TD 22 : TOPOLOGIE ET CONTINUITÉ

PSI 1 2024-2025 **vendredi 21 mars 2025**

22.1 *Mines PSI 2010 d'après RMS*

On munit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $||\,.\,||_\infty$.

Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f) : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

a. Montrer que T est continu. Déterminer la constante α optimale telle que $\forall f \in E,\ ||T(f)||_\infty \leqslant \alpha ||f||_\infty$.

b. Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer que : $\exists x_0 \in]0;1],\ \forall x \in [0;x_0[,\ |f(x)| < |f(x_0)| = ||f||_\infty$.

c. En déduire que l'espace propre de T associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

22.2 *Centrale PSI 2012*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||P||_\infty = \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Max}} |a_k|$ si $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Soit aussi l'application $||.||_1 : E \to \mathbb{R}_+$ définie par $||P||_1 = \underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{\mathrm{Sup}} |P(t)|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit $f : E \to \mathbb{R}$ par : $\forall P \in E,\ f(P) = P(x_0)$.

a. Justifier que $||.||_1$ est aussi une norme sur E. Est-elle équivalente à $||.||_\infty$?

Dorénavant, pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la restriction de f à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

b. Dans $(E_n, ||.||_\infty)$, calculer $u_n = |||f_n|||_\infty = \underset{P\in E_n, ||P||_\infty = 1}{\mathrm{Sup}} |f_n(P)|$ en fonction de x_0. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c. On définit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ (ce sont les fameux polynômes de TCHEBYCHEV). Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_n\big(\cos(x)\big) = \cos(nx)$ et $T_n\big(\mathrm{ch}\,(x)\big) = \mathrm{ch}\,(nx)$.

d. Dans $(E_n, ||.||_1)$, on pose $v_n = |||f_n|||_1 = \underset{P\in E_n, ||P||_1 = 1}{\mathrm{Sup}} |f_n(P)|$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ en fonction de x_0.

22.3 *ENS Cachan PSI 2016* Romain Morgavi

a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1 + \lambda e^{i\theta}} d\theta = 0$.

b. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$. Supposons que Q ne possède aucune racine dans $D(a,r)$ (disque fermé de centre a et de rayon r) avec $r > 0$. Montrer que $I(Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{Q'(a + re^{i\theta})}{Q(a + re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta = 0$.

c. Que vaut $I(Q)$ si Q ne possède que a comme racine dans $D(a,r)$ d'ordre de multiplicité m ?

Soit $(P_k)_{k\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_n[X])^{\mathbb{N}}$ une suite de polynômes scindés dans $\mathbb{R}$ convergeant vers P. Le but est de montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $\exists a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ P(a) = 0$. Posons $r > 0$.

d. Montrer que $P \mapsto ||P|| = \underset{z\in D(a,r)}{\mathrm{Max}} |P(z)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

e. Montrer qu'il existe une constante M telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ ||P'|| \leqslant M||P||$.

Soit $C(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r et posons $\mu = \mathrm{Min}\big(\{|P(z)| \mid z \in C(a,r)\}\big)$.

f. Montrer que $\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant k_0,\ \forall z \in C(a,r),\ |P_k(z)| \geqslant \dfrac{\mu}{2}$.

g. Montrer que $\forall k \geqslant k_0,\ \dfrac{2\pi}{r}|I(P_k) - I(P)| \leqslant \dfrac{2}{\mu^2}.(2\pi).(||P'|| + M||P||)||P - P_k||$ et conclure.

22.4 *Centrale Maths1 PSI 2018* Maëlle Casas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités au moins égales à 1. On suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?

b. Donner un polynôme annulateur P de degré p de A.

c. Soit Q un polynôme annulateur de A. Montrer que toute valeur propre de A est racine de Q.

En déduire que $(I_n, A, \cdots, A^{p-1})$ est libre.

d. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{C}_{p-1}[X],\ A^k = P_k(A)$.

e. Montrer qu'il existe un polynôme $U \in \mathbb{C}[X]$ tel que $L = U(A)$.

22.5 *Mines PSI 2023* Pierre Dobeli II

a. Montrer que $O(n)$ n'est pas convexe.

b. Montrer que $O(n)$ est un fermé borné.

c. Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

22.6 *Mines PSI 2023* Maxence Prieur I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour $n+1$ complexes distincts $a_0, a_1, \cdots, a_n$, on définit $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}^{n+1}$ par $\Phi(P) = \big(P(a_0), \cdots, P(a_n)\big)$.

a. Montrer que Φ est une bijection.

b. En déduire que $\forall i \in [\![0;n]\!],\ \exists! L_i \in \mathbb{C}_n[X],\ \big(L_i(a_i) = 1 \text{ et } \forall j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\},\ L_i(a_j) = 0\big)$.

c. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, trouver une expression de χ_M en fonction de $L_0, \cdots, L_n$.

d. Montrer que l'application $f : M \to \chi_M$ est continue.

e. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

22.7 *Mines PSI 2023* Antoine Vallade I

Soit E un espace normé, X une partie de E et C un convexe de E.

a. Montrer que $\mathring{X} \subset X \subset \overline{X}$.

b. Montrer que $\mathring{C}$ et $\overline{C}$ sont aussi des convexes.

22.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la partie $S = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n \text{ et } P \text{ scindé à racines simples dans } \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in S$ et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ ses n racines distinctes réelles. On suppose que le coefficient dominant de P est strictement positif (le cas $\mathrm{dom}(P) < 0$ est similaire). On se donne aussi des réels $\beta_0, \cdots, \beta_n$ tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \cdots < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n$.

a. Déterminer les signes de $P(\beta_k)$ pour $k \in [\![0;n]\!]$.

b. Que dire des applications $\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_k(R) = R(\beta_k)$ pour $k \in [\![0;n]\!]$?

b. En considérant $\varphi_0^{-1}((-1)^n\, \mathbb{R}_+^*) \cap \cdots \cap \varphi_{n-1}^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \cap \varphi_n^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, que dire de l'aspect topologique de S ?