PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 20

PSI 1 2024-2025 **du lundi 10/03 au vendredi 14/03**

1 **Groupes orthogonaux** : soit E un espace euclidien

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle ou un automorphisme orthogonal s'il conserve le produit scalaire, mais aussi les normes, les bases orthonormées ; notation $O(E)$;
- $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$; symétries orthogonales ; réflexions ;
- un sous-espace F est stable par $u \in O(E)$ si et seulement si $F^\perp$ l'est aussi ;
- $O_n(\mathbb{R})$ (ou $O(n)$) sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, caractérisation pratique, sous-groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 noté $SO_n(\mathbb{R})$;
- si $\mathcal{B}$ est une B.O.N. de E, $u \in O(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$;
- décomposition QR d'une matrice inversible avec l'orthonormalisation de Gram-Schmidt ;
- si $u \in O(E)$, on a $\det(u) = \pm 1$; $SO(E)$ sous-groupe des isométries directes (rotations) ;

2 **Isométries du plan et de l'espace** :

- orientation d'un espace euclidien ; produit mixte en dimension quelconque ;
- en dimension 2 ou 3, interprétation comme aire du parallélogramme ou volume du parallélépipède ;
- produit vectoriel dans un espace euclidien orienté ; propriétés et relations dans une B.O.N.D. ;
- matrices de $O_2(\mathbb{R})$; $SO_2(\mathbb{R})$ contient les matrices de rotation et est commutatif ;
- rotations du plan, réflexions, groupe $O(E)$ si $\dim(E) = 2$; classification complète des isométries du plan : dimension des sous-espaces propres associés à 1 et -1 et nombre de réflexions pour l'engendrer ;
- rotation de l'espace sauf id_E : matrice classique dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^\perp$ si D est l'axe de la rotation et angle si on oriente cette droite ;
- détermination pratique de la rotation si on se donne sa matrice dans une base orthonormée ;
- expression vectorielle d'une rotation, autre détermination pratique ;
- reconnaissance des symétries orthogonales de l'espace par la trace ;
- étude d'une "rotation-miroir" : axe, angle, matrice dans une B.O.N.D. adaptée, expression vectorielle d'une telle isométrie, reconnaissance des symétries orthogonales de l'espace par la trace ;
- classification complète des isométries directes ou indirectes de l'espace ;
- (HP) matrices et déterminants de Gram et application au calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien réel ;

3 **Réduction des endomorphismes autoadjoints** : soit E un espace euclidien

- théorème spectral vectoriel : tout endomorphisme autoadjoint diagonalise dans une base orthonormée ;
- analogue matriciel : toute matrice orthogonale réelle est orthosemblable à une matrice diagonale ;
- endomorphismes antisymétriques $(u(x)|x) = 0)$: équivalence avec $\big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big)$ pour tout $(x, y) \in E^2$ ou matrice antisymétrique dans n'importe quelle base orthonormale ;
- endomorphismes symétriques positifs et définis positifs et équivalences associées ;
- matrices symétriques positives et définies positives : écriture ${}^tBB$ d'une telle matrice ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir de deux manières équivalentes un endomorphisme antisymétrique (rem. 12.32)
2 définir un endomorphisme symétrique défini positif (déf. 12.12 et th. 12.33)
3 énoncer la forme des matrices de $O(2)$ et la structure de $O(2)$ et $SO(2)$ (prop. 12.14 et 12.15)
4 énoncer la description des isométries directes en dimension 3 (th. 12.21)
5 énoncer le théorème spectral dans sa version vectorielle (th. 12.30)
6 prouver les relations permettant de trouver l'angle d'une rotation (prop. 12.22)
7 prouver que u est symétrique$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique si $\mathcal{B}$ bon (th. 12.26)
8 prouver que si F est stable par u symétrique, alors $F^\perp$ est aussi stable par u (prop. 12.28)
9 prouver que si u est symétrique, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont supplémentaires orthogonaux (prop. 12.31)

Prévision pour la prochaine semaine : fin des khôlles.