathrm{Vect}(v_3)$ donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $Mv_1 = \alpha_1 v_1$, $Mv_2 = \alpha_2 v_2$ et $Mv_3 = \alpha_3 v_3$. Ainsi, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M et que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, comme $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$, on a $M = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Comme $\varphi : U \mapsto PUP^{-1}$ est clairement un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et que la dimension du sous-espace des matrices diagonales vaut 3, alors $\mathrm{dim}(C(A)) = 3$.

c. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ ce qui est impossible car $-4 < 0$ ne peut être le carré d'un réel. Par contre, pour le cas complexe, si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ et, en écrivant $D' = \mathrm{diag}(\alpha\ \beta\ \gamma)$, $D'^2 = D$ implique $\alpha^2 = 1,\ \beta^2 = 3$ et $\gamma^2 = -4$ et on a donc 8 matrices D' qui conviennent, ce sont les $D' = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm 2i)$. , il existe exactement huit matrices complexes qui vérifient $M^2 = A$, ce sont les matrices $M = P\mathrm{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm 2i)P^{-1}$.

20.15 **a.** Analyse : supposons qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $M \sim S$ alors, par définition, il existe $Q \in O(n)$ telle que $M = QS$. Ainsi, $M^T = S^TQ^T = SQ^T$ donc $M^TM = SQ^TQS = SI_nS = S^2$ car $Q^TQ = I_n$. De plus, $Q = MS^{-1}$ car S est inversible puisque M et Q le sont.

Synthèse : la matrice M^TM est symétrique car $(M^TM)^T = M^T(M^T)^T = M^TM$ donc, d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M^TM = PDP^T$. D contient sur sa diagonale les valeurs propres de M^TM comptées avec leur ordre de multiplicité. Or, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de M^TM, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^TMX = \lambda X$ donc $X^TM^TMX = \lambda X^TX$ d'où $||MX||^2 = \lambda||X||^2$ ce qui montre que $\lambda = \dfrac{||MX||^2}{||X||^2} > 0$ car $MX \neq 0$ puisque M est inversible et $X \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(M^TM) \subset \mathbb{R}_+^*$ et, si on note $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, on peut définir $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ qui vérifie $\Delta^2 = D$. Posons $S = P\Delta P^T$, alors $S^T = (P^T)^T\Delta^TP^T = P\Delta P^T = S$ donc S est symétrique et ses valeurs propres sont $\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$ qui sont strictement positives donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et on a bien $S^2 = P\Delta^2P^T = PDP^T = M^TM$. Si on pose $Q = MS^{-1}$, on a $Q^TQ = (S^{-1})^TM^TMS^{-1} = (S^T)^{-1}(M^TM)S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ donc $Q \in O(n)$ et on a bien construit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Q \in O(n)$ telles que $M = QS$. Voilà pour l'existence !

b. Soit S et S' des matrices symétriques définies positives telles que $M \sim S$ et $M \sim S'$, alors il existe $(Q, Q') \in (O(n))^2$ tel que $M = QS = Q'S'$. Alors $M^TM = S^TQ^TQS = S^2$ et $M^TM = S'^TQ'^TQ'S' = S'^2$.

Méthode 1 : S et S' commutent avec M^TM car $S(M^TM) = S \times S^2 = S^3 = S^2 \times S = (M^TM)S$ donc les sous-espaces propres de M^TM sont stables par S et S'. Comme S et S' sont diagonalisables d'après le théorème spectral car symétriques réelles, leurs restrictions aux $E_{\lambda_k}(M^TM)$ le sont aussi. Mais toutes les valeurs propres δ de ces endomorphismes induits vérifient $\delta^2 = \lambda_k$ donc valent $\sqrt{\lambda_k}$ car $\delta > 0$ puisque $(S, S') \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$. Ceci montre que la restriction de S et de S' à $E_{\lambda_k}(M^TM)$ est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_k}$. Ainsi, les "endomorphismes" S, S' coïncident sur les sous-espaces $E_{\lambda_k}(M^TM)$. Comme $\mathbb{R}^n$ est la somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_k}(M^TM)$ car M^TM est diagonalisable, on a $S = S'$.

Méthode 2 : on note ici $\mu_1, \cdots, \mu_r$ les valeurs propres distinctes et strictement positives de M^TM. Pour $k \in [\![1; r]\!]$, comme $M^TM - \mu_kI_n = S^2 - \mu_kI_n = (S - \sqrt{\mu_k}\,I_n)(S + \sqrt{\mu_k}\,I_n)$ et que $S + \sqrt{\mu_k}\,I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ car les valeurs propres de $S + \sqrt{\mu_k}\,I_n$ sont celles de S auxquelles on ajoute $\sqrt{\mu_k}$ donc elles sont strictement positives, on a $E_{\mu_k}(M^TM) = \mathrm{Ker}(M^TM - \mu_kI_n) = \mathrm{Ker}(S - \sqrt{\mu_k}\,I_n) = E_{\sqrt{\mu_k}}(S)$. Bien sûr, de même, on a $\forall k \in [\![1; r]\!],\ E_{\mu_k}(M^TM) = E_{\sqrt{\mu_k}}(S')$. La matrice M^TM est diagonalisable d'après le théorème spectral et on a même $\mathbb{R}^n = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1 \leqslant k \leqslant r}} E_{\mu_k}(M^T M)$. Ainsi, pour un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ qu'on décompose $X = \sum\limits_{k=1}^{r} X_k$ avec $X_k \in E_{\mu_k}(M^T M)$, on a $SX = \sum\limits_{k=1}^{r} SX_k = \sum\limits_{k=1}^{r} \sqrt{\mu_k} X_k = \sum\limits_{k=1}^{r} S'X_k = S'X$ d'où $S = S'$. Voilà pour l'unicité !

Ainsi, si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists!(Q,S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$, $M = QS$: c'est la décomposition polaire de M.

20.16 **a.** Les matrices appartenant à $D_n(\mathbb{R})$ s'appellent les matrices à diagonale propre.

La matrice A étant triangulaire supérieure, on a $\chi_A = (X-1)^n$ donc $Sp(A) = \{1, \cdots, 1\}$ (1 répété n fois) donc $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Plus généralement, toute matrice triangulaire est dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Comme B est symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral et, comme rang $(B) = 1$, on a $\dim(\text{Ker}(B)) = n-1$ par la formule du rang donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$. La dernière valeur propre λ vérifie donc $\text{Tr}\ (B) = 0 + \cdots + 0 + \lambda = \lambda$ donc $\lambda = n$ et $B \notin \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ car la diagonale de B ne contient pas $0, \cdots, 0, n$.

$\mathcal{D}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Dès que $n \geqslant 2$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par somme. En effet, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ alors que $A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ car $\chi_{A_2 - B_2} = X^2 + 1$ donc ses valeurs propres sont $\pm i$ alors que les deux termes diagonaux de $A_2 - B_2$ sont 0 et 0. On peut généraliser pour un entier $n \geqslant 3$ en prenant $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec les mêmes justifications.

b. Si M est symétrique, pour le produit scalaire canonique sur les matrices défini par $(A|B) = \text{Tr}\ (A^T B)$, on a $||M||^2 = \text{Tr}\ (M^T M) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2$. Or, d'après le théorème spectral, on a $M = PDP^T$ avec P orthogonale et D diagonale contenant les valeurs propres de M (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Ainsi, il vient $||M||^2 = \text{Tr}\ (M^T M) = \text{Tr}\ (PD^2P^T) = \text{Tr}\ (D^2)$ car deux matrices semblables ont même trace. Or $\text{Tr}\ (D^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,k}^2$ puisque $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ce qui donne la relation $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,k}^2$ (1).

En simplifiant les termes dans (1), on obtient $\sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} m_{i,j}^2 = 0$ et comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow m_{i,j} = 0$ et enfin M diagonale.

Ainsi, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n = D_n$ (les matrices diagonales) car réciproquement, les matrices diagonales (qui sont donc triangulaires) sont symétriques et à diagonale propre.

c. Si $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$, alors par hypothèse $\chi_M = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - 0) = X^n$ car les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Par Cayley-Hamilton, $M^n = 0$ donc M est nilpotente. Comme M^2 est symétrique donc diagonalisable et qu'elle est aussi nilpotente car $(M^2)^n = M^{2n} = 0$, elle est forcément nulle car elle est semblable à une matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. Ainsi $M^2 = 0 = -M^T M$ donc $M^T M = 0$ ce qui donne $||M||^2 = \text{Tr}\ (M^T M) = 0$ donc $M = 0$. Par conséquent $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n = \{0\}$.