SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 12 ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

12.1 Groupes orthogonaux

12.1 Seul $\Longrightarrow$ compte : soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $||f(\lambda x) - \lambda f(x)||^2 = ||f(\lambda x)||^2 - 2\lambda(f(\lambda x)|f(x)) + \lambda^2||f(x)||^2$ mais par hypothèse $||f(\lambda x)||^2 = \lambda^2||x||^2$, $(f(\lambda x)|f(x)) = (\lambda x|x) = \lambda||x||^2$ et $||f(x)||^2 = ||x||^2$ donc $||f(\lambda x) - \lambda f(x)||^2 = 0$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. On fait de même pour montrer que si $(x, y) \in E^2$, on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

On peut aussi dire que si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une bon de E, alors $\mathcal{B}' = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est aussi une bon et donc $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \big(f(x)|f(e_k)\big)f(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)f(e_k)$ ce qui prouve la linéarité de f.

12.2 **a.** $u \in O(E) \iff \big(\forall (a, b) \in E^2,\ \big(u(a)|u(b)\big) = (a|b)\big) \iff A \in O_3(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}$ est une bon. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de u : $||u(x)|| = ||\lambda x|| = ||x||$ avec $x \neq 0_E$ donc $|\lambda| = 1$. Si u est diagonalisable, u est une symétrie orthogonale : l'identité, une réflexion, un demi-tour ou la symétrie centrale.

b. A est orthogonale, symétrique de trace -1 donc u est le demi-tour autour de $\mathsf{Vect}\big((1, 1, 0)\big)$.

c. La matrice I_3 est dans G, le caractère "coefficients entiers" se conserve par produit et par inverse (car $A^{-1} = {}^tA$ si $A \in G$), le caractère orthogonal aussi. Une telle matrice $A \in G$ ne peut contenir que des 0, des 1 ou des -1. Il faut choisir la permutation des vecteurs de la base canonique : 6 choix, et les signes dans chacune des 3 colonnes : 2^3 choix. Ainsi : $\text{card}\,(G) = 48$.

d. Le sens direct est évident. Réciproquement, si $u(S) = S$, comme $u(\pm1, \pm1, \pm1) = (\pm1, \pm1, \pm1)$, on a $2u(e_1) = u(1, 1, 1) + u(1, -1, -1) = (\pm1, \pm1, \pm1) + (\pm1, \pm1, \pm1)$ donc $u(e_1)$ est à coordonnées entières ; même chose pour $u(e_2)$ et $u(e_3)$ donc $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Si par exemple $a_{1,1} \leqslant 0$, $a_{1,2} \geqslant 0$ et $a_{1,3} \leqslant 0$, en calculant $u(-1, 1, -1)$, on trouve que $|a_{1,1}| + |a_{1,2}| + |a_{1,3}| = 1$; ceci impose qu'une seule des 3 valeurs soit ±1 et les deux autres nulles. C'est vrai dans les lignes donc aussi les colonnes (u inversible car de rang 3) : on trouve que $A \in G$. Les rotations de G sont au nombre de 23 : 9 autour de l'axe qui traverse deux faces opposées de C (3 pour le choix des faces et angle $\pm\frac{\pi}{2}$ ou π), 6 demi-tours autour des axes joignant deux milieux d'arêtes opposées et 8 autour de l'axe joignant 2 sommets opposés de S (4 choix d'axe et angle $\pm\frac{2\pi}{3}$).

12.2 Isométries du plan ou de l'espace

12.3 ${}^tAA = I_3$ et $\det(A) = 1$ donc r est une rotation car la base canonique est orthonormée : c'est la rotation autour de l'axe orienté par le vecteur $e_1 + e_3$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

12.4 ${}^tAA = I_3$ et $\det(A) = 1$ donc r est une rotation car la base canonique est orthonormée : c'est la rotation autour de l'axe orienté par le vecteur $e_1 + e_2$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

12.5 Colonnes de A normées : $\forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1 \Longrightarrow \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \geqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2 = n$.

De plus, d'après CAUCHY-SCHWARZ : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1^2} = n\sqrt{n}$. On a égalité à gauche si et seulement si la matrice ne contient que des 0, des 1 et des -1 (donc à peu près une matrice de permutation) et on a égalité à droite si et seulement si tous les coefficients de la matrice sont égaux en valeur absolue : ce sont (à un facteur près) des matrices de HADAMARD qui n'existe que si $n \equiv 0$ [4].

12.6 $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{n} (v_j|v)$ où v_j représente le vecteur dans la colonne j et $v = (1, \cdots, 1)$. Alors, d'après CAUCHY-SCHWARZ : $\left|\left(\sum\limits_{j=1}^{n} v_j \middle| v\right)\right| \leqslant \left|\left|\sum\limits_{j=1}^{n} v_j\right|\right| \times ||v|| = ||u(v)|| \times ||v|| = ||v||^2 = n$ si u canoniquement associé à A. Si V est la colonne ne contenant que des 1, $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = |{}^tVAV| = |(V|AV)|$ est plus direct.

On peut avoir égalité à gauche pour $n = 2p$ pair en prenant par exemple la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$!

On peut avoir égalité à droite si par exemple $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

12.7 **a.** $u \in O(E) \Longleftrightarrow \big(\forall(a,b) \in E^2,\ (u(a)|u(b)) = (a|b)\big) \Longleftrightarrow A \in O_3(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}$ est une bon. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de u : $||u(x)|| = ||\lambda x|| = ||x||$ avec $x \neq 0_E$ donc $|\lambda| = 1$. Si u est diagonalisable, u est une symétrie orthogonale : l'identité, une réflexion, un demi-tour ou la symétrie centrale.
b. A est orthogonale, symétrique de trace -1 donc u est le demi-tour autour de $\mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$.
c. La matrice I_3 est dans G, le caractère "coefficients entiers" se conserve par produit et par inverse (car $A^{-1} = {}^tA$ si $A \in G$), le caractère orthogonal aussi. Une telle matrice $A \in G$ ne peut contenir que des 0, des 1 ou des -1. Il faut choisir la permutation des vecteurs de la base canonique : 6 choix, et les signes dans chacune des 3 colonnes : 2^3 choix. Ainsi : $\mathrm{card}\,(G) = 48$.
d. Le sens direct est évident. Réciproquement, si $u(S) = S$, comme $u(\pm1,\pm1,\pm1) = (\pm1,\pm1,\pm1)$, on a $2u(e_1) = u(1,1,1) + u(1,-1,-1) = (\pm1,\pm1,\pm1) + (\pm1,\pm1,\pm1)$ donc $u(e_1)$ est à coordonnées entières ; même chose pour $u(e_2)$ et $u(e_3)$ donc $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Si par exemple $a_{1,1} \leqslant 0$, $a_{1,2} \geqslant 0$ et $a_{1,3} \leqslant 0$, en calculant $u(-1,1,-1)$, on trouve que $|a_{1,1}| + |a_{1,2}| + |a_{1,3}| = 1$; ceci impose qu'une seule des 3 valeurs soit ±1 et les deux autres nulles. C'est vrai dans les lignes donc aussi les colonnes (u inversible car de rang 3) : on trouve que $A \in G$. Les rotations de G sont au nombre de 23 : 9 autour de l'axe qui traverse deux faces opposées de C (3 pour le choix des faces et angle $\pm\frac{\pi}{2}$ ou π), 6 demi-tours autour des axes joignant deux milieux d'arêtes opposées et 8 autour de l'axe joignant 2 sommets opposés de S (4 choix d'axe et angle $\pm\frac{2\pi}{3}$).

12.8 **a.** Comme A est orthogonale, on a $\forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{i,j} \in]-1;1[$ donc $|a_{i,j}| \geqslant a_{i,j}^2$. Mais, comme pour $j \in [\![1;n]\!]$ on a $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \geqslant 1$ et en sommant sur j : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \geqslant n$.
Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1} = n\sqrt{n}$ car $A \in O_n(\mathbb{R})$.
b. Pour qu'on ait la relation $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = n$, il est nécessaire et suffisant d'après la question **a.** que $\forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $|a_{i,j}| = a_{i,j}^2 \Longleftrightarrow a_{i,j} = \pm1$. Cela représente des matrices avec $n-1$ 0 et un 1 ou un -1 par ligne et par colonne. On choisit les signes : 2^n choix. On choisit les lignes non nulles pour chaque colonne : $n!$ choix. Ainsi il y a $2^n n!$ telles matrices qui forment en plus un groupe multiplicatif (groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ laissant globalement invariant l'hypercube : "c'est pas faux").
c. Pour avoir l'égalité $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$ dans CAUCHY-SCHWARZ, il est nécessaire et suffisant qu'on ait une proportionnalité qui se traduit ici par le fait que la matrice A a tous ses coefficients égaux en valeur absolue. De telles matrices s'appellent les matrices de HADAMARD.

d. On pose X le vecteur colonne ne contenant que des 1, alors $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = {}^tXAX$ donc par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = |(X|AX)| \leqslant ||X||\,||AX|| = ||X||^2 = n$ car A est orthogonale (elle représente une isométrie) donc $||AX|| = ||X||$.

12.9 **a.** On pose $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs colonnes de A. On a donc ${}^tAA = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $c_{i,j} = {}^tC_iC_j = \big(f(e_i)|f(e_j)\big)$ (car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale) donc $c_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ car alors $e_i \perp e_j$. De plus, si $i \neq j$, on a $(e_i - e_j) \perp (e_i + e_j)$ car $||e_i|| = ||e_j||$ donc, par symétrie du produit scalaire : $\big(f(e_i)|f(e_i)\big) = \big(f(e_j)|f(e_j)\big)$ et $c_{i,i} = c_{j,j}$ ce qui prouve que ${}^tAA = c_{1,1}I_n = \alpha I_n$ en posant $\alpha = c_{1,1}$. Ainsi : $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = {}^tX{}^tAAY = \alpha{}^tXY = \alpha(x|y)$ avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.
b. On montre qu'on a l'hypothèse de l'énoncé ou directement que ${}^tAA = 2I_2$ de sorte que A (qui est symétrique) est la matrice de $f = h \circ s$ où h est l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et s est la réflexion par rapport à la droite $D\ :\ y = (\sqrt{2}-1)x = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (celle qui fait un angle de $\frac{\pi}{8}$ dans le sens direct par rapport à (Ox)).

12.10 **a.** Méthode 1 : soit les matrices respectives A et B de ces familles dans une bon $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E. Alors ${}^tAA = \big((u_i|u_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et ${}^tBB = \big((v_i|v_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Alors, pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0 \iff ||AX||^2 = {}^tX{}^tAAX = 0 \iff {}^tX{}^tBBX = 0 \iff ||BX||^2 = 0 \iff BX = 0$ donc ces deux matrices ont même rang (car même noyau).
Méthode 2 (mais en fait la même) : pour $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = 0_E \iff \Big|\Big|\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k\Big|\Big|^2 = 0 \iff \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p} \lambda_i\lambda_j(u_i|u_j) = 0 \iff \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p} \lambda_i\lambda_j(v_i|v_j) = 0 \iff \Big|\Big|\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k v_k\Big|\Big|^2 = 0 \iff \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k v_k = 0_E$.
b. Supposons, quitte à réordonner les vecteurs, que $(u_1, \cdots, u_r)$ est libre. Alors comme à la question **a.**, on montre que $(v_1, \cdots, v_r)$ est libre. De plus, pour $k \in [\![r+1;n]\!]$, comme il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $u_k = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j u_j$ alors $\Big|\Big|v_k - \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j v_j\Big|\Big|^2 = \Big|\Big|u_k - \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j u_j\Big|\Big|^2$ d'après les hypothèses donc $v_k = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j v_j$.
• Si $r = n$, $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E et en posant f l'unique endomorphisme de E tel que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ f(u_k) = v_k$, f conserve la norme (en décomposant les vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$) donc $f \in O(E)$. D'ailleurs f est unique à vérifier ces hypothèses et elle vérifie bien $\forall k \in [\![1;p]\!],\ f(u_k) = v_k$ (même si $p > n$).
• Si $r < n$, on complète la famille libre $(u_1, \cdots, u_r)$ (resp. $(v_1, \cdots, v_r)$) est une base $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ (resp. $\mathcal{B}'' = (v_1, \cdots, v_n)$) telle que $(u_{r+1}, \cdots, u_n)$ (resp. $(v_{r+1}, \cdots, v_n)$) soit une BON de $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_r)^\perp$ (resp. $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_r)^\perp$). Soit f l'unique endomorphisme de E tel que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ f(u_k) = v_k$, alors f conserve la norme (en décomposant les vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$) donc $f \in O(E)$ et vérifie encore bien la condition voulue.
c. Si $r < n$ on peut changer le signe d'une image pour avoir f directe.
Si $r = n$ et $(u_1, \cdots, u_n)$ et $(v_1, \cdots, v_n)$ d'orientation différente, on ne peut pas imposer f directe.
d. On peut vérifier que $\forall (i,j) \in [\![1;3]\!]^2,\ (u_i|u_j) = (v_i|v_j)$. L'unique $f \in O(E)$ qui vérifie les conditions est une rotation car les familles sont directes. On a $f(1,0,0) = \frac{1}{2}\Big(f(u_2) + f(u_3) - f(u_1)\Big) = \frac{1}{3}\Big(2, -1, 2\Big)$, puis $f(0,1,0) = \frac{1}{3}\Big(2, 2, -1\Big)$, $f(0,0,1) = \frac{1}{3}\Big(-1, 2, 2\Big)$. f : rotation d'axe D orientée par $n = (1,1,1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

12.11 **a.** Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Alors ${}^t\overline{X}AX = \lambda{}^t\overline{X}X = \lambda||X||^2$ or ${}^t\overline{X}AX = -{}^t\overline{X}{}^tAX = -{}^t\overline{X}{}^t\overline{A}X = {}^t(\overline{AX})X = {}^t(\overline{\lambda X})X = \overline{\lambda}||X||^2$ car A est réelle. Ainsi $(\lambda + \overline{\lambda})||X||^2 = 0$ or $X \neq 0 \iff ||X||^2 \neq 0$ donc $\lambda + \overline{\lambda} = 0 \iff \lambda \in i\mathbb{R}$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$.

b. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, comme -1 n'est pas valeur propre de A d'après la question **a.**, la matrice $I_n + A$ est inversible donc $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ existe bien. Ainsi, φ est bien définie.

De plus, ${}^tMM = {}^t((I_n - A)(I_n + A)^{-1})(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = I_n$ car $I_n + A$ et $I_n - A$ commutent donc $M \in O_n(\mathbb{R})$. Ensuite, $(M + I_n)(I_n - A) = I_n + A + I_n - A = 2I_n$ est inversible donc $M + I_n$ l'est aussi et on en déduit que -1 n'est pas valeur propre de M. L'image de φ est bien incluse dans l'ensemble $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin Sp(M)\}$.

• Soit $(A,B) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $\varphi(A) = \varphi(B)$, alors comme les matrices $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent, il vient : $(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A) = (I_n - B)(I_n + B)^{-1} \iff (I_n - A)(I_n + B) = (I_n + A)(I_n - B)$ qui est encore équivalent à $A = B$ en développant : φ est injective.

• En résolvant l'équation $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a successivement $M(I_n + A) = I_n - A \iff (I_n + M)A = I_n - M \iff A = (I_n + M)^{-1}(I_n - M)$ si $-1 \notin Sp(M)$.

Ainsi, si $M \in O_n(\mathbb{R})$ et $-1 \notin Sp(M)$, on pose $A = (I_n + M)^{-1}(I_n - M)$ (qui existe) et on vérifie que A est antisymétrique. En effet, ${}^tA = {}^t((I_n + M)^{-1}(I_n - M)) = (I_n - {}^tM)(I_n + {}^tM)^{-1} = (I_n - M^{-1})(I_n + M^{-1})^{-1}$ donc ${}^tA = M^{-1}(M - I_n)M(M + I_n)^{-1} = -(I_n + M)^{-1}(I_n - M) = -A$ (tout commute) : φ est aussi surjective.

Au final : φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin Sp(M)\}$.

12.12 **a.** Comme $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = S^2 - 2\sigma$, ${}^tMM = \begin{pmatrix} S^2 - 2\sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & S^2 - 2\sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & S^2 - 2\sigma \end{pmatrix}$.

Par conséquent $M \in O_3(\mathbb{R}) \iff \big(\sigma = 0 \text{ et } S^2 - 2\sigma = 1\big) \iff \big(\sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1\big) \iff \big(\sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\}\big)$.

b. On commence par l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$, ce qui permet de factoriser $a + b + c$ dans la première colonne et d'avoir $\det(M) = (a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$. Puis $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et on a $\det(M) = (a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a - b & b - c \\ 0 & c - b & a - c \end{vmatrix} = (a + b + c)((a - b)(a - c) + (b - c)^2)$ qui se simplifie en $\det(M) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc)) = S^3 - 3\sigma S$. Ainsi, on a l'équivalence :

$M \in SO_3(\mathbb{R}) \iff (M \in O_3(\mathbb{R}) \text{ et } \det(M) = 1) \iff (\sigma = 0 \text{ et } S = \pm 1 \text{ et } S^3 = 1) \iff (\sigma = 0 \text{ et } S = 1)$.

c. Les réels a, b et c sont les racines de $P = (X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ac)X - abc$ (R).

$(\Longrightarrow)$ Si $M \in SO_3(\mathbb{R})$, posons $k = -abc$, alors $P = X^3 - SX^2 + \sigma X + k = X^3 - X^2 + k$ d'après la question **b.**.

Soit la fonction $f : t \mapsto t^3 - t^2 + k$, comme $f'(t) = 3t^2 - 2t = 3t\Big(t - \dfrac{2}{3}\Big)$, la fonction f admet un maximum local en 0 où $f(0) = k$ et un minimum local en $\dfrac{2}{3}$ où $f\Big(\dfrac{2}{3}\Big) = k - \dfrac{4}{27}$. Il est impossible que $a = b = c$ car alors M ne serait pas orthogonale (même pas inversible) ; ainsi f s'annule au moins en deux réels différents (a, b et c) ce qui implique que ces deux extrema locaux de f sont de signes opposés, le maximum est positif et le minimum négatif ce qui donne $k \geqslant 0$ et $k - \dfrac{4}{27} \leqslant 0$, c'est-à-dire $k\Big(k - \dfrac{4}{27}\Big) \leqslant 0$ et $k \in \Big[0; \dfrac{4}{27}\Big]$.

$(\Longleftarrow)$ S'il existe $k \in \Big[0; \dfrac{4}{27}\Big]$ tel que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$, alors par les relations coefficients/racines, on a $a + b + c = 1 = S$, $ab + bc + ac = 0 = \sigma$ et $abc = -k$ avec la relation (R). L'étude de la fonction f ci-dessus montre f s'annule trois fois sur $\mathbb{R}$ (éventuellement en une racine double réelle et $k = 0$ ou $k = \dfrac{4}{27}$) donc que a, b et c sont des réels donc, d'après **b.**, la matrice M est bien dans $SO_3(\mathbb{R})$.

12.13 **a.** En notant v_1, v_2, v_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux colonnes de la matrice A, on a $||v_1||^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + a^2\big((a^2 + b^2 + c^2) - 1\big)$. Idem pour $||v_2||^2$ et $||v_3||^3$ de sorte qu'en sommant on obtient : $||v_1||^2 + ||v_2||^2 + ||v_3||^2 = 3d + (d - 1)d$ en posant $d = a^2 + b^2 + c^2$. Si $A \in O(3)$ alors $||v_1||^2 + ||v_2||^2 + ||v_3||^2 = 3d + (d - 1)d = 3$ donc $(d - 1)(d + 3) = 0$ d'où $d = 1$ car $d \geqslant 0$.

Réciproquement, si $a^2+b^2+c^2=1$, les calculs précédents montrent que v_1, v_2, v_3 sont unitaires. De plus, $(v_1|v_2) = a^2(ab-c)+(ab+c)b^2+(ac-b)(bc+a) = a^3b-a^2c+ab^3+b^2c+abc^2+a^2c-b^2c-ab$ qui se simplifie en $(v_1|v_2) = a^3b+ab^3+abc^2-ab = ab(a^2+b^2+c^2-1) = 0$ et on vérifie de même que $(v_2|v_3) = (v_1|v_3) = 0$ donc (v_1, v_2, v_3) est une base orthonormée ce qui justifie que $A \in O(3)$.

On en déduit que $A \in O(3) \Longleftrightarrow a^2+b^2+c^2=1$.

b. On suppose donc que $a^2+b^2+c^2=1$. Alors on vérifie facilement qu'en notant $k=(a,b,c)$ (vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$) et K le vecteur colonne associé, on a $AK=K$ donc 1 est valeur propre de A car $k \neq 0$. Si on oriente la droite $\mathsf{Vect}(k)$ par le vecteur k et qu'on note θ l'angle de la rotation A avec son axe ainsi orienté, on a $\mathrm{Tr}\,(A) = 1+2\cos(\theta) = a^2+b^2+c^2 = 1$ donc $\cos(\theta)=0 \Longleftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

Si par exemple k n'est pas colinéaire à e_1, $[e_1, Ae_1, k] = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 0 & ab+c & b \\ 0 & ac-b & c \end{vmatrix} = (ab+c)c-b(ac-b) = c^2+b^2 > 0$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, A est la rotation autour de l'axe orienté par le vecteur k et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour).

12.14 A est symétrique, et en notant $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A, on a $||v_1||^2 = ||v_2||^2 = ||v_3||^2 = \frac{1}{49}\big(36+9+4\big) = 1$. De plus : $(v_1|v_2) = \frac{1}{49}\big(-12+8-6\big) = 0$, $(v_1|v_3) = \frac{1}{49}\big(6+12-18\big) = 0$ et $(v_2|v_3) = \frac{1}{49}\big(-18+6+12\big) = 0$ donc $\mathcal{B}$ est une base orthonormée : $A \in O_3(\mathbb{R})$. On a donc ${}^tAA = I_3 = A^2$ donc A représente une symétrie qui est aussi une isométrie vectorielle donc A est une symétrie orthogonale d'après le cours. Comme $\mathrm{Tr}\,(A) = 1$ (ou que $\det(A) = -1$), A est une réflexion. Ainsi, $P = \mathsf{Ker}(A-I_3)$ est un plan d'équation $3x-2y+z=0$ car $A - I_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ de rang 1. Par conséquent $D = \mathsf{Ker}(A+I_3) = P^\perp = \mathsf{Vect}((3,-2,1))$. A “est” la réflexion de plan P.

12.3 Réduction des endomorphismes symétriques

12.15 **a.** $\forall x \in E$, $||u(x)||^2 = \big(u(x)|u(x)\big) = \big(x|u^*\circ u(x)\big) \leqslant ||x||\,||u^*\circ u(x)|| \leqslant ||x||^2|||u^*\circ u|||$. On a donc l'inégalité proposée car cette inégalité est vraie pour tout $x \in E$. Ainsi $|||u|||^2 \leqslant |||u|||^2|||u^*|||^2$ donc (en distinguant selon que $u=0$ ou $u \neq 0$) on arrive à $|||u||| \leqslant |||u^*|||$. On l'applique à u^* : $|||u^*||| = |||u|||$ car $(u^*)^* = u$. Ainsi, $|||u|||^2 \leqslant |||u^*\circ u||| \leqslant |||u|||\,|||u^*||| = |||u|||^2$ donc $|||u|||^2 = |||u^*|||^2 = |||u^*\circ u|||$.

b. v est symétrique donc diagonalisable dans une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, pour tout $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, on a, en notant $\alpha = \mathop{\mathsf{Max}}\limits_{\lambda \in Sp(v)} |\lambda| = |\lambda_p|$, $||v(x)||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \leqslant \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \alpha||x||^2$ on a donc $|||v||| \leqslant \alpha$ et comme $||v(e_p)|| = \alpha$, on a $|||v||| = \mathop{\mathsf{Max}}\limits_{\lambda \in Sp(v)} |\lambda|$.

b. Les deux premières questions et le fait que si $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $v = u^*\circ u$ symétrique positif.

12.16 <u>((i) et (ii)) $\Longrightarrow$ (iii)</u> : si f est une isométrie et $f^2 = -\mathrm{id}_E$ alors $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = -(f(x)|f(f(x)))$ car $f^2 = -\mathrm{id}_E$ donc $(f(x)|x) = -(x|f(x))$ car f conserve le produit scalaire et on en déduit que $(x|f(x)) = 0$.
<u>((i) et (iii)) $\Longrightarrow$ (ii)</u> : si f est une isométrie et $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = 0$, montrons que $\forall x \in E$, $||f^2(x)+x||^2 = 0$. Or $0 = (f(x+f(x))|x+f(x)) = (f(x)+f^2(x)|x+f(x)) = ||f(x)||^2+(f^2(x)|x)$ car $(f(x)|x) = (f^2(x)|f(x)) = 0$. Mais $||f(x)||^2 = ||f^2(x)||^2 = ||x||^2$ car f est une isométrie donc on a aussi $||f^2(x)||^2+(f^2(x)|x) = ||x||^2+(f^2(x)|x) = 0$. On somme pour obtenir $||f^2(x)||^2+2(f^2(x)|x)+||x||^2 = ||f^2(x)+x||^2 = 0$ donc $f^2(x) = -x$. Ainsi $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

$((ii)$ et $(iii)) \Longrightarrow (i)$: si $f^2 = -\mathrm{id}_E$ et $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = 0$ alors, en appliquant (iii) à $x + f(x)$, on a $\forall x \in E$, $(f(x+f(x))|x+f(x)) = 0 \Longleftrightarrow (f(x)-x|x+f(x)) = 0 \Longleftrightarrow ||f(x)||^2 - ||x||^2 = 0$ donc $||f(x)|| = ||x||$ et f est une isométrie car elle conserve la norme.
En dimension 2, si f est une isométrie vectorielle telle que $f^2 = -\mathrm{id}_E$, f ne peut donc pas être une symétrie donc f est une rotation, et comme $f^2 = -\mathrm{id}_E$, c'est une rotation d'angle $\pm\pi/2$: il en existe donc deux.
En dimension 3, $f^2 = -\mathrm{id}_E \Longrightarrow \det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\mathrm{id}_E) = (-1)^3 = -1$: impossible, il n'y en a pas.

12.17 **a.** Analyse : $A = {}^tMM$ est symétrique réelle, donc $M = A^{-1}$ aussi, donc $M^3 = I_n$. On pouvait aussi écrire que si $M{}^tMM = I_n$, alors ${}^tMM{}^tMM = ({}^tMM)^2 = {}^tM$ donc ${}^tM$ est symétrique (d'où M aussi) comme le carré d'une matrice symétrique. Comme M est symétrique réelle, M est orthosemblable à une matrice diagonale réelle D vérifiant $D^3 = I_n$ donc $D = I_n$, soit $M = I_n$.
Synthèse : inversement $M = I_n$ convient. Ainsi I_n est la seule solution.
b. Analyse : de même $M = ({}^tMM)^{-1}$ est symétrique, puis $M^3 = I_n$ donc M annule $X^3 - 1$ scindé à racines simples, donc M est DZ et $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}_3$. Ainsi M est symétrique et DZ avec $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1, j, j^2\}$.
Synthèse : si M est symétrique, DZ avec $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1, j, j^2\}$ alors $M{}^tMM = M^3 = I_n$ donc M est solution.
On a facilement de nouvelles solutions en prenant des diagonales à coefficients diagonaux dans $\mathbb{U}_3$. On peut trouver des solutions non diagonales, en prenant $M = P^{-1}DP$ avec D diagonale à coefficients diagonaux dans $\{1, j, j^2\}$ et P telle que $P^{-1} = {}^tP$ ($P \in O(n)$ par exemple) pour assurer le caractère symétrique.
Exemple pour $n = 2$: $D = \mathrm{diag}(1, j)$ et $P = R_{\pi/4}$, d'où une solution $M = \begin{pmatrix} -\dfrac{j^2}{2} & \dfrac{1}{2}(j-1) \\ \dfrac{1}{2}(j-1) & -\dfrac{j^2}{2} \end{pmatrix}$.

12.18 **a.** On décompose $X = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$ dans une base de vecteurs propres (associés aux valeurs propres $\alpha_k > 0$), alors $AX = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k X_k$ et comme ces vecteurs propres peuvent être choisis orthogonaux entre eux deux à deux : ${}^tXAX = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k ||X_k||^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \Longrightarrow X = 0$.
b. On sait que $\mathrm{rang}\,(B) \leqslant \mathrm{Min}(n, m)$ donc si $m > n$ on a $\mathrm{rang}\,(B) < m$ donc deux colonnes de B (donc de M) sont proportionnelles et M n'est alors pas inversible.
c. $\begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Big(AX + {}^tBY = 0 \text{ et } BX = 0\Big)$. On multiplie la première équation par ${}^tX$ et on obtient $X = 0$ d'après **1**. Alors ${}^tBY = 0 \Longrightarrow Y = 0$ car ${}^tB$ "est injective" d'après le théorème du rang. Ainsi $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$ donc M inversible car on est en dimension finie.
d. On calcule et on trouve, car ${}^tA = A$: ${}^tQMQ = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -BA^{-1}{}^tB \end{pmatrix}$ donc, comme $\det(Q) = 1$, on a $\det(M) = (-1)^m \det(A)\det(BA^{-1}{}^tB)$ avec $\det(A) = \prod\limits_{k=1}^{n} \alpha_k > 0$ donc $\det(BA^{-1}{}^tB) \neq 0$.

12.19 **a.** B_1 et B_2 sont symétriques réelles donc diagonalisables, elles sont inversibles car A l'est. De plus : $\chi_{B_1}(\lambda) = \det\big(B_1 - \lambda I_n\big) = \det\big({}^tAA - \lambda I_n\big) = \det\Big(A\big({}^tAA - \lambda I_n\big)A^{-1}\Big) = \det\big(B_2 - \lambda I_n\big) = \chi_{B_2}(\lambda)$ donc elles ont les mêmes valeurs propres. On pouvait aussi voir que si $X \neq 0$ et $B_1X = \lambda X$ alors $A{}^tAAX = \lambda AX$ avec $Y = AX \neq 0$ car A inversible donc λ est aussi valeur propre de B_2.
b. On vient de voir que u canoniquement associé à A induit une application linéaire de $E_\lambda(b_1)$ dans $E_\lambda(b_2)$ donc $\dim\big(E_\lambda(b_1)\big) \leqslant \dim\big(E_\lambda(b_2)\big)$. Par symétrie on a l'égalité.
c. Il existe donc deux bases orthonormales $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telles que les matrices de b_1 et b_2 dans ces bases soient D diagonale. Ainsi, il existe P_1 et P_2 orthogonales (matrices de passage de la base canonique à $\mathcal{B}_1$ ou $\mathcal{B}_2$) telles que $B_1 = P_1D{}^tP_1$ et $B_2 = P_2D{}^tP_2$; alors $B_1 = UB_2{}^tU$ en posant $U = P_1{}^tP_2 \in O_n(\mathbb{R})$ car $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe.

12.20 **a.** Comme $A^p = 0$, la seule valeur propre possible (dans $\mathbb{C}$) de A est 0. Ainsi son polynôme caractéristique ne peut valoir que $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$ et par le théorème de Cayley-Hamilton : $A^n = 0$.

b. ${}^tAA$ est une matrice réelle symétrique donc diagonalisable, et comme $\left({}^tAA\right)^p = ({}^tA)^p A^p = 0$, on a donc ${}^tAA = 0$. Grâce au produit scalaire canonique : $||A||^2 = (A|A) = \text{Tr}\,({}^tAA) = 0 \Longrightarrow A = 0$.

c. On peut la chercher en blocs 2×2 et on trouve $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

12.21 **a.** ${}^t({}^tXAX) = {}^tX{}^tAX$ donc ${}^tXAX = {}^tXBX$.

b. Comme B est symétrique, elle est orthosemblable à une matrice diagonale réelle : $\exists P \in O(n)$ telle que $B = PD{}^tP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. En posant $Y = {}^tPX$: $\alpha{}^tXX = \alpha{}^tYY \leqslant {}^tXBX = {}^tYDY \leqslant \beta{}^tYY = \beta{}^tXX$ car "P conserve la norme". Soit maintenant une valeur propre λ (donc forcément $\lambda \in \mathbb{R}$) de A, alors il existe un vecteur colonne non nul X tel que $AX = \lambda X$ et ${}^tX{}^tA = \lambda{}^tX$ donc ${}^tXBX = \lambda{}^tXX$ d'où l'on déduit $\lambda \in [\alpha; \beta]$.

12.22 La matrice étant symétrique, elle est diagonalisable : $\text{Sp}(A) \neq \emptyset$ d'où la définition de α et β.

Si on pose $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, alors il existe $P \in O(n)$ telle que $A = PD{}^tP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y = {}^tPX$ (avec des notations évidentes) : $\alpha \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant {}^tXAX = {}^tYDY = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \beta \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2$ or $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = {}^tYY = {}^tXX = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$.
En prenant les vecteurs colonnes élémentaires E_k, on trouve donc : $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $a_{k,k} \in [\alpha; \beta]$.

12.23 **a.** Si A antisymétrique vérifiait pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ la relation $A^2 = \lambda I_n$, alors pour un vecteur colonne X non nul, on aurait $A^2X = \lambda X$ donc ${}^tXA^2X = -{}^tX{}^tAAX = -||AX||^2 = \lambda||X||^2 = \lambda{}^tXX$ ce qui est impossible car $\lambda > 0$ et $||X||^2 > 0$.
b. Si A existe, on a $\lambda \leqslant 0$ d'après **a.** et $\det(A)^2 = \lambda^n > 0$ donc n pair si $\lambda < 0$. Réciproquement, si $\lambda = 0$, $A = 0$ convient et si $\lambda < 0$ et $n = 2p$ pair, il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-\lambda}I_p \\ \sqrt{-\lambda}I_p & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^2 = \lambda I_n$. La CNS est donc $\lambda = 0$ ou ($\lambda < 0$ et n pair).
c. S est symétrique donc diagonalisable dans une bon $\mathcal{B}$ ce qui se traduit matriciellement par $S = {}^tPDP$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ contenant les valeurs propres de S. Comme A antisymétrique si et seulement si $A' = PA{}^tP$ l'est, le problème est donc l'existence de A' antisymétrique telle que $A'^2 = D$. Si A' existe, Comme A et S commutent, les sous-espaces propres de D (abus de notation) sont stables par A' et si on écrit $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \cdots, \lambda_m I_{r_m})$ par blocs en regroupant les valeurs propres, on a donc $A' = \text{diag}(A'_1, \cdots, A'_m)$ avec A'_k antisymétrique de taille r_k. On se ramène à **b.** et la CNS (la réciproque se fait comme au **b.**) : les valeurs propres de S sont négatives et si $\lambda \in \text{Sp}(S) \cap \mathbb{R}_-^*$, $\dim(E_\lambda(S))$ est pair.

12.24 On considère $B = {}^tAA$ alors B est symétrique définie positive d'après le cours (B inversible car A l'est). Alors, par le théorème spectral, il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $D' = \text{diag}(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \cdots \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ telles que $B = UD'{}^tU$. Soit u canoniquement associé à A, et $\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_n)$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que U est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\big(u(x)|u(y)\big) = \big(x|u^* \circ u(y)\big)$ et $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $u(f_k) = \lambda_k f_k$, donc on a $\big(u(f_i)|u(f_j)\big) = \big(f_i|u^* \circ u(f_j)\big) = \big(f_i|\lambda_j f_j\big) = 0$. Ainsi, la famille $(u(f_1), \cdots, u(f_n))$ est une base orthogonale (u est inversible). Définissons $\mathcal{B}' = \Big(\dfrac{u(f_1)}{||u(f_1)||}, \cdots, \dfrac{u(f_n)}{||u(f_n)||}\Big)$ qui est orthonormée, alors $D = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est diagonale et par la formule de changement de bases : $A = VD{}^tU$ avec V la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$ qui est donc aussi orthogonale.

12.4 Symétriques positifs et définis positifs

12.25 Initialisation : si $S \in \mathcal{S}_1^+(\mathbb{R})$ alors $S = (a)$ avec $a \geqslant 0$ et en posant $T = (\sqrt{a})$ on a bien $S = {}^tTT$.
Hérédité : soit $n \geqslant 2$, supposons que cette propriété soit vraie pour toutes les matrices symétriques positives de taille $n-1$. On décompose la matrice S (symétrique) par blocs $S = \begin{pmatrix} a & {}^tC \\ C & A \end{pmatrix}$ où $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne et $A \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On cherche une matrice triangulaire supérieure T,

qui s'écrit donc sous la forme $T = \begin{pmatrix} b & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ une matrice ligne et $B \in T^+_{n-1}(\mathbb{R})$.

L'équation $S = {}^tTT$ équivaut au système (S) : $\big(a = b^2,\ b\,{}^tL = C,\ {}^tLL + {}^tBB = A\big)$. On aimerait donc poser $(b = \sqrt{a},\ L = \frac{1}{b}{}^tC)$ et prouver l'existence (par l'hypothèse de récurrence certainement) d'une matrice triangulaire B telle que ${}^tBB = A - {}^tLL$. Il faut donc prouver premièrement que $a \geqslant 0$ et considérer les deux cas : $a > 0$ et $a = 0$ auquel cas il faudra forcément prouver que $C = 0$ aussi.

La condition S "positive" se traduit par le fait que si $x \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXSX \geqslant 0$ d'où la relation (1) : $ax^2 + 2x\,{}^tYC + {}^tYAY \geqslant 0$ (car ${}^tYC = {}^tCY$).

- Si $a = 0$, la relation (1) avec $Y = C$ équivaut au fait que $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x\,{}^tCC + {}^tCAC \geqslant 0$ mais une fonction affine qui reste positive sur $\mathbb{R}$ est forcément constante donc ${}^tCC = ||C||^2 = 0$ implique que $C = 0$. Reprenons la relation (1) avec Y quelconque, on a donc $\forall Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYAY \geqslant 0$ ce qui permet d'affirmer que A est symétrique positive et l'hypothèse de récurrence nous dit alors qu'il existe une matrice $B \in T^+_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$. Le système (S) est donc vérifié avec le choix $b = 0$, $L = 0$. On a bien $S = {}^tTT$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
- Si $a > 0$, on prend $b = \sqrt{a}$ et $L = \frac{1}{b}{}^tC$ (avec (S)) et on doit trouver B triangulaire telle que ${}^tBB = A - {}^tLL$. Il suffit donc de prouver que $A - {}^tLL$ est symétrique positive et d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Posons $U = A - {}^tLL = A - \frac{1}{a}C{}^tC$ et reprenons le polynôme de degré 2 en x de la relation (1). Son discriminant est donc négatif ce qui s'écrit $\Delta = 4({}^tYC)^2 - a\,{}^tYAY) \leqslant 0$ ce qui équivaut, comme $({}^tYC)^2 = {}^tYC{}^tCY$, à ${}^tYC{}^tCY - a\,{}^tYAY = a\Big({}^tY\big(\frac{1}{a}C{}^tC - A\big)Y\Big) \leqslant 0$. On a donc $\forall Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ {}^tY\big(A - \frac{1}{a}C{}^tC\big)Y \geqslant 0$. C'est une des CNS pour que $A - \frac{1}{a}C{}^tC$ soit positive (elle est clairement symétrique). Par hypothèse de récurrence, il existe $B \in T^+_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tBB = A - {}^tLL = A - \frac{1}{a}C{}^tC$. D'après (S) : $A = {}^tTT$ avec $T = \begin{pmatrix} b & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Par principe de récurrence, on a la décomposition de CHOLESKY : $\forall S \in \mathcal{S}^+_n(\mathbb{R}),\ \exists T \in T^+_n(\mathbb{R}),\ S = {}^tTT$.

12.26 **a.** On décompose $X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$ dans une base de vecteurs propres (associés aux valeurs propres $\alpha_k > 0$), alors $AX = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k X_k$ et comme ces vecteurs propres peuvent être choisis orthogonaux entre eux deux à deux : ${}^tXAX = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k ||X_k||^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \Longrightarrow X = 0$.

b. On sait que $\text{rang}\,(B) \leqslant \text{Min}(n, m)$ donc si $m > n$ on a $\text{rang}\,(B) < m$ donc deux colonnes de B (donc de M) sont proportionnelles et M n'est alors pas inversible.

c. $\begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \big(AX + {}^tBY = 0 \text{ et } BX = 0\big)$. On multiplie la première équation par ${}^tX$ et on obtient $X = 0$ d'après **1**. Alors ${}^tBY = 0 \Longrightarrow Y = 0$ car ${}^tB$ "est injective" d'après le théorème du rang. Ainsi $\text{Ker}(M) = \{0\}$ donc M inversible car on est en dimension finie.

d. On calcule et on trouve, car ${}^tA = A$: ${}^tQMQ = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -BA^{-1}{}^tB \end{pmatrix}$ donc, comme $\det(Q) = 1$, on a $\det(M) = (-1)^m \det(A)\det(BA^{-1}{}^tB)$ avec $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k > 0$ donc $\det(BA^{-1}{}^tB) \neq 0$.

12.27 On a $\varphi(X,Y) = \varphi(Y,X)$ en prenant la transposée de la matrice par blocs (ça ne change pas le déterminant) : ${}^t\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ X & A \end{pmatrix}$ car A est symétrique. On a la bilinéarité par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne par exemple.

A est symétrique, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $A = PD{}^tP$, $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^*_+$. Alors calculons le produit par blocs : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & D \end{pmatrix}$ avec $Y = {}^tPX$. Ensuite

$\begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D^{-1}Y & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^tYDY & {}^tY \\ 0 & D \end{pmatrix}$ d'où $\varphi(X,X) = -{}^tYDY = -\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 < 0$ si $X \neq 0 \Longleftrightarrow Y \neq 0$.

12.28 **a.** Si λ valeur propre de S et $X \neq 0$ associé, alors $SX = \lambda X$ et ${}^tXSX = \lambda||X||^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$. Réciproquement, si X se décompose $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k X_k$ dans une base orthonormale de vecteurs propres de S, ${}^tXSX = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant 0$ car toutes les valeurs propres sont positives.
Il suffit de prendre le vecteur $X = (0 \ \cdots \ 0 \ x_i \ 0 \ \cdots \ 0 \ x_j \ 0 \ \cdots \ 0)$ dans ce qui précède et on à ${}^tXSX = {}^tX'S'X'$ avec $X' = {}^t(x_i \ x_j)$ et $S' = \begin{pmatrix} s_{i,i} & s_{i,j} \\ s_{j,i} & s_{j,j} \end{pmatrix}$ d'où S' est positive et son déterminant aussi.
b. Si rang $(S) = 1$, d'après le théorème spectral, la matrice S est orthosemblable à $D = \mathrm{diag}(\mathrm{Tr}\ (S), 0, \cdots, 0)$ (avec $\mathrm{Tr}\ (S) > 0$ car $S \in S_n^+$ et $S \neq 0$) : il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telle que $S = PD{}^tP = U{}^tU$ en posant $U = PX$ avec $X = {}^t(\sqrt{\mathrm{Tr}\ (S)}, 0, \cdots, 0) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
c. Si $S = {}^tMM$, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXSX = {}^tX{}^tMMX = ||MX||^2 \geqslant 0$. Réciproquement, si $S \in S_n^+$, par le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $\mathrm{Sp}(S) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tels que $S = PD{}^tP$ et il suffit de prendre $M = P\Delta{}^tP$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$.
d. Il existe donc $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A = {}^tMM$ et $B = {}^tNN$ donc, en définissant la matrice $P = M{}^tN$, on a $\mathrm{Tr}\ (AB) = \mathrm{Tr}\ ({}^tMM{}^tNN) = \mathrm{Tr}\ (N{}^tMM{}^tN) = \mathrm{Tr}\ ({}^tPP) \geqslant 0$.
e. Comme $A \in S_n^+$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$ donc $a_{i,j} = (C_i|C_j)$ où C_k est le vecteur associé à la k-ième colonne de M. Grâce à **a.**, on a $\begin{vmatrix} s_{i,i} & s_{i,j} \\ s_{j,i} & s_{j,j} \end{vmatrix} \geqslant 0$ avec $s_{i,j} = a_{i,j}$ mais aussi avec $s_{i,j} = b_{i,j}$ si $B \in S_n^+$ donc $a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}^2 \geqslant 0$ et $a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}^2 \leqslant 0$. Ainsi : $(C_i|C_j)^2 = a_{i,j}^2 = a_{i,i}a_{j,j} = ||C_i||||C_j||$ donc C_i et C_j sont colinéaires avec CAUCHY-SCHWARZ donc A est de rang 1.

La réciproque est vraie en remontant les arguments car alors $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}^2 = 0$.

12.29 On diagonalise $A = PD{}^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$, on pose aussi $C = {}^tPBP$ de sorte que $\mathrm{Tr}\ (A) = \mathrm{Tr}\ (D)$, $\mathrm{Tr}\ (B) = \mathrm{Tr}\ (C)$ et même $\mathrm{Tr}\ (AB) = \mathrm{Tr}\ (DC)$. Alors nous avons $\mathrm{Tr}\ (DC) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k c_{k,k}$. Or $c_{k,k} = {}^tE_kCE_k \geqslant 0$ où E_k est le k-ième vecteur de la base canonique car C est aussi symétrique positive (à vérifier) : $0 \leqslant \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\Big) \times \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} c_{j,j}\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k c_{k,k} \Longrightarrow 0 \leqslant \mathrm{Tr}\ (AB) \leqslant \mathrm{Tr}\ (A)\mathrm{Tr}\ (B)$.

12.30 $I_n + AB = A(A^{-1} + B)$ donc $I_n + AB \in GL_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow A^{-1} + B \in GL_n(\mathbb{R})$. Mais A^{-1} est symétrique définie positive comme A (valeurs propres sont les inverses de celles de A) donc, si X est un vecteur colonne non nul, on a ${}^tX(A^{-1} + B)X = {}^tXA^{-1}X + {}^tXBX$ est la somme de ${}^tXA^{-1}X > 0$ et de ${}^tXBX \geqslant 0$ par hypothèse donc ${}^tX(A^{-1} + B)X \neq 0$ donc X n'est pas un vecteur du noyau de $A^{-1} + B$ qui est donc inversible.

12.31 Supposons qu'on ait $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$, alors $I_n = (A+B)(A+B)^{-1} = (A+B)(A^{-1} + B^{-1})$ donc $I_n = I_n + I_n + AB^{-1} + BA^{-1}$ donc $AB^{-1} + BA^{-1} + I_n = 0$ et en multipliant par A à droite : $AB^{-1}A + B + A = 0$. Si X est alors un vecteur colonne non nul, on a ${}^tXAB^{-1}AX + {}^tXBX + {}^tXAX = 0 = {}^tYB^{-1}Y + {}^tXBX + {}^tXAX$ car A est symétrique en posant $Y = AX \neq 0$. Or B^{-1}, B et A sont symétriques définies positives et ceci est donc absurde. Par conséquent : $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

12.32 On a $\varphi(X,Y) = \varphi(Y,X)$ en prenant la transposée de la matrice par blocs (ça ne change pas le déterminant) : ${}^t\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ X & A \end{pmatrix}$ car A est symétrique. On a la bilinéarité par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne par exemple.
A est symétrique, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $A = PD{}^tP$, $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors calculons le produit par blocs : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & D \end{pmatrix}$ avec $Y = {}^tPX$. Ensuite
$\begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D^{-1}Y & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^tYDY & {}^tY \\ 0 & D \end{pmatrix}$ d'où $\varphi(X,X) = -{}^tYDY = -\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 < 0$ si $X \neq 0 \Longleftrightarrow Y \neq 0$.

12.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

12.33 **a.** On sait que puisque u est un endomorphisme symétrique, il existe une B.O.N. $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. On constate que si $x \in \mathsf{Vect}(x_k, \cdots, x_n)$, on a $x = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i x_i$ donc $(x|u(x)) = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \leqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_k ||x||^2$. Ceci nous conduit à chercher un vecteur x comme dans l'énoncé dans $F_k = \mathsf{Vect}(e_1, \cdots, e_k) \cap \mathsf{Vect}(x_k, \cdots, x_n)$. Par la formule de GRASSMANN : $\dim(F_k) = k + (n-k+1) - \dim(\mathsf{Vect}(e_1, \cdots, e_k) + \mathsf{Vect}(x_k, \cdots, x_n)) \geqslant 1$ car le sous espace vectoriel $\mathsf{Vect}(e_1, \cdots, e_k) + \mathsf{Vect}(x_k, \cdots, x_n)$ est inclus dans E, il est donc de dimension inférieure à n. Il existe donc un vecteur x unitaire dans F_k pour lequel on a bien, d'après le calcul précédent : $(x|u(x)) \leqslant \lambda_k$.

b. On pose $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ cette base orthonormale. Pour un entier $k \in [\![1; n]\!]$, on pose $F_k = \mathsf{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$, d'après **a.** il existe un vecteur unitaire $v_k \in F_k$ tel que $(v_k|u(v_k)) \leqslant \lambda_k$. On complète (x_k) en une B.O.N $(v'_1, \cdots, v'_{k-1}, v_k)$ de F_k et on recommence, il existe un vecteur v_{k-1} unitaire dans $\mathsf{Vect}(v'_1, \cdots, v'_{k-1})$ tel que $(v_{k-1}|u(v_{k-1})) \leqslant \lambda_{k-1}$ etc... ce qui permet de construire une B.O.N $(v_1, \cdots, v_k)$ de F_k qui vérifie les conditions $\forall i \in [\![1; k]\!]$, $(v_i|u(v_i)) \leqslant \lambda_i$. On complète enfin cette famille orthonormale en une B.O.N. $(v_1, \cdots, v_k, w_{k+1}, \cdots, w_n)$ de E mais par construction $(e_1, \cdots, e_k, w_{k+1}, \cdots, w_n)$ est aussi une B.O.N. de E. Alors $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{k}(e_i|u(e_i)) + \sum_{i=k+1}^{n}(w_i|u(w_i)) = \sum_{i=1}^{k}(v_i|u(v_i)) + \sum_{i=k+1}^{n}(w_i|u(w_i))$ et on obtient enfin l'inégalité voulue : $\sum_{i=1}^{k}(e_i|u(e_i)) = \sum_{i=1}^{k}(v_i|u(v_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{k}\lambda_i$.

12.34 **a.** D'après le cours, il existe une base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ (adaptée à r) telle qu'en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$, on ait $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Soit un polynôme réel qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et qui vérifie $P(1) = 1$ et $|P(e^{i\theta})| = 1$. On a donc $P(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k$. Or on sait que $\forall k \in \mathbb{N}$, $R_\theta^k = R_{k\theta}$ (par récurrence simple en notant $R_x = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$) donc $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ 0 & \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(r)) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\theta) & -\sum_{k=0}^{n} a_k\sin(k\theta) \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} a_k\sin(k\theta) & \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Re}\,(P(e^{i\theta})) & -\mathrm{Im}(P(e^{i\theta})) \\ 0 & \mathrm{Im}(P(e^{i\theta})) & \mathrm{Re}\,(P(e^{i\theta})) \end{pmatrix}.$$

Or, par hypothèse, $P(1) = 1$ et, comme $P(e^{i\theta}) \in \mathbb{U}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(e^{i\theta}) = e^{i\alpha}$ donc $P(r)$ est la rotation de même axe que r (même orientation) et d'angle α car $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(r)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

b. On pose $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et r_0 telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme les colonnes de A représentent la famille (v_2, v_3, v_1) qui est aussi une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$, on a $A \in SO(3)$ et r_0 est bien une rotation de $\mathbb{R}^3$. Son axe est engendré par le vecteur $a = v_1 + v_2 + v_3$ (clairement fixe par r_0) et on décide de l'orienter par le vecteur a. Son angle θ vérifie $\mathrm{Tr}\,(A) = 0 = 2\cos\theta + 1$ donc $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. En prenant $x = v_1$, on a $[a, x, r_0(x)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$ donc $\sin\theta > 0$ et finalement $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

c. $r = P(r_0)$ avec $P = \frac{1}{3}\big(2X^2 - X + 2\big)$ qui vérifie, comme $1 + j + j^2 = 0$, les conditions de la question **a.**, à savoir $P(1) = 1$ et $P(e^{2i\pi/3}) = P(j) = \frac{1}{3}\big(2j^2 - j + 2\big) = \frac{1}{3}\big(2j^2 + j^2 + 1 + 2\big) = j^2 + 1 = -j = e^{\frac{-i\pi}{3}}$ donc r est la rotation autour de l'axe orienté par $v_1 + v_2 + v_3$ et d'angle $\theta_0 = -\frac{\pi}{3}$.

Les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(1) = 1$ et $|P(e^{i\theta})| = 1$ dans le cas où $r = r_0$ sont ceux qui vérifient $P(1) = 1$ et $P(j) = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Ce sont les P tels que (car P est réel) $P(1) = 1$, $P(j) = e^{i\alpha}$ et $P(j^2) = e^{-i\alpha}$.

• D'après LAGRANGE, seul $P = P_1 = 1\Big(\frac{X-j}{1-j}\Big)\Big(\frac{X-j^2}{1-j^2}\Big) + e^{i\alpha}\Big(\frac{X-j^2}{j-j^2}\Big)\Big(\frac{X-1}{j-1}\Big) + e^{-i\alpha}\Big(\frac{X-j}{j^2-j}\Big)\Big(\frac{X-1}{j^2-1}\Big)$ convient avec $P_1 = \frac{X^2+X+1}{3} + e^{i\alpha}\frac{X^2+jX+j^2}{3j^2} + e^{-i\alpha}\frac{X^2+j^2X+j}{3j}$ ce qui donne après simplifications le polynôme $P_1 = \frac{1}{3}\Big[\Big(1 + 2\cos\big(\alpha + \frac{2\pi}{3}\big)\Big)X^2 + \Big(1 + 2\cos\big(\alpha - \frac{2\pi}{3}\big)\Big)X + 1 + 2\cos(\alpha)\Big]$ comme seule solution.

• On pouvait aussi chercher P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ et résoudre $P(1) - 1 = P(j) - e^{i\alpha} = 0$ ce qui donne le système $\begin{cases} a + b + c = & 1 \\ aj^2 + bj + c = & \cos\alpha + i\sin\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = & 1 \\ -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + c = & \cos\alpha \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = & \sin\alpha \end{cases}$ qu'on sait résoudre.

12.35 ($\Longrightarrow$) Pour $(x,y) \in E^2$, soit X et Y les vecteurs colonnes respectifs des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Posons $\Phi(x,y) = {}^tXMY$, alors Φ est bilinéaire par linéarité de la transposée et bilinéarité du produit matriciel, de plus Φ est symétrique car M l'est : $\Phi(y,x) = {}^tYMX = {}^t({}^tX{}^tMY) = {}^t({}^tXMY) = {}^tXMY = \Phi(x,y)$.

Comme $M \in S_n^{++}$, il existe une matrice $A \in S_n^{++}$ telle que $M = A^2 = {}^tAA$ (cette matrice est appelée la racine carrée de M) et on a $\Phi(x,x) = {}^tX{}^tAAX = ||AX||^2$ donc Φ est positive. Comme A est inversible, on a aussi $\Phi(x,x) = 0 \iff AX = 0 \iff X = 0 \iff x = 0$. Ainsi Φ est bien un produit scalaire sur E.

($\Longleftarrow$) M est alors symétrique car Φ l'est. Si $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, on a $\Phi(x,x) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \Phi(e_i, e_j)$ par bilinéarité de Φ donc $\Phi(x,x) = {}^tXMX$ par définition du produit matriciel. On en déduit que $\forall X \neq 0$, ${}^tXMX = \Phi(x,x) > 0$ car Φ est défini positif. Par conséquent, d'après le cours : $M \in S_n^{++}$.

12.36 **a.** Si M est symétrique positive, M est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives donc $M = PD{}^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale positive et $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXMX = {}^tYDY$ en posant $Y = {}^tPX$. Avec des notations logiques : ${}^tXMX = {}^tYDY = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geqslant 0$.

b. On peut classer les valeurs propres de M dans l'ordre croissant : $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Si $\lambda_1 > 0$ on prend $\alpha = 0$ et si $\lambda_1 \leqslant 0$, on prend $a = -\lambda_1 + 1 \geqslant 0$: $\forall \lambda \geqslant \alpha$, $M + \lambda I_n = P\mathrm{diag}(\lambda_1 + a, \cdots, \lambda_n + a){}^tP \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (symétrique et toutes les valeurs propres strictement positives) dans les deux cas.

c. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $S_n^{+}(\mathbb{R})$ qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, ${}^tXM_nX \geqslant 0$ et l'application $\varphi_X : M \mapsto {}^tXMX$ est continue car linéaire en dimension finie. Ainsi : ${}^tXMX = \varphi_X(M) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_X(M_n) \geqslant 0$ (par caractérisation séquentielle de la continuité) et on en déduit d'après la question **a.** que M est symétrique positive.

d. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe d'après la question **b.** un réel $\lambda > 0$ tel que $A + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, mais $f(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $f(S) = A + \lambda I_n$. De même $I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc il existe $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $I_n = f(S')$. On a alors $A = A + \lambda I_n - \lambda I_n = f(S) - \lambda f(S') = f(S - \lambda S')$ par linéarité de f et $S - \lambda S' \in S_n(\mathbb{R})$ donc f est surjective.

Comme on est en dimension finie ($\mathrm{dim}(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$), on peut conclure que $f \in GL(S_n(\mathbb{R}))$.

e. Par exemple, dès que $P \in O_n(\mathbb{R})$, l'application $f_P : M \mapsto {}^tPMP$ qui est un automorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ et conserve le spectre (matrices orthosemblables) donc envoie $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

12.37 Matriciellement : si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in O(3)$ est dans le centre de $O(3)$ alors $\forall A \in O(3),\ AM = MA$ par définition. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(3)$ et, après calculs, on a $b = c = d = g = 0$ et que $e = i$. On recommence avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3)$ et on trouve de même $f = h = 0$ et $a = e$. Ainsi $M = aI_3$ et comme $M \in O(3)$, on a $a = \pm 1$. Réciproquement I_3 et $-I_3$ commutent avec toutes les matrices de $O(3)$. On en déduit que le centre de $O(3)$ est l'ensemble (et même le sous-groupe de $O(3)$) $C = \{I_3, -I_3\}$.

Vectoriellement : si E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ (on généralise) et $u \in O(E)$ qui est dans le centre de $O(E)$, alors $\forall v \in O(E),\ u \circ v = v \circ u$ par définition. Les réflexions étant les plus simples des isométries, soit a un vecteur unitaire quelconque de E et $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$. Comme u commute avec la réflexion s_H, on a $u(s_H(a)) = s_H(u(a))$ ce qui montre que $u(-a) = -u(a) = s_H(u(a))$ donc $u(a) \in \mathrm{Ker}(s_H + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(a)$. Alors il existe un réel λ tel que $u(a) = \lambda a$ mais comme u est une isométrie, $\lambda = \pm 1$ car $||u(a)|| = ||a||$.

Supposons maintenant qu'il existe deux vecteurs unitaires b et c orthogonaux tels que $u(b) = b$ et $u(c) = -c$ et posons $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(b + c)$, alors d est unitaire donc $u(d) = \pm d$ d'après ce qui précède mais par linéarité de u, on a $u(d) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(b - c)$ qui est différent de $\pm d$, ce qui amène une contradiction.

Si on prend une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, on ne peut avoir grâce à ce qui précède que $\big(\forall k \in [\![1;n]\!],\ u(e_k) = e_k\big)$ ou $\big(\forall k \in [\![1;n]\!],\ u(e_k) = -e_k\big)$. Ainsi $u = \mathrm{id}_E$ ou $u = -\mathrm{id}_E$. Réciproquement, ces deux isométries commutent avec toutes les autres donc le centre de $O(E)$ est à nouveau l'ensemble (et même le sous-groupe de $O(E)$) $C = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$.

12.38 • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X$, par une récurrence facile, $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X$, en particulier $A^{2p+1}X = \lambda^{2p+1}X$, ceci prouve que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$. Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable donc $\bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathbb{R}^n$ donc $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\big(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\big) = n$. Puisque $f_p : t \mapsto t^{2p+1}$ est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si on écrit $Sp(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ distincts, alors $\lambda_1^{2p+1}, \cdots, \lambda_r^{2p+1}$ sont aussi distincts ce qui fait que la famille de sous-espaces $\Big(\mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\Big)_{\lambda \in Sp(A)}$ est en somme directe donc $\dim\Big(\bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\Big) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\big(\mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\big) \leqslant n$.

On a donc $n = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\big(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\big) \leqslant \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\big(\mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\big) \leqslant n$ d'après les inclusions précédentes donc les deux sommes précédentes valent n et toutes ces inclusions sont des égalités, ce qui justifie que $\forall \lambda \in Sp(A),\ \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$ et $Sp(A^{2p+1}) = \{\lambda^{2p+1} \mid \lambda \in Sp(A)\}$ car on vient de voir que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$ (on a le plein de valeurs propres pour A^{2p+1}).

Comme B est aussi symétrique, par symétrie, $\forall \lambda \in Sp(B),\ \mathrm{Ker}(B - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(B^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$.

• Revenons à l'exercice, si $A^{2p+1} = B^{2p+1}$, alors $Sp(A^{2p+1}) = Sp(B^{2p+1})$ donc, d'après ce qui précède, $Sp(A) = Sp(B)$ avec la bijection f_p. Ainsi, pour toute valeur propre $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, on obtient l'égalité $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n) = \mathrm{Ker}(B^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n) = \mathrm{Ker}(B - \lambda I_n)$. Comme A et B sont diagonalisables, il existe une base orthonormale de vecteurs propres de A, qui est donc aussi une base de vecteurs propres de B (avec les mêmes valeurs propres), par conséquent $A = B$.

C'est faux si on prend des puissances paires : $(-I_2)^2 = I_2^2$ alors que $-I_2 \neq I_2$.

C'est faux si on ne suppose pas A et B symétriques : $A^3 = I_3 = I_3^3$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors que $A \neq I_3$.

12.39 **a.** A est symétrique réelle donc A est diagonalisable (et même orthosemblable à une matrice diagonale) d'après le théorème spectral : c'est le plus rapide !

b. 1 est valeur propre de A car $A(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 = v_1$. De même -2 est valeur propre de A et $E_{-2}(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$ car $A + 2I_3 = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$. Une base orthonormale de vecteurs propres $\mathcal{B}$ est formée de $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} v_1$, $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $f_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. En posant $P \in O(3)$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, $A = PD\,{}^tP$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

d. On a $U_{n+1} = AU_n$ avec ${}^tU_n = (u_n\ v_n\ w_n)$ donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0 = PD^n\,{}^tPU_0$.
Si ces trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ses suites coefficients convergent) donc $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi en posant $V_n = {}^tPU_n$.

Or $V_n = D^n V_0$ avec ${}^tV_0 = \left(\dfrac{u_0 + v_0 + w_0}{\sqrt{3}}, \dfrac{u_0 - v_0}{\sqrt{2}}, \dfrac{u_0 + v_0 - 2w_0}{\sqrt{6}}\right)$ et $D^n = \mathrm{diag}(1, (-2)^n, (-2)^n)$.

La condition nécessaire et suffisante sur u_0, v_0 et w_0 pour que les trois suites convergent est donc que $\dfrac{u_0 - v_0}{\sqrt{2}} = \dfrac{u_0 + v_0 - 2w_0}{\sqrt{6}} = 0 \iff u_0 = v_0 = w_0$ car une suite $\big(\lambda(-2)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge que si $\lambda = 0$.

12.40 **a.** Comme par hypothèse $f \in GL(E)$, l'image d'une base de E par f est une base de E. Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base de E. De plus : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \implies \big(f(e_i)|f(e_j)\big) = (e_i|e_j) = 0$ donc $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale.

b. Si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ et $i \neq j$, on a $(e_i - e_j) \perp (e_i + e_j)$ donc, par propriétés du produit scalaire, il vient : $\big(f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j)\big) = 0 \implies \big(f(e_i)|f(e_i)\big) = \big(f(e_j)|f(e_j)\big)$.

Ainsi : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ ||f(e_k)||^2 = ||f(e_1)||^2 = \alpha^2$ en posant $\alpha = ||f(e_1)|| > 0$.

c. On pose $g = \dfrac{1}{\alpha} f$.

<u>Méthode 1</u> : D'après ce qui précède, g transforme la base orthonormale $\mathcal{B}$ est une autre base orthonormale $\left(\dfrac{1}{\alpha}f(e_1), \cdots, \dfrac{1}{\alpha}f(e_n)\right)$ donc $g \in O(E)$: g est une isométrie vectorielle de E.

<u>Méthode 2</u> : soit $x \in E$ qu'on décompose $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, alors $||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale. De plus $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k f(e_k)$ donc $||f(x)||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 ||f(e_k)||^2$ car $\mathcal{B}'$ est orthogonale. Donc $||f(x)||^2 = \alpha^2 ||x||^2$ par **b.** et $||g(x)||^2 = ||x||^2$: g conserve la norme et $g \in O(E)$ encore une fois.

• Comme g est une isométrie, elle conserve le produit scalaire. Ainsi, si $(x,y) \in E^2$, on a $(g(x)|g(y)) = (x|y)$ de qui s'écrit $\left(\dfrac{f(x)}{\alpha}\middle|\dfrac{f(y)}{\alpha}\right) = (x|y)$ et, par bilinéarité du produit scalaire, on obtient $(f(x)|f(y)) = \alpha^2(x|y)$.

On pouvait aussi obtenir ce résultat de manière directe :

• Si $(x,y) \in E^2$ et $||x|| = ||y|| = 1$, $(x+y) \perp (x-y)$ donc $\big(f(x+y)|f(x-y)\big) = 0 \iff ||f(x)|| = ||f(y)||$ par hypothèse. Notons, d'après ce qui précède, $\alpha > 0$ la norme des images par f de tout vecteur unitaire de

E. Par linéarité, si $x \neq 0_E$, $||f(x)|| = ||x|| \left|\left|f\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| = \alpha||x||$ (vrai aussi pour $x = 0_E$). Par polarisation : $\forall(x,y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = \frac{1}{4}\Big(||f(x)+f(y)||^2 + ||f(x)-f(y)||^2\Big) = \frac{\alpha^2}{4}\Big(||x+y||^2 + ||x-y||^2\Big) = \alpha^2(x|y)$.

• Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, on a $A = \big((f(e_j)|e_i)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons $G = A^TA = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $c_{i,j} = \big(f(e_i)|f(e_j)\big)$ (A^TA est la matrice de GRAM associée à la famille $\mathcal{B}'$). Comme $\mathcal{B}'$ est orthogonale, A^TA diagonale car $c_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. On a montré à la question **b.** que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ c_{k,k} = \alpha^2$ donc $A^TA = \alpha^2 I_n$. Ainsi : $\forall(x,y) \in E^2,\ \big(f(x)|f(y)\big) = X^TA^TAY = \alpha^2X^TY = \alpha^2(x|y)$ avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

12.41 Du cours.

12.42 **a.** Soit $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de la matrice M. Puisque M est une matrice orthogonale, $\mathcal{B} = (C_1, \cdots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Comme la base canonique $\mathcal{B}_0$ est aussi une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, on sait que, comme M est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, on a $m_{i,j} = (e_i|C_j)$. Par conséquent, $\Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\Big| = \Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(e_i|C_j)\Big| = \Big|\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(e_i\Big|\sum\limits_{j=1}^{n}C_j\Big)\Big| = \Big|\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}e_i\Big|\sum\limits_{j=1}^{n}C_j\Big)\Big| = |(u|v)|$ en posant $u = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ et $v = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j$. Les deux vecteurs sont de norme $\sqrt{n}$ par PYTHAGORE. Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $|(u|v)| \leqslant ||u||\,||v|| = (\sqrt{n})^2 = n$ ainsi : $\Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\Big| \leqslant n\ \ (I_1)$.

Il y a égalité dans l'inégalité (I_1) si et seulement si u et v sont des vecteurs colinéaires. Or comme u et v ont même norme, ils sont colinéaires si et seulement si $v = \pm u$. De plus, $v = Mu$. On peut donc conclure que : il y a égalité dans (I_1) si et seulement si u est vecteur propre de M (associé à la valeur propre 1 ou -1).

b. Comme M est orthogonale, on a $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$ (car la norme de la j-ième colonne de la matrice M vaut 1) donc les coefficients $m_{i,j}$ sont dans l'intervalle $[-1;1]$ et il vient $|m_{i,j}| \geqslant m_{i,j}^2$. En sommant : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|m_{i,j}| \geqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2 = \sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\Big) = \sum\limits_{j=1}^{n} 1 = n\ \ (I_2)$.

Il y a égalité dans (I_2) si et seulement s'il y a égalité dans les n^2 inégalités qu'on a sommé pour obtenir (I_2), c'est-à-dire si $\forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ |m_{i,j}| = m_{i,j}^2$ ou encore si et seulement si M ne contient que des 0, des 1 ou des -1. Mais ceci ne peut se produire que s'il y a un seul ± 1 par ligne et par colonne. Il y a donc $2^n n!$ matrices pour lesquelles il y a égalité (choix des cases non nulles et des ± 1 pour ces n cases). On peut constater que cet ensemble de matrices constitue un sous-groupe de $O(n)$: c'est le groupe de l'hyper-cube en dimension n.

c. Pour $j \in [\![1;n]\!]$, on définit le nouveau vecteur $v_j = (|m_{1,j}|, \cdots, |m_{n,j}|)$ et toujours $u = (1, \cdots, 1)$. Alors $(u|v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}|m_{i,j}| \leqslant ||u||\,||v_j|| \leqslant \sqrt{n} \times 1 = \sqrt{n}$. Par conséquent : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|m_{i,j}| = \sum\limits_{j=1}^{n}(u|v_j) \leqslant n\sqrt{n}\ \ (I_3)$.

Il y a égalité dans (I_3) si et seulement s'il y a égalité dans les n inégalités qu'on a sommé pour obtenir (I_3), c'est-à-dire si et seulement si tous les v_j sont colinéaires à u, c'est-à-dire si et seulement si tous les coefficients de la matrice M sont égaux en valeur absolue. Mais comme la somme des carrés des coefficients d'une colonne vaut 1, cette valeur constante de la valeur absolue ne peut valoir que $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, il y a égalité dans (I_3) si et seulement si M est une matrice de $O(n)$ qui vérifie $\forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ (matrice de

HADAMARD). Par exemple, $M = H_4 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Autre méthode : on se rappelle du produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $(A|B) = \text{Tr}\,(A^T B)$ qui s'écrit aussi $(A|B) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$ après calculs. Posons $J = (j_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $j_{i,j} = 1$ si $m_{i,j} \geqslant 0$ et $j_{i,j} = -1$ si $m_{i,j} < 0$. Par construction, on a $m_{i,j}j_{i,j} = |m_{i,j}|$ donc $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|m_{i,j}\right| = (M|J) \leqslant ||M||\,||J||$ d'après CAUCHY-SCHWARZ et $||M||^2 = \text{Tr}\,(M^T M) = \text{Tr}\,(I_n) = n$ et $||J||^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1 = n^2$ ce qui donne à nouveau $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|m_{i,j}\right| \leqslant \sqrt{n^3} = n\sqrt{n}$. Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement M et J sont colinéaires si et seulement si les coefficients de M sont égaux en valeur absolue, et on retrouve les matrices de HADAMARD.

12.43 **a.** Soit $P = \sum\limits_{i=1}^{m+1} v_i X^{i-1} \in \mathbb{R}_m[X]$, on lui associe $V \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tV = (v_1 \cdots v_{m+1})$ (et réciproquement à $V \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ on associe $P \in \mathbb{R}_m[X]$). En effectuant le produit matriciel, ${}^tVLV = \varphi(P^2)$. Par hypothèse, comme $\deg(P^2) \leqslant 2m = n$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ P^2(x) \geqslant 0$, on a $P^2 \in \mathbb{R}_n^o[X]$ donc ${}^tVLV \geqslant 0$ et (1) est vérifiée.

La matrice L est clairement symétrique, soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ une de ses valeurs propres, on a donc l'existence de $V \neq 0$ tel que $LV = \lambda V$. Alors ${}^tVLV = \lambda {}^tVV = \lambda ||V||^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$ car $||V||^2 > 0$. Ainsi $\text{Sp}(L) \subset \mathbb{R}_+$.

b. Si $P \in \varepsilon[X]$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = A(x)^2 + B(x)^2 \geqslant 0$ donc $a > 0$ sinon pour x assez grand on aurait $P(x) < 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$ sinon P changerait de signe au voisinage de ses deux racines réelles distinctes. Réciproquement, si $a > 0$ et $\Delta \leqslant 0$, on a $P = a\Big(X - \dfrac{b}{2a}\Big)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = \Big(\sqrt{a}\big(X - \dfrac{b}{2a}\big)\Big)^2 + \Big(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2\sqrt{a}}\Big)^2 \in \varepsilon[X]$.

Ainsi, une CNS pour que $P \in \varepsilon[X]$ est que $a > 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$.

c. Si $(P, Q) \in \varepsilon[X]^2$, il existe quatre polynômes A, B, C, D réels tels que $P = A^2 + B^2$ et $Q = B^2 + D^2$. Alors, par l'identité de LAGRANGE, on a $PQ = (A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC-BD)^2+(AD+BC)^2$ (penser aux modules complexes) ce qui montre que $PQ \in \varepsilon[X]$. Ainsi, $\varepsilon[X]$ est stable par produit.

d. Soit $P \in \mathbb{R}_n^o[X]$ et plus généralement un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

- Si $P = 0$, alors $P = 0^2 + 0^2 \in \varepsilon[X]$.
- Si $P \neq 0$, décomposons $P = \lambda \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod\limits_{j=1}^{s} (X^2 + b_jX + c_j)^{n_j}$ en produit de polynômes irréductibles réels avec $\lambda \neq 0$ le coefficient dominant de P, $r \geqslant 0$ le nombre de racines réelles distinctes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ de P, $2s$ le nombre de racines complexes non réelles distinctes de P, $m_i \geqslant 1$ les ordres de multiplicité des α_i, n_j les ordres de z_j et $\overline{z_j}$ les deux racines complexes non réelles de $X^2 + b_jX + c_j$ car $b_j^2 - 4c_j < 0$.
- Si on avait $\lambda < 0$, pour x assez grand on aurait $P(x) < 0$ (limite en $+\infty$) : NON. On pose donc $\lambda = \mu^2$.
- Si un des m_i était impair, $P(x) \underset{x\to\alpha_i}{\sim} A_i(x - \alpha_i)^{m_i}$ changerait de signe au voisinage de α_i : NON.

Ainsi, $P = \mu^2 \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{2p_i} \prod\limits_{j=1}^{s} (X^2 + b_jX + c_j)^{n_j}$ et tous les termes de ce produit sont dans $\varepsilon[X]$ car $\mu^2 = (\mu)^2 + 0^2$, $(X - \alpha_i)^{2p_i} = \Big((X - \alpha_i)^{p_i}\Big)^2 + 0^2$ et $X^2 + b_jX + c_j = \Big(X + \dfrac{b_j}{2}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\sqrt{4c_j - b_j^2}}{2}\Big)^2$. Comme $\varepsilon[X]$ est stable par produit d'après **c.**, on en déduit que $P \in \varepsilon[X]$.

On vient d'établir que $\mathbb{R}_n^o[X] \subset \varepsilon[X]$ et plus, généralement, que si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$, alors $P \in \varepsilon[X]$. Puisque si $P = A^2 + B^2$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = A(x)^2 + B(x)^2 \geqslant 0$:

$$\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + B^2\}.$$

e. Supposons $\forall V \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVLV \geqslant 0$. Soit $P \in \mathbb{R}_n^o[X]$, d'après la question **d.**, on peut écrire $P = A^2+B^2$. Comme les coefficients dominants de A^2 et B^2 sont positifs et ne peuvent s'annuler, $\deg(P) \leqslant n = 2m$ impose que $\deg(A) \leqslant m$ et $\deg(B) \leqslant m$. Si U est le vecteur colonne des coordonnées (dans la base canonique) du polynôme A et V le vecteur colonne des coordonnées de B (dans la base canonique), d'après la question **a.**, $\varphi(A^2) = {}^tULU$ et $\varphi(B^2) = {}^tVLV$. Ainsi, $\varphi(P) = \varphi(A^2+B^2) = \varphi(A^2) + \varphi(B^2) \geqslant 0$ donc (M) est réalisée. On vient de prouver que $(1) \Longrightarrow (M)$.

12.44 **a.** • Si $B = 0$ et $k > 0$, on a $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^TBX = 0 \geqslant k||BX||^2 = 0$ donc toute constante $k > 0$ convient.
• Si $B \neq 0$, notons $r = \text{rang}\,(B) \geqslant 1$ de sorte que, par la formule du rang, on ait $\dim(\text{Ker}(B)) = n - r \leqslant n-1$. On sait que $\text{Ker}(B)$ et $\text{Im}\,(B)$ sont supplémentaires orthogonaux car B est symétrique. Il existe d'après le théorème spectral une base orthonormale $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_r, V_{r+1}, \cdots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(V_{r+1}, \cdots, V_n)$ soit une base orthonormale de $\text{Ker}(B)$ et $(V_1, \cdots, V_r)$ une base orthonormale de $\text{Im}\,(B)$ constituée de vecteurs propres de B. Pour $i \in [\![1;r]\!]$, soit λ_i la valeur propre associée à V_i de sorte que $BV_i = \lambda_i V_i$. Puisque B est positive et que $V_i \notin \text{Ker}(B)$, $\lambda_i > 0$. Quitte à renuméroter les vecteurs de $\mathcal{B}$, supposons $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on écrit $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i V_i$, on a $BX = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x_i V_i$ donc $X^TBX = (BX|X) = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$ alors que $||BX||^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i^2 x_i^2$. Ainsi, pour $k \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc $X^TBX - k||BX||^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - k \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i^2 x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} (\lambda_i - k\lambda_i^2) x_i^2$.

- si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^TBX \geqslant k||BX||^2$, alors en particulier si on prend $X = X_i$ avec $i \in [\![1;r]\!]$, alors l'inégalité précédente montre que $\lambda_i - k\lambda_i^2 \geqslant 0$ car $x_i = 1$ et $x_j = 0$ si $i \neq j$ pour le vecteur X_i.
- Réciproquement, si on suppose $\forall i \in [\![1;r]\!],\ \lambda_i - k\lambda_i^2 \geqslant 0$, alors l'inégalité précédente montre que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^TBX - k||BX||^2 \geqslant 0$ car les x_i^2 sont positifs.

On vient de montrer, pour un réel $k > 0$, que $(\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^TBX - k||BX||^2 \geqslant 0) \Longleftrightarrow (\forall i \in [\![1;r]\!],\ \lambda_i - k\lambda_i^2 \geqslant 0)$. Il convient donc de choisir k tel que $k \leqslant \dfrac{1}{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1;r]\!]$. Et puisqu'on a classé ces valeurs selon l'inégalité $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r$, on a $0 < \dfrac{1}{\lambda_r} \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{1}{\lambda_1}$.
Les constantes $k > 0$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^TBX \geqslant k||BX||^2$ sont exactement les $k \in \left]0; \dfrac{1}{\lambda_r}\right]$: il en existe !
b. Comme avant, les valeurs propres de $A + \rho B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supposée définie positive sont des réels strictement positifs qu'on peut classer $0 < \alpha = \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). On note $(Y_1, \cdots, Y_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A + \rho B$ associés à ces valeurs propres. Comme avant, si $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i Y_i \in \mathbb{R}^n$, $X^T(A+\rho B)X = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \geqslant \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \alpha||X||^2$.
Par conséquent, si $BX = 0$, on a $X^T(A+\rho B)X = X^TAX + \rho X^TBX = X^TAX \geqslant \lambda||X||^2$ (1) en prenant $\lambda = \alpha > 0$. Comme en question **a.**, on peut montrer que les $\lambda > 0$ qui conviennent sont ceux de $]0;\alpha]$: il en existe !
c. Supposons l'existence d'un réel $\lambda > 0$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ BX = 0 \Longrightarrow X^TAX \geqslant \lambda||X||^2$.
<u>Cas élémentaires</u> : si $B = 0$, on a donc un réel $\lambda > 0$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^TAX \geqslant \lambda||X||^2$ ce qui montre que si $X \neq 0$, $X^TAX > 0$. La matrice A est donc symétrique définie positive par un théorème du cours et pour tout réel $\rho_0 > 0$, on aura $A + \rho_0 B = A$ définie positive. Si A est elle-même définie positive, pour tout réel $\rho_0 > 0$, pour $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il vient $X^T(A+\rho_0 B)X = X^TAX + \rho_0 X^TBX > 0$ car $X^TAX > 0$ et $X^TBX \geqslant 0$. Par conséquent, dans ce cas, $A + \rho_0 B$ est symétrique définie positive pour n'importe quelle valeur de $\rho_0 > 0$. On suppose donc dans la suite que $B \neq 0$ et A n'est pas symétrique définie positive.
Soit $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec la base orthonormée $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_r, V_{r+1}, \cdots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vue **a.**, on peut décomposer $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i V_i \in \text{Im}\,(B)$ et $X_2 = \sum\limits_{i=r+1}^{n} x_i V_i \in \text{Ker}(B)$. Alors pour tout $\rho > 0$,

$X^T(A+\rho B)X = X^T AX + \rho X_2^T BX_2 = X_1^T AX_1 + X_2^T AX_2 + 2X_1^T AX_2 + \rho X_1^T BX_1$.

- Par hypothèse, on a $X_2^T AX_2 \geqslant \lambda||X_2||^2$ avec $\lambda > 0$ car X_2 vérifie $BX_2 = 0$.
- En notant α la plus petite valeur propre de A ($a \leqslant 0$ car A n'est pas définie positive) et en décomposant X_1 dans une base orthonormale de vecteurs propres de A, $X_1^T AX_1 \geqslant \alpha||X_1||^2$.
- En notant $a = \underset{\alpha\in Sp(A)}{\mathrm{Max}} |\alpha| \geqslant 0$, $||AX_2||^2 \leqslant a^2||X_2||^2$ donc $||AX_2|| \leqslant a||X_2||$. Par Cauchy-Schwarz, $|(AX_1|X_2)| = |X_1^T AX_2| \leqslant ||AX_1||\,||X_2|| \leqslant a||X_1||\,||X_2||$ donc $X_1^T AX_2 \geqslant -a||X_1||\,||X_2||$.
- λ_1 étant la plus petite valeur propre strictement positive de B, à nouveau $X_1^T BX_1 \geqslant \lambda_1||X_1||^2$.

Avec toutes ces minorations, on a $X^T(A+\rho B)X \geqslant \lambda||X_2||^2 + \alpha||X_1||^2 - 2a||X_1||\,||X_2|| + \rho\lambda_1||X_2||^2$. On met cette quantité sous forme canonique, à savoir $X^T(A+\rho B)X \geqslant \lambda\Big(||X_2|| - \frac{a}{\lambda}||X_1||\Big)^2 + (\alpha + \rho\lambda_1 - \frac{a^2}{\lambda})||X_1||^2$. Si $\alpha + \rho_0\lambda_1 - \dfrac{a^2}{\lambda} > 0$ (on le peut car $\lambda_1 > 0$), alors $X^T(A+\rho_0 B)X \geqslant 0$. De plus, si cette quantité était nulle, on aurait $||X_2|| - \frac{a}{\lambda}||X_1|| = ||X_1|| = 0$ donc $X_1 = X_2 = 0$ d'où $X = X_1 + X_2 = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, $X^T(A+\rho_0 B)X > 0$ si on prend $\rho_0 \in \Big] - \dfrac{a^2-\alpha\lambda}{\lambda\lambda_1}; +\infty\Big[$, d'où $A + \rho_0 B$ est symétrique définie positive.

12.45 **a.** Supposons qu'il existe deux valeurs propres réelles λ et μ de u de signes opposés. Si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, alors 0 est valeur propre de u donc $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$ ce qui donne l'existence de $z \neq 0_E \in \mathrm{Ker}(u)$ tel que $(u(z)|z) = (0_E|z) = 0$. Sinon, on peut supposer par exemple que $\lambda > 0$ et $\mu < 0$. Alors il existe x et y non nuls tels que $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$. On va chercher un vecteur z non nul qui vérifie $(u(z)|z) = 0$ sur le segment reliant les vecteurs x et y. Posons $f : t \mapsto (u(tx+(1-t)y)|tx+(1-t)y)$. En développant, on a $f(t) = t^2(u(x)|x) + (1-t)^2(u(y)|y) + t(1-t)[(u(x)|y) + (u(y)|x)]$ ce qui donne avec les hypothèses de l'énoncé $f(t) = \lambda t^2||x||^2 + \mu(1-t)^2||y||^2 + t(1-t)(\lambda+\mu)(x|y)$. La fonction f est continue car polynomiale, $f(0) = \mu||y||^2 < 0$ et $f(1) = \lambda||x||^2 > 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0;1[$ tel que $f(c) = 0$ donc il existe $z = cx + (1-c)y \in E$ tel que $(u(z)|z) = 0$.

On aurait aussi pu chercher un tel vecteur z sur la droite affine $x + \mathbb{R}y$ (par exemple). En effet, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = (u(x+ty)|x+ty) = t^2(u(y)|y) + ((u(x)|y) + (x|u(y))t + (u(x)|x)$ est polynomiale donc continue, on a $g(0) = (u(x)|x) = \lambda||x||^2 > 0$ et $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \mu t^2||y||^2$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(t) = 0$. En posant $z = x + ty$, on a bien $(u(z)|z) = 0$.

Par l'une ou l'autre des deux méthodes, le vecteur z trouvé est non nul car (x, y) est libre puisque x et y sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes.

b. Par le théorème spectral, u est symétrique donc diagonalisable donc $\mathrm{Tr}\,(u) = \sum\limits_{k=1}^{r} m_k\lambda_k$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de u et $m_1, \ldots, m_r$ les multiplicités correspondantes. Comme $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$:

- soit 0 est la seule valeur propre de u donc il existe $z \in \mathrm{Ker}(u)$ tel que $z \neq 0_E$ et on a $(u(z)|z) = 0$.
- soit il existe deux valeurs propres de u de signes opposés (comme leur somme est nulle), disons $\lambda > 0$ et $\mu < 0$ et on utilise la question **a.**, ce qui donne l'existence de $z \in E$ tel que $z \neq 0_E$ et $(u(z)|z) = 0$.

Dans les deux cas, il existe un vecteur non nul z de E tel que $(u(z)|z) = 0$.

c. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on décompose A sous la forme suivante :

$A = A_1 + A_2$ où $A_1 = \dfrac{A + {}^tA}{2}$ est symétrique et $A_2 = \dfrac{A - {}^tA}{2}$ est antisymétrique. Soit u_1 et u_2 les endomorphismes de E dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont A_1 et A_2 : u_1 est symétrique et u_2 antisymétrique.

D'après la question **b.**, il existe un vecteur non nul z tel que $(u_1(z)|z) = 0$. Or u_2 étant antisymétrique, $(u_2(z)|z) = -(z|u_2(z)) = 0$ et on a encore $(u(z)|z) = (u_1(z)|z) + (u_2(z)|z) = 0$.

d. On effectue une récurrence sur la dimension de l'espace E. Soit, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'assertion $\mathcal{P}_n$ = "si E euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$, alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ a ses coefficients diagonaux nuls".

<u>Initialisation</u> : si $\dim(E) = 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$, alors $u = 0$ donc u admet (0) comme matrice dans toute base et la matrice (0) a bien sa diagonale nulle, si si !

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 1$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Soit maintenant E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$. D'après la question **c.**, il existe un vecteur $z \in E$, $z \neq 0_E$ tel que $(u(z)|z) = 0$. Posons $v_{n+1} = \dfrac{z}{||z||}$, alors v_{n+1} est unitaire et $(u(v_{n+1})|v_{n+1}) = 0$. On complète (v_{n+1}) pour obtenir une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ de E. Par construction, comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a par blocs $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ L & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{Tr}\,(B) = \mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\,(A)$, on a $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$. On pose $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{Vect}(v_{n+1})^{\perp}$ de sorte que $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base orthonormale de F et on note v l'endomorphisme de F tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = A$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (car $\mathrm{Tr}\,(v) = \mathrm{Tr}\,(A) = 0$) et il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'' = (w_1, \ldots, w_n)$ de F telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(v) = M$ a ses coefficients diagonaux nuls. Il existe $Q \in O(n)$ (car $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont orthonormales) telle que $A = QM{}^tQ$. Ainsi $B = \begin{pmatrix} QM{}^tQ & C \\ L & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & C' \\ L' & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^tQ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $L' = LQ$ et $C' = {}^tQC$. Or $P = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale d'inverse $\begin{pmatrix} {}^tQ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} M & C' \\ L' & 0 \end{pmatrix}$ a tous ses coefficients diagonaux nuls. En notant $\mathcal{B}_0$ la bon de E telle que $P \in O(n)$ soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$, on a par formule de changement de base $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = M$!

Par principe de récurrence, quelle que soit la dimension $n \geqslant 1$ de l'espace euclidien E, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.
En termes matriciels, ce qu'on a prouvé est que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est orthosemblable à une matrice ayant tous ses termes diagonaux nuls.

12.46 • Bien sûr, si u est une homothétie, elle commute avec tout endomorphisme donc notamment avec tout automorphisme orthogonal de E.

• Réciproquement, supposons que u commute avec tout automorphisme orthogonal de E. On note n la dimension de E et on s'en donne une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Pour $k \in [\![1; n]\!]$, soit s_k la réflexion d'hyperplan $H_k = \mathrm{Vect}(e_k)^{\perp}$. Comme $s_k \in O(E)$, $u \circ s_k = s_k \circ u$. On applique ceci en e_k pour avoir $u(-e_k) = s_k(u(e_k))$ donc $s(u(e_k)) = -u(e_k)$ ce qui prouve l'appartenance $u(e_k) \in E_{-1}(s_k) = \mathrm{Vect}(e_k)$: il existe un scalaire $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_k) = \lambda_k e_k$.
Pour tout $k \in [\![2; n]\!]$, on note r_k la réflexion telle que $r_k(e_1) = e_k$, $r_k(e_k) = e_1$ et $\forall j \in [\![2; n]\!] \setminus \{k\}$, $r_k(e_j) = e_j$. r_k est la réflexion par rapport à l'hyperplan $F_k = \mathrm{Vect}(e_1 - e_k)^{\perp}$ car on décompose $e_1 = \dfrac{e_1 + e_k}{2} + \dfrac{e_1 - e_k}{2}$ et $\dfrac{e_1 + e_k}{2} \in F_k$ car e_1 et e_k sont unitaires. Comme $u \circ r_k = r_k \circ u$, on applique ceci en e_1 pour avoir $u(e_k) = r_k(u(e_1))$ donc $\lambda_k e_k = \lambda_1 e_k$ d'où $\lambda_1 = \lambda_k$. Ainsi u est bien l'homothétie de rapport λ_1.

On n'a utilisé que les réflexions dans le raisonnement précédent, de plus les réflexions engendrent $O(E)$. Par conséquent : si u commute avec toutes les réflexions, u est aussi une homothétie.

12.47 **a.** Soit E un espace euclidien, $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal de E s'il existe un sous-espace F de E tel que p soit la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ (notée alors p_F). Si on se donne un sous-espace F et un vecteur v de E, alors la distance de v à F, notée $d(v,F) = \underset{y \in F}{\mathrm{Inf}}\big(||x-y||\big)$ vérifie $d(v,F) = ||v - p_F(v)||$.

b. p et q sont des projecteurs orthogonaux, donc ce sont des endomorphismes symétriques d'après le cours, ce qui se traduit par $\forall (x,y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$ et $(q(x)|y) = (x|q(y))$. Par bilinéarité du produit scalaire, $(u(x)|y) = (p(x)+q(x)|y) = (p(x)|y) + (q(x)|y) = (x|p(y)) + (x|q(y)) = (x|p(y)+q(y)) = (x|u(y))$. Ainsi, u est aussi un endomorphisme symétrique et on sait d'après le théorème spectral que son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u, et $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. Alors $u(x) = \lambda x$.
Si p est la projection orthogonale sur F, en décomposant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, on a $p(x) = y$ donc $(p(x)|x) = (y|y+z) = ||y||^2$ or, d'après PYTHAGORE, $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$ donc $0 \leqslant ||y||^2 \leqslant ||x||^2$. On a donc $0 \leqslant (p(x)|x) \leqslant ||x||^2$. De même $0 \leqslant (q(x)|x) \leqslant ||x||^2$.
On écrit $(u(x)|x) = (p(x)+q(x)|x) = (p(x)|x)+(q(x)|x)$ dont on déduit $0 \leqslant (u(x)|x) \leqslant 2||x||^2$. Mais on a aussi $(u(x)|x) = \lambda||x||^2$. Donc $0 \leqslant \lambda||x||^2 \leqslant 2||x||^2$ ce qui implique $\lambda \in [0;2]$ car $||x||^2 > 0$. Au final $\mathrm{Sp}(u) \subset [0;2]$.

d. • Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$, alors $(u(x)|x) = 0$ donc $(p(x)|x) + (q(x)|x) = 0$ alors que $(p(x)|x) \geqslant 0$ et $(q(x)|x) \geqslant 0$. Ceci impose $(p(x)|x) = (q(x)|x) = 0$. Or, avec les notations précédentes, $(p(x)|x) = ||y||^2$ donc $y = 0_E$ et $x = z \in \mathrm{Ker}(p)$. De même $x \in \mathrm{Ker}(q)$. On vient de prouver l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. L'inclusion réciproque étant évidente : $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
On pouvait aussi constater que, puisque p est une projection orthogonale, on a la relation générale suivante à mémoriser : $\forall x \in E$, $(p(x)|x) = (p(x)|x - p(x) + p(x)) = ||p(x)||^2$ car $x - p(x) \perp p(x)$.
• Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{id}_E)$, alors $u(x) = 2x$ donc $(u(x)|x) = 2||x||^2$. Mais $(u(x)|x) = (p(x)|x) + (q(x)|x)$, $(p(x)|x) \leqslant ||x||^2$ et $(q(x)|x) \leqslant ||x||^2$. Ceci impose $(p(x)|x) = ||x||^2$ et $(q(x)|x) = ||x||^2$. À nouveau, on en déduit que $(p(x)|x) = ||y||^2 = ||x||^2$ donc $||z||^2 = 0$ et $z = 0_E$ donc $x = y \in \mathrm{Im}\,(p)$. De même $x \in \mathrm{Im}\,(q)$. On vient d'établir l'inclusion $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(q - \mathrm{id}_E)$. L'inclusion réciproque est claire donc $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(q - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)$.

12.48 **a.** Méthode 1 : si f est inversible, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, $\mathrm{Im}\,(f) = E$ et $E = \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(f)$. Sinon, en notant les valeurs propres distinctes de f : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$ non nuls, on a $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(f) = \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \Big(\bigoplus_{k=2}^{r} E_{\lambda_k}(f)\Big)$.
Or, si $\lambda_k \neq 0$, $E_{\lambda_k}(f) \subset \mathrm{Im}\,(f)$. En posant $F = \bigoplus_{k=2}^{r} E_{\lambda_k}(f)$, on a $F \subset \mathrm{Im}\,(f)$ et F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$. Avec la formule du rang, ceci impose $\dim(F) = \mathrm{rang}\,(f)$ donc $F = \mathrm{Im}\,(f)$ par inclusion et égalité des dimensions, et on a aussi $E = \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(f)$.
Méthode 2 : avec $(x,y) \in \mathrm{Ker}\,(f) \times \mathrm{Im}\,(f)$, $\exists z \in E$, $y = f(z)$ d'où $(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0_E|z) = 0$. On vient d'établir que $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}\,(f)$ et on conclut $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$ par le théorème du rang.
C'est important : **Si f est symétrique, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont supplémentaires orthogonaux**.

b. Si $f \in S^+(E)$ et $\dim(E) = n$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs propres de f tels que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ f(v_k) = \lambda_k v_k$ avec $\lambda_k \geqslant 0$. Soit h l'unique endomorphisme ($\mathcal{B}$ est une base) de E qui vérifie les conditions $\forall k \in [\![1;n]\!],\ h(v_k) = \sqrt{\lambda_k} v_k$. Comme h possède une base orthonormale de vecteurs propres, h est un endomorphisme symétrique car la matrice de h dans $\mathcal{B}$ est symétrique (et même diagonale). De plus, ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_k} \geqslant 0$ donc $h \in S^+(E)$.

Par construction, on a $h^2 = f$ car h^2 et f coïncident sur la base $\mathcal{B}$.

c. Soit $(f, g) \in (S^+(E))^2$. D'après la question précédente, il existe h et k symétriques positifs tels que $h^2 = f$ et $k^2 = g$. Les inclusions $\mathrm{Ker}(f+g) \supset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ sont vraies en général.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$, alors $f(x) + g(x) = 0_E$. Ainsi, $(x|f(x) + g(x)) = 0 = (x|f(x)) + (x|g(x))$ or $(x|f(x)) \geqslant 0$ et $(x|g(x)) \geqslant 0$ donc $(x|f(x)) = (x|g(x)) = 0$. Puisque h est symétrique : $(x|f(x)) = (x|h^2(x)) = ||h(x)||^2 = 0$ donc $h(x) = 0_E$. De même $k(x) = 0_E$. On en déduit que $f(x) = h(h(x)) = 0_E$. De même $g(x) = 0_E$ et on a bien $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. On conclut à $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ par double inclusion.

• $f+g$ est aussi symétrique et, pour deux sous-espaces F et G d'un espace euclidien, on a $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Ker}(f)^\perp + \mathrm{Ker}(g)^\perp = (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g))^\perp = (\mathrm{Ker}(f+g))^\perp = \mathrm{Im}\,(f+g)$ d'après **a.**.

12.49 **a.** Par définition de la norme euclidienne et par bilinéarité du produit scalaire, on obtient :
$||x+y||^2 = (x+y|x+y) = (x|x)+2(x|y)+(y|y) \leqslant ||x||^2+|(x|y)|+||y||^2 \leqslant ||x||^2+2||x||||y||+||y||^2 = (||x||+||y||)^2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on passe à la racine pour conclure.
Il y a égalité si et seulement si x et y sont positivement liés : c'est du cours.

b. Comme $UX + VX = 2X$, d'après **a.** : $||UX + VX|| = 2||X|| \leqslant ||UX|| + ||VX||$. Mais $||UX|| = ||X||$ car U est orthogonale (elle conserve les normes) ; on peut aussi écrire $||UX||^2 = {}^t(UX)UX = {}^tX{}^tUUX = {}^tXX = ||X||^2$ car ${}^tUU = I_n$. De même $||VX|| = ||X||$. On obtient donc $||UX + VX|| = ||UX|| + ||VX|| = 2||X||$ et on a égalité dans l'inégalité triangulaire donc UX et VX sont positivement liés. Mais comme ce sont tous les deux des vecteurs colonnes de norme $||X||$, ils sont donc égaux : $UX = VX$. Enfin, comme $UX + VX = 2X$, on a $UX = VX = X$.

c. Comme on se place maintenant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on change de produit scalaire, on va considérer le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la question suivante : $(M, N) \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^tMN) = (M|N)$ et on note classiquement $||M|| = \sqrt{(M|M)}$ la norme associée. On recommence le même argument :
Comme $UMU^{-1} + VMV^{-1} = 2M$, d'après **a.** : $||UMU^{-1} + VMV^{-1}|| = 2||M|| \leqslant ||UMU^{-1}|| + ||VMV^{-1}||$. Mais, comme $U^{-1} = {}^tU$, il vient $||UMU^{-1}||^2 = \mathrm{Tr}\,({}^t(UM{}^tU)(UM{}^tU)) = \mathrm{Tr}\,(U{}^tM{}^tUUM{}^tU) = \mathrm{Tr}\,(U{}^tMM{}^tU)$ car ${}^tUU = I_n$. Ainsi $||UMU^{-1}||^2 = \mathrm{Tr}\,({}^tMM) = ||M||^2$ car $U{}^tMM{}^tU$ et ${}^tMM$ sont semblables (et même ortho-semblables). Ainsi $||UMU^{-1}|| = ||M||$. De même $||VMV^{-1}|| = ||M||$.
On obtient donc $||UMU^{-1} + VMV^{-1}|| = ||UMU^{-1}|| + ||VMV^{-1}|| = 2||M||$ et on a égalité dans l'inégalité triangulaire donc UMU^{-1} et VMV^{-1} sont positivement liés. Mais comme ce sont toutes deux des matrices de norme $||M||$, elles sont donc égales : $UMU^{-1} = VMV^{-1}$. Enfin, comme $UMU^{-1} + VMV^{-1} = 2M$, on a $UMU^{-1} = VMV^{-1} = M$ donc $UM = MU$ et $VM = MV$.

d. La base canonique est une base orthonormée pour ce produit scalaire (c'en est bien un de manière classique). En effet, en notant $E_{i,j}$ les matrices élémentaires, on a :

$$\forall (i,j,k,l) \in [\![1;n]\!]^4,\ (E_{i,j}|E_{k,l}) = \mathrm{Tr}\,({}^tE_{i,j}E_{k,l}) = \mathrm{Tr}\,(E_{j,i}E_{k,l}) = \mathrm{Tr}\,(\delta_{i,k}E_{j,l}) = \delta_{i,k}\delta_{j,l},$$

donc $(E_{i,j}|E_{k,l}) = 1$ si $(i,j) = (k,l)$ et 0 sinon.

12.50 La matrice M est orthogonale en vérifiant calculatoirement que $M^TM = I_3$ ou parce les trois vecteurs colonnes sont unitaires étant donné que $2^2 + 2^2 + 1^1 = 4 + 4 + 1 = 9 = 3^2$ et que les colonnes sont orthogonales deux à deux puisque $4 - 2 - 2 = 2 + 2 - 4 = 2 - 4 + 2 = 0$. M n'est pas symétrique donc u n'est pas une symétrie sinon on aurait $M^TM = M^2 = I_3$ donc $M = M^T$. Ainsi, u est une rotation ou une rotation-miroir.

De plus $\det(M) = \dfrac{1}{27}\Big(8+8-1+4+4+4\Big) = 1$ avec la formule de SARRUS. Ainsi u est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on résout $AX = X \Longleftrightarrow X = z\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ce qui montre, après calculs, que l'axe D de la rotation u est engendré par le vecteur $a = (3,1,1)$ (on peut le normer) ; on décide aussi de l'orienter par a. Si on note θ l'angle de cette rotation, on sait que $\mathrm{Tr}\,(M) = 1+2\cos\theta$ donc $\cos\theta = -\dfrac{5}{6}$ donc $\theta \equiv \pm\,\mathrm{Arccos}\Big(-\dfrac{5}{6}\Big)$.

De plus, en prenant $v = (1,0,0) \notin D$, comme $3[v,u(v),a] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$ donc $\theta = -\,\mathrm{Arccos}\Big(-\dfrac{5}{6}\Big)$.

Au final, u est la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de la droite orientée par $a = (3,1,1)$ et d'angle $\theta = -\,\mathrm{Arccos}\Big(-\dfrac{5}{6}\Big)$.

12.51 (i) $\Longrightarrow$ (ii) : d'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ et une matrice orthogonale P telles que $A = PD{}^tP$. Les valeurs propres de A sont les éléments de la diagonale D donc ils sont positifs. On peut donc poser $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ et $B = P\Delta{}^tP$: ${}^tBB = P\Delta^2{}^tP = PD{}^tP = A$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) On a ${}^tA = {}^t({}^tB){}^tB = B{}^tB = A$ donc A est symétrique. De plus, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A (elles sont toutes réelles), alors $\exists X \neq 0,\ AX = \lambda X$. Alors $\lambda||X||^2 = {}^tXAX = {}^tX{}^tBBX = ||BX||^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$ car $||X||^2 > 0$. Ainsi le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

12.52 Il est sous-entendu dans l'énoncé qu'on prend dans $E = \mathbb{R}^3$ la structure euclidienne orientée canonique.

a. La bilinéarité du produit vectoriel assure la linéarité de f qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
• Si $u = 0$, alors $f = 0$ (endomorphisme nul) et $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$.
• Si $u \neq 0$, on sait d'après le cours que $u \wedge x = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(u)$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$. Ainsi, par la formule du rang, $\mathrm{rang}\,(f) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$. Or on sait aussi que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) \perp u$ donc $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}(u)^\perp$. Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\mathrm{Im}\,f = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

b. Il est aussi sous-entendu qu'on veut la matrice de u dans la base canonique qui a le bon goût d'être une base orthonormale directe pour la structure euclidienne orientée choisie dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, si $u = (a,b,c)$, on obtient classiquement $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ en calculant les produits vectoriels de u avec les trois vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, la formule du double produit vectoriel donne $f\circ f(x) = u \wedge (u \wedge x) = (u|x)u - ||u||^2x$. Ainsi $A^2 = \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix}$ (expression qu'on peut bien sûr obtenir par un calcul direct de $A \times A$).

c. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, $f^3(x) = (u|x)f(u) - ||u||^2f(x) = -||u||^2f(x)$ car $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $f^3 = -||u||^2f$ et on en déduit par une récurrence facile que $\forall n \geqslant 0,\ f^{2n+1} = (-1)^n||u||^{2n}f$ et $\forall n \geqslant 1,\ f^{2n} = (-1)^{n-1}||u||^{2n-2}f^2$. On peut aussi utiliser le polynôme annulateur $P = X^3 + ||u||^2X$ de f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et par division euclidienne de X^n par P, on a $X^n = Q_nP + R_n$ avec $R_n = a_nX^2 + b_nX + c_n$ et $(a_n,b_n,c_n) \in \mathbb{R}^3$. Alors, comme $P(f) = 0$, on a $f^n = a_nf^2 + b_nf + c_n$. Mais, comme les racines de P sont 0 et $\pm i||u||$, on a $c_n = 0$ et $i^n||u||^n = -a_n||u||^2 + b_ni||u||$ et on conclut de même en distinguant selon la parité de n.

d. Par définition, on a $\exp(f) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^n}{n!}$: cette série de vecteurs converge dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E)$

qui est de dimension finie donc on peut choisir n'importe quelle norme (elles sont toutes équivalentes).

• Si $u = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!} = \text{id}_E$ donc $\exp(f) = \text{id}_E$.

• Si $u \neq 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on décompose la somme partielle $S_{2n}(f) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^k}{k!} = f^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{2k+1}}{(2k+1)!}$ selon les indices pairs ou impairs donc $S_{2n}(f) = \text{id}_E + \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}||u||^{2k-2}}{(2k)!}\Big)f^2 + \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k||u||^{2k}}{(2k+1)!}\Big)f$.
Or on sait que $\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}||u||^{2k-2}}{(2k)!}\Big) = \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2}$ (développement en série entière de $\cos$) et $\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k||u||^{2k}}{(2k+1)!}\Big) = \frac{1}{||u||}\sin(||u||)$ (développement en série entière de $\sin$). Par les propriétés des suites de vecteurs dans un espace normé, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}(f) = \text{id}_E + \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2}f^2 + \frac{1}{||u||}\sin(||u||)f = g$. Comme $S_{2n+1}(f) = S_{2n}(f) - \frac{f^{2n+1}}{(2n+1)!} = S_{2n}(f) + (-1)^{n+1}\frac{||u||^{2n}}{(2n+1)!}f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \text{id}_E + \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2}f^2 + \frac{1}{||u||}\sin(||u||)f$ par croissances comparées car $\lim_{n\to+\infty} \frac{||u||^{2n}}{(2n+1)!} = 0$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}(f) = g$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \exp(f) = \text{id}_E + \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2}f^2 + \frac{1}{||u||}\sin(||u||)f$.
Soit $x \in \mathbb{R}^3$, $\exp(f)(x) = x + \frac{1-\cos(||u||)}{||u||^2}\Big((u|x)u - ||u||^2x\Big) + \frac{1}{||u||}\sin(||u||)u \wedge x$ et, si on note $a = \frac{u}{||u||}$ et $\theta = ||u||$, alors a est unitaire et on a $r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)\, a \wedge x + (1-\cos(\theta))(a|x)a$ et on peut conclure (par une formule vectorielle hors programme) que $\exp(f)$ est la rotation autour de l'axe orienté par le vecteur a (donc le vecteur u) et d'angle $\theta = ||u||$.

12.53 **a.** A est symétrique réelle donc diagonalisable. Il est clair que puisque $A - \frac{I_n}{2}$ est la matrice de rang 1 ne contenant que des $\frac{1}{2}$, la valeur $\frac{1}{2}$ est propre pour A de multiplicité algébrique au moins égale à $n-1$. Puisque $\text{Tr}\,(A) = n$. On en déduit que la dernière valeur propre est $\frac{n+1}{2}$. En fait c'était clair car le vecteur colonne $V = {}^t(1\ldots1)$ vérifie simplement $AV = \frac{n+1}{2}V$.

• Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{n+1}{2}$ est la droite engendrée par $(1,\ldots,1)$.

• Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$ est l'hyperplan orthogonal à la droite précédente (par application du théorème spectral). A est inversible puisque qu'elle n'a pas 0 comme valeur propre.

b. Soit M la matrice de la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ dans la base canonique. Alors ${}^tMM$ est la matrice de GRAM de la famille $(u_1,\ldots,u_n)$. Or $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $||u_k||^2 = 1$ et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, si $i \neq j$, on a par identité de polarisation : $(u_i|u_j) = \frac{1}{2}\Big(||u_i||^2 + ||u_j||^2 - ||u_i - u_j||^2\Big) = \frac{1}{2}$. Donc ${}^tMM = A$ et A est inversible donc M est inversible ce qui signifie que F est une base de $\mathbb{R}^n$.
On pouvait revenir à la définition : soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = 0_E$, alors $\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\Big|\Big|^2 = 0$ qu'on développe en $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2||u_k||^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_i\alpha_j(u_i|u_j) = 0$. Mais $||u_k|| = 1$ et $(u_i|u_j) = \frac{1}{2}$ si $i \neq j$ donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_i\alpha_j = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 0$. Comme ces deux quantités sont positives, on a $\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\Big)^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 0$ donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$ donc $(u_1,\ldots,u_n)$ est libre : c'est donc une base de E.
c. Comme $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $f(e_i) = u_i$, f est bien défini (envoi d'une base sur une famille). f est un automorphisme

car il envoie une base sur une base. Comme F n'est pas une base orthonormée, u n'est pas une isométrie.

12.54 **a.** A est symétrique donc il existe par le théorème spectral une base orthonormale $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_n)$ de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ où l'on peut supposer qu'en posant r le rang de A, on a $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ (et bien sûr $\lambda_1 \cdots \lambda_r \neq 0$). Ainsi $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}(V_1, \cdots, V_r)$ car $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}(AV_1, \cdots, AV_n) = \mathrm{Vect}(AV_1, \cdots, AV_r)$, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(V_{r+1}, \cdots, V_n) = \mathrm{Im}\,(A)^{\perp}$ (classique).

Soit un vecteur $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k V_k \in \mathbb{R}^n$, on a $f(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k {}^t B V_k$ (calcul). Ainsi, en notant $b_k = {}^t B V_k$, on peut aussi écrire $f(X) = \sum\limits_{k=1}^{r} (\lambda_k x_k^2 - b_k x_k) - \sum\limits_{k=r+1}^{n} b_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \Big(x_k^2 - \dfrac{b_k}{2\lambda_k}\Big)^2 - \sum\limits_{k=r+1}^{n} b_k x_k - \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{b_k^2}{4\lambda_k^2}$.

($\Longrightarrow$) Si $\mathrm{Sp}(A) \not\subset \mathbb{R}_+$ ou $B \notin \mathrm{Im}\,(A)$, traitons deux cas. S'il existe une valeur propre strictement négative, disons λ_1, alors $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} f(x_1, 0, \cdots, 0) = -\infty$ donc f n'est pas minorée. Si $B \notin \mathrm{Im}\,(A)$, alors $b_{r+1}, \cdots, b_n$ ne sont pas tous nuls, par exemple $b_n > 0$, alors $\lim\limits_{x_n \to +\infty} f(0, \cdots, 0, x_n) = -\infty$ avec la même conclusion.

On pouvait aussi, pour $k \in [\![1; r]\!]$, écrire que $\alpha \mapsto f(\alpha V_k) = \lambda_k \alpha^2 - \alpha(B|V_k)$ est minorée si et seulement si $\lambda_k > 0$ (parabole). De même, pour $k \in [\![r+1; n]\!]$, $\alpha \mapsto f(\alpha V_k) = -(B|V_k)\alpha$ est minorée si et seulement si $(B|V_k) = 0$ (fonctions affines). Ainsi, on a bien $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in \mathrm{Vect}(V_{r+1}, \cdots, V_n)^{\perp} = (\mathrm{Ker}(A))^{\perp} = \mathrm{Im}\,(A)$.

($\Longleftarrow$) Si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in \mathrm{Im}\,(A)$, alors comme $B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k V_k \in \mathrm{Im}\,(A)$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée directe, on a $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$ d'où $f(X) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \Big(x_k^2 - \dfrac{b_k}{2\lambda_k}\Big)^2 - \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{b_k^2}{4\lambda_k^2} \geqslant -\sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{b_k^2}{4\lambda_k^2}$ donc f est minorée (son minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$ est même $-\sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{b_k^2}{4\lambda_k^2}$ car cette valeur est atteinte pour $X = \Big(\dfrac{b_1}{2\lambda_1}, \cdots, \dfrac{b_r}{2\lambda_r}, 0, \cdots, 0\Big)$).

Ainsi, par double implication, f est minorée si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in \mathrm{Im}\,(A)$.

b. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associée comme en **a.**. En écrivant $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i E_i$ et en développant, $f(X) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k (B|V_k)$ en se servant de ${}^t E_i A E_j = a_{i,j}$. Par définition $\nabla f = \Big(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big)$, d'où $\nabla f_1(X) = \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j - (B|V_1), \cdots, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j - (B|V_n)\Big) = 2AX - B$.

D'après la question précédente, A_1 et A_2 sont symétriques positives et $B_1 \in \mathrm{Im}\,(A_1)$, $B_2 \in \mathrm{Im}\,(A_2)$. On vient de voir que $\nabla f_1(X) = 2A_1 X - B_1$ et $\nabla f_2(X) = 2A_2 X - B_2$. Comme on a supposé $||\nabla f_1|| = ||\nabla f2||$ (et bien sûr pour tous les vecteurs X de $\mathbb{R}^n$), en développant $||\nabla f_1(X)||^2 = ||\nabla f2(X)||^2$, on obtient la relation suivante $g(X) = 4 {}^t X(A_1^2 - A_2^2)X - 2(A_1 B_1 - A_2 B_2|X) + ||B_1||^2 - ||B_2||^2 = 0$. S'il existait une valeur propre non nulle λ de $A_1^2 - A_2^2$, alors on aurait un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $(A_1^2 - A_2^2)X = \lambda X$ et $g(\alpha X) = \alpha^2 \lambda ||X||^2 - 2\alpha(A_1 B_1 - A_2 B_2|X) + ||B_1||^2 - ||B_2||^2$ qui tend vers $\pm\infty$ quand $\alpha \to +\infty$: absurde ! Ainsi, $A_1^2 - A_2^2$ est symétrique donc diagonalisable et n'a que 0 comme valeur propre : $A_1^2 = A_2^2$. Avec $g(\alpha(A_1 B_1 - A_2 B_2))$ et en faisant tendre α vers $+\infty$, on a $A_1 B_1 = A_2 B_2$ ce qui amène aussi $||B_1||^2 = ||B_2||^2$. Posons $S = A_1^2 = A_2^2$, alors S est symétrique positive et possède donc d'après le cours une unique "racine carrée" elle-même symétrique positive. Or A_1 et A_2 sont symétriques positives, ainsi $A_1 = A_2$ par unicité. Comme $B_1 \in \mathrm{Im}\,(A_1)$ et $B_2 \in \mathrm{Im}\,(A_2)$, $\exists (C_1, C_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $B_1 = A_1 C_1$ et $B_2 = A_2 C_2 = A_1 C_2$. Alors $A_1 B_1 = A_2 B_2 \Longleftrightarrow A_1^2(C_1 - C_2) = 0$. Or A_1 étant diagonalisable, $\mathrm{Ker}(A_1^2) = \mathrm{Ker}(A_1)$ donc $A_1(C_1 - C_2) = 0$ d'où $B_1 = B_2$ et on ne s'est pas servi de $||B_1||^2 = ||B_2||^2$. Par conséquent $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$ donc $f_1 = f_2$.

c. L'inclusion $\mathrm{Im}\,(A_1 + A_2) \subset \mathrm{Im}\,(A_1) + \mathrm{Im}\,(A_2)$ est toujours vraie. Soit $B_1 \in \mathrm{Im}(A_1)$ et $B_2 \in \mathrm{Im}(A_2)$, alors les fonctions f_1 et f_2 définies comme ci-dessus sont minorées d'après la question **a.** donc leur somme $f = f_1 + f_2 : X \mapsto {}^t X(A_1 + A_2)X + {}^t(B_1 + B_2)X$ l'est aussi. Or $A_1 + A_2$ est symétrique positive (classique) donc $B_1+B_2 \in \mathrm{Im}\,(A_1+A_2)$ d'après la question **a.** encore. Ainsi $\mathrm{Im}\,(A_1)+\mathrm{Im}\,(A_2) \subset \mathrm{Im}\,(A_1+A_2)$. Par double inclusion : $\mathrm{Im}\,(A_1+A_2) = \mathrm{Im}\,(A_1)+\mathrm{Im}\,(A_2)$. Comme $\mathrm{Ker}(A_1) = (\mathrm{Im}\,(A_1))^{\perp}$, $\mathrm{Ker}(A_2) = (\mathrm{Im}\,(A_2))^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(A_1+A_2) = (\mathrm{Im}\,(A_1+A_2))^{\perp}$, on obtient donc par la formule classique sur les orthogonaux la relation $\mathrm{Ker}(A_1+A_2) = (\mathrm{Im}\,(A_1+A_2))^{\perp} = (\mathrm{Im}\,(A_1)+\mathrm{Im}\,(A_2))^{\perp} = (\mathrm{Im}\,(A_1))^{\perp} \cap (\mathrm{Im}\,(A_2))^{\perp} = \mathrm{Ker}(A_1) \cap \mathrm{Ker}(A_2)$.

On pouvait montrer directement que $\mathrm{Ker}(A_1+A_2) = \mathrm{Ker}(A_1) \cap \mathrm{Ker}(A_2)$ si A_1 et A_2 sont deux matrices carrées symétriques positives. En effet, l'inclusion $\mathrm{Ker}(A_1) \cap \mathrm{Ker}(A_2) \subset \mathrm{Ker}(A_1+A_2)$ est toujours vraie. Réciproquement, soit $X \in \mathrm{Ker}(A_1+A_2)$, alors $(A_1+A_2)X = 0$ donc ${}^tX(A_1+A_2)X = {}^tXA_1X + {}^tXA_2X = 0$ donc ${}^tXA_1X = 0$ et ${}^tXA_2X = 0$ car ces deux quantités sont positives par hypothèse. Ainsi, si on écrit $A_1 = {}^tM_1M_1$, on a ${}^tX{}^tM_1M_1X = ||M_1X||^2 = 0$ d'où $M_1X = 0$ et a fortiori $A_1X = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}(A_1)$. De même $X \in \mathrm{Ker}(A_2)$. Par double inclusion, on a bien $\mathrm{Ker}(A_1+A_2) = \mathrm{Ker}(A_1) \cap \mathrm{Ker}(A_2)$ et on en déduit $\mathrm{Im}\,(A_1+A_2) = \mathrm{Im}\,(A_1)+\mathrm{Im}\,(A_2)$ en passant aux orthogonaux comme ci-dessus.

12.55 Soit $(A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors $A+B$ et λA sont symétriques puisque $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$ (car ${}^tXAX \geqslant 0$ et ${}^tXBX \geqslant 0$) et ${}^tX(\lambda A)X = \lambda {}^tXAX \geqslant 0$ (car $\lambda \geqslant 0$ et ${}^tXAX \geqslant 0$). Ainsi $A+B$ et λA sont des éléments de $S_n^+(\mathbb{R})$. Par conséquent : $S_n^+(\mathbb{R})$ est stable par addition et multiplication par une constante positive.

Soit $U \in \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $S = U{}^tU \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme ${}^tS = {}^t(U{}^tU) = {}^t({}^tU){}^tU = U{}^tU = S$, la matrice S est symétrique. De plus, si $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXSX = {}^tXU{}^tUX = ||{}^tUX||^2 = (U|X)^2 \geqslant 0$ donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

C'est quasiment du cours :

- Si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$ ($\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$), ${}^tXMX = {}^tX(\lambda X) = \lambda ||X||^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$ car $||X||^2 > 0$.
- Réciproquement, si M est symétrique et $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$, par le théorème spectral, on a $M = PD{}^tP$ avec $P \in O(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ diagonale $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ sont les valeurs propres de M) . Ainsi, pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^tXMX = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY$ avec $Y = {}^tPX$. En notant ${}^tY = (y_1 \cdots y_n)$, on a calcule ${}^tYDY = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geqslant 0$.

Par double implication, si $M \in S_n(\mathbb{R})$: M est positive $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres de M sont positives.

Soit $(A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$, par construction, $A \odot B$ est symétrique car les deux matrices A et B le sont. On a vu en cours qu'il existait M et N réelles de taille n (qu'on peut même choisir symétriques) telles que $A = {}^tMM$ et $B = {}^tNN$. Calculons, pour $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX(A \odot B)X = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}x_ix_j$. Or si on note $D = \mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)$, on a $DA = (a_{i,j}x_i)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $BD = (b_{i,j}x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Ainsi, pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme D est symétrique, on a ${}^tXAX = (DA|BD) = \mathrm{Tr}\,({}^t(DA)BD)$ donc ${}^tXAX = \mathrm{Tr}\,({}^t(D{}^tMM){}^tNND) = \mathrm{Tr}\,({}^tMMD{}^tNND) = \mathrm{Tr}\,(MD{}^tNND{}^tM) = ||ND{}^tM||^2 \geqslant 0$.

De plus, si A et B sont dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, les matrices M et N sont inversibles donc $ND{}^tM \neq 0$ si $X \neq 0$ donc ${}^t(A \odot B)X > 0$ si $X \neq 0$ car alors $D \neq 0$ donc $A \odot B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Notons M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les $U_1,\cdots,U_n$. Alors ${}^tMM$ est la matrice de Gram associée et on a $A = {}^tMM = ({}^tU_iU_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. A est bien symétrique et ${}^tX{}^tMMX = ||MX||^2 \geqslant 0$ donc A est symétrique positive. Comme la matrice $J = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est aussi symétrique positive car ses valeurs propres sont 0 de multiplicité $n-1$ et n (car $\mathrm{Tr}\,(J) = n$) de multiplicité 1. D'après ce qui précède $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $J \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $c \geqslant 0$ impliquent que $A + cJ \in S_n^+(\mathbb{R})$. Ensuite, la matrice S est la puissance k-ième de A pour le produit de HADAMARD donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. si elle est définie par $s_{i,j} = \left({}^tU_iU_j + c\right)^k$.

Le produit de HADAMARD est utilisé en compression de données comme le JPEG.

12.56 **a.** Montrons que les points extrémaux de $C = B_{f,2}(0,1)$ sont les points de la sphère $S_2(0,1)$.

Si $u = (a,b) \in B_2(0,1)$, alors u n'est extrémal car en notant $r = \sqrt{a^2+b^2} < 1$, $x = (c,d) = \left(\frac{1+r}{2}\right)(a,b)$ et $y = (e,f) = -(a,b)$, on a $u \in [x;y]$ alors que $x \in C \setminus \{u\}$ et $y \in C \setminus \{u\}$. Ainsi $C \setminus \{u\}$ n'est pas convexe.

Si $u = (a,b) \in S_2(0,1)$, posons C la boule fermée unité privée de u. Soit $(v,w) \in C^2$, on sait, déjà puisque $B_{2,f}(0,1)$ est convexe, que $[v;w] \subset B_{2,f}(0,1)$. Supposons que $u \in [v;w]$, alors $\exists t \in [0;1],\ u = tv + (1-t)w$. Ainsi, par inégalité triangulaire, $||u|| = 1 \leqslant t||v|| + (1-t)||w|| \leqslant t + 1 - t = 1$. On en déduit que $||v|| = ||w|| = 1$ et, par le cas d'égalité dans MINKOWSKI, que v et w sont positivement liés. Mais comme ils sont de norme 1, on aurait $v = w$ ce qui est absurde car alors $[v;w] = \{v\}$ et que $u \notin C$.

En conclusion, les points extrémaux de $B_{2,f}(0,1)$ sont tous les points de la sphère unité.

b. On montre par une méthode similaire ou cela se voit très bien géométriquement, les points extrémaux de la boule fermée unité pour la norme $||.||_1$ sont les quatre sommets du carré $S_1(0,1)$.

c. Il est clair que si $u \in C$ est le milieu de deux points distincts v et w de C, alors u n'est pas extrémal car $C \setminus \{u\}$ ne sera plus convexe $(v,w) \in C^2$ mais $[v;w] \notin C$ car $u \in [v;w]$ et $u \notin C$.

Réciproquement, si u n'est pas extrémal, alors il existe deux points distincts a et b de $(C \setminus \{u\})^2$ tels que $[a;b]$ n'est pas inclus dans $C \setminus \{u\}$. Mais comme C est convexe, cela signifie que $u \in [a;b]$. Ainsi, comme $u \neq a$ et $u \neq b$, il existe $t \in]0;1[$ tel que $u = ta + (1-t)b$. Quitte à échanger a et b, on peut supposer que $t \in \left]0;\frac{1}{2}\right]$. On pose alors $c = \frac{t}{2}a + \left(1 - \frac{t}{2}\right)b$ et $d = \frac{3t}{2}a + \left(1 - \frac{3t}{2}\right)b$ de sorte que c, d sont éléments de $[a;b] \subset C$. Comme $c \neq u$, $d \neq u$, $c \neq d$ et $\frac{c+d}{2} = u$, u est bien le milieu de deux points distincts de C.

Ainsi, un point de C est extrémal si et seulement s'il n'est pas le milieu de deux points de C.

d. Notons d'abord que si $u \in \mathcal{L}(E)$, comme on est en dimension finie, u est lipschitzienne donc $|||u|||$ existe. Puisque B est un compact de E et que E est de dimension finie, l'application $x \mapsto ||u(x)||$ est continue donc atteint ses bornes sur B donc $|||u|| = \underset{x \in B}{\mathrm{Max}}\, ||u(x)||$.

Montrons d'abord que C est une partie convexe de $\mathcal{L}(E)$. Soit $(u,v) \in C^2$ et $t \in [0;1]$, alors pour tout vecteur x de B, on a $||(tu + (1-t)v)(x)|| = ||tu(x) + (1-t)v(x)|| \leqslant t||u(x)|| + (1-t)||v(x)||$ par inégalité triangulaire et homogénéité donc $||(tu + (1-t)v)(x)|| = ||tu(x) + (1-t)v(x)|| \leqslant t|||u||| + (1-t)|||v|||$. Ceci étant vrai pour tout $x \in B$, on a bien $|||tu + (1-t)v||| \leqslant t \times 1 + (1-t) \times 1 = 1$ d'où $tu + (1-t)v \in C$.

Montrons que si u est un automorphisme orthogonal de E, alors u est extrémal dans C.

Supposons que $u = \frac{v+w}{2}$ avec $(v,w) \in C^2$. Pour tout vecteur non nul x, on a donc par inégalité triangulaire $||x|| = ||u(x)|| = \frac{||v(x) + w(x)||}{2} \leqslant \frac{1}{2}\Big(||v(x)|| + ||w(x)||\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(|||v||| + |||w|||\Big)||x|| = ||x||$. Ainsi, comme on a égalité dans l'inégalité de MINKOWSKI, les vecteurs $v(x)$ et $w(x)$ sont positivement liés. Or on a forcément $||v(x)|| = ||w(x)|| = ||x||$ donc $v(x) = w(x)$. Comme ceci marche aussi pour le vecteur nul, on a $v = w$ et u ne peut donc pas être le milieu d'un segment $[v;w]$ avec deux endomorphismes v, w distincts de C. Ainsi, d'après la question **c.**, u est extrémal dans C.

Réciproquement, soit $u \in C$ tel que u ne soit pas un automorphisme orthogonal de E. Soit U la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. On utilise comme indiqué dans l'énoncé la décomposition polaire de U : $\exists O \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists S \in S_n^+(\mathbb{R}),\ U = OS$. La matrice S étant symétrique réelle et positive, on sait qu'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ à termes diagonaux positifs $0 \leqslant d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ et une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telles que $S = PD{}^tP$. Comme O est orthogonale, $|||U||| = |||OS||| = |||S|||$ et on montre assez facilement que $|||S||| = d_n$. Comme $|||U||| = |||u||| \leqslant 1$, on a $d_n \leqslant 1$. Or puisque U n'est pas orthogonale, $S \neq I_n$ donc $d_1 < 1$. On écrit alors $d_1 = \frac{a+b}{2}$ avec $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$. On pose alors $D_1 = \mathrm{diag}(a, d_2, \cdots, d_n)$ et $D_2 = \mathrm{diag}(b, d_2, \cdots, d_n$ de sorte que $D_1 \neq D_2$ et que $D = \frac{D_1 + D_2}{2}$. On en déduit que $U = \frac{V+W}{2}$ en posant $V=OPD_1{}^tP$ et $W=OPD_2{}^tP$. Reste à voir que les endomorphismes v et w dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont V et W sont dans C. On a déjà $v\neq w$ car $D_1\neq D_2$. De plus, soit x unitaire, en notant X la colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, $||v(x)||^2=||VX||^2={}^tX^tVVX={}^tXPD_1{}^tP^tOOPD_1{}^tPX={}^t(PX)D_1^2(PX)$. Or, en posant $Y=PX$, on a $||Y||=1$ donc, en effectuant le calcul, on a $||v(x)||^2\leqslant||y||^2=1$ donc $v\in C$. De même $w\in C$. D'après la question **c.** toujours, u n'est pas extrémal.

Au final, les points extrémaux de C sont exactement les automorphismes orthogonaux de E.

12.57 **a.** $E\subset\mathbb{R}_n[X]$ et $0\in E$. Comme E est clairement stable par combinaison linéaire : E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P)=P(1)$ est une forme linéaire non nulle (car $\varphi(X)\neq0$) et que $E=\mathrm{Ker}(\varphi)$, E est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(E)=n$.

b. Les U_k sont bien des éléments de E (car $k\geqslant1$ donc les U_k s'annulent en 1) et ils forment une famille libre (degrés échelonnés), comme $\mathcal{B}=(U_1,\cdots,U_n)$ est de cardinal n, c'est une base de E qui est de dimension n.

c. On se rappelle de la formule de Taylor : si $P\in E$, $P(1)=0$ donc $P=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k=\sum\limits_{k=1}^{n}P^{(k)}(1)U_k$.

Il suffit de définir $(.|.):E^2\to\mathbb{R}$ par $(P|Q)=\sum\limits_{k=1}^{n}P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$. L'application $(.|.)$ est bien définie, clairement bilinéaire, positive et symétrique. Si $P\in E$ vérifie $(P|P)=0$, alors $(P|P)=\sum\limits_{k=1}^{n}P^{(k)}(1)^2=0$ dont on déduit $\forall k\in[\![1;n]\!],\ P^{(k)}(1)=0$ donc $P=0$ d'après la formule ci-dessus. Ainsi, $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

Pour $(i,k)\in[\![1;n]\!]^2$, $U_i^{(k)}(1)=\delta_{i,k}$ en identifiant $U_i=\frac{1}{i!}(X-1)^i=\sum\limits_{k=1}^{n}U_i^{(k)}(1)U_k$.

Par conséquent, si $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, on a $(U_i|U_j)=\sum\limits_{k=1}^{n}U_i^{(k)}(1)U_j^{(k)}(1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_{i,k}\delta_{j,k}=\delta_{i,j}$.

On en déduit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E pour ce produit scalaire $(.|.)$.

d. Si $P\in E$, alors $\deg(P)\leqslant n$ donc $\deg(\varphi(P))\leqslant1+\deg(P)-1\leqslant\deg(P)\leqslant n$ donc, comme $\varphi(P)(1)=0$, on a bien $\varphi(P)\in E$. La linéarité de φ provient de celle de la dérivation. Ainsi, φ est un endomorphisme de E.

Pour $k\in[\![1;n]\!]$, $\varphi(U_k)=kU_k$ car $U_1'=1$ et $\forall k\in[\![2;n]\!],\ U_k'=U_{k-1}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de vecteurs propres, φ est diagonalisable et même symétrique pour $(.|.)$ et $\mathrm{Sp}(\varphi)=\{1,2,\cdots,n\}$.

e. Comme 0 n'est pas valeur propre de φ, φ est inversible. Je ne sais pas ce qu'on entend par "donner son inverse". φ^{-1} est l'endomorphisme de E qui envoie les U_k sur $\dfrac{U_k}{k}$ par exemple mais ce n'est pas satisfaisant.

12.58 **a.** Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de A, alors il existe $X\neq0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX=\lambda X$. Ainsi, d'après l'indication, ${}^t\overline{X}AX={}^tX(\lambda X)=\lambda||X||^2$ mais aussi ${}^t\overline{X}AX={}^t(\overline{AX})X=\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X=\overline{\lambda}||X||^2$. En identifiant et car $||X||^2>0$, on obtient bien $\lambda=\overline{\lambda}$ donc $\lambda\in\mathbb{R}$. A ne possède donc que des valeurs propres réelles.

b. Si $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\varphi(X,Y)={}^tXAY=2xx'+2yy'-xy'-x'y$. Il est clair que φ est bilinéaire et symétrique. Comme $\varphi(X)=2x^2-2xy+2y^2=x^2+(x-y)^2+y^2$, φ est aussi positive. Si $\varphi(X,X)=0$, $x=x-y=y$ donc $X=0$ et φ est bien définie positive : φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

c. On constate d'abord que φ ainsi définie est bilinéaire par distributivité de la multiplication sur la somme. φ est symétrique car $\forall(X,Y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \varphi(Y,X)={}^tYAX={}^t({}^tYAX)={}^tX^tAX=\varphi(X,Y)$ (A est symétrique).

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons que les valeurs propres de A sont strictement positives. Alors, par le théorème spectral, $A=PD^tP$ avec $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ et $P\in O(n)$. Ainsi, $\varphi(X,X)={}^tXPD^tPX={}^tYDY$ en posant $Y={}^tPX$ donc $\varphi(X,X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_ky_k^2\geqslant0$ et $\varphi(X,X)=0$ si et seulement si $\forall k\in[\![1;n]\!],\ y_k=0$, ce qui revient à $Y=0$ ou encore $X=0$ car P est inversible. Ainsi, φ est définie positive et c'est donc un produit scalaire sur

$\mathbb{R}^n$. Les valeurs propres de la matrices de la question **b.** sont 1 et 3, strictement positives.

$(\mathrm{ii}) \Longrightarrow (\mathrm{i})$ Supposons que φ est un produit scalaire. Avec les mêmes notations, $\varphi(X,X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$. S'il existe une valeur propre négative ou nulle, disons λ_1, alors en prenant ${}^tY = (1, 0, \cdots, 0) \neq 0$ et $X = PY \neq 0$ associé, on a $\varphi(X,X) = \lambda_1 \leqslant 0$: absurde. Ainsi, toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Ainsi, les valeurs propres de A sont strictement positives si et seulement si φ est un produit scalaire.

Question de cours : $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique dans E euclidien si $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|u(y)) = (u(x)|y)$.

12.59 **a.** Comme $(F^\perp)^\perp = F$, il suffit de montrer un seul sens de cette équivalence. Supposons donc F stable par f. Alors u induit sur F un endomorphisme u_F qui conserve encore la norme donc $u_F \in O(F)$. On en déduit que u_F est un isomorphisme car si $||u_F(x)|| = 0$ pour $x \in F$, on a par définition $||x|| = 0$ donc $x = 0_E$. Tout vecteur $x \in F$ admet donc un unique antécédent $y \in F$ par u_F donc par u.
Soit $y \in F^\perp$ et $x \in F$, notons $z = u^{-1}(x)$ l'unique antécédent de x par u, on vient de voir que $z \in F$. Alors $(u(y)|x) = (u(y)|u(z)) = (y|z) = 0$ car $y \in F^\perp$ et $z \in F$. Par conséquent $u(y) \in F^\perp$: $F^\perp$ est bien stable par u.
b. Soit $(x,y) \in K(f) \times I(f)$. Par définition, il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$ et on a aussi $f(x) = x$. On calcule $(x|y) = (x|f(z) - z) = (x|f(z)) - (x|z) = (f(x)|f(z)) - (x|z) = 0$ car $f \in O(E)$ donc $K(f) \perp I(f)$. Par la formule du rang, $\mathrm{dim}(K(f)) + \mathrm{dim}(I(f)) = \mathrm{dim}(E)$ donc $E = K(f) \oplus I(f)$ et $I(f) = (K(f))^\perp$.

c. Comme $s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p} \in O(E)$, $I(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p) \Longleftrightarrow K(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)^\perp$ d'après la question **b.**. On peut supposer sans perte de généralité que $\forall k \in [\![1;p]\!],\ ||u_k|| = 1$.
Montrons cette égalité par récurrence sur le nombre de vecteurs, soit pour $p \in [\![1;n]\!]$, la proposition suivante $\mathcal{P}(p) =$ " si $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre dans E euclidien de dimension n, alors $I(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$". Ceci équivaut aussi à $K(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)^\perp$".
• Si $p = 1$ et (u_1) libre ($u_1 \neq 0_E$) alors $K(s_{u_1}) = \mathrm{Vect}(u_1)^\perp$ par définition d'une réflexion donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
• Soit $p \in [\![1;n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Soit $(u_1, \cdots, u_{p+1})$ une famille libre de E et $x \in K(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_{p+1}})$. On compose $s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_{p+1}}(x) = x$ par s_{u_1} pour avoir $s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_{p+1}}(x) = s_{u_1}(x) = x - (x|u_1)u_1$. On en déduit que $(x|u_1)u_1 = x - g(x)$ avec $g = s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_{p+1}}$. Ainsi, $(x|u_1)u_1 \in I(g) = \mathrm{Vect}(u_2, \cdots, u_{p+1})$ par hypothèse de récurrence. Mais comme $u_1 \notin \mathrm{Vect}(u_2, \cdots, u_{p+1})$ car la famille $(u_1, \cdots, u_{p+1})$ est libre, on en déduit que $(x|u_1) = 0$. Par conséquent $x - g(x) = 0_E$ donc $x \in K(s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_{p+1}}) = \mathrm{Vect}(u_2, \cdots, u_{p+1})^\perp$. Tout ceci montre que $x \in \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{p+1})^\perp$. Ainsi $K(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_{p+1}}) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{p+1})^\perp$.
Soit $x \in \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)^\perp$. Comme $\forall k \in [\![1;p]\!],\ x_k \in (\mathbb{R}u_k)^\perp$, on a $s_{u_k}(x) = x$ donc $s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}(x) = x$ puisque x est invariant par toute s_{u_k}. Ainsi $x \in K(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p})$. Alors $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)^\perp \subset K(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p})$. On en déduit bien que $K(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_{p+1}}) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{p+1})^\perp$.
Ainsi, par principe de récurrence, pour toute famille libre $(u_1, \cdots, u_p)$ de vecteurs de E, on a l'égalité des sous-espaces $I(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$ ou $K(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)^\perp$.

12.60 **a.** Classique ! C'est le produit scalaire canonique sur les matrices car $\mathrm{Tr}\ (A^TB) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$ et que la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire.
b. Soit $(S,A) \in S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,S) = \mathrm{Tr}\ (A^TS) = \mathrm{Tr}\ (-AS) = -\mathrm{Tr}\ (AS)$ car A est antisymétrique et Tr est linéaire. De plus, $\varphi(A,S) = \varphi(S,A) = \mathrm{Tr}\ (S^TA) = \mathrm{Tr}\ (SA) = \mathrm{Tr}\ (AS)$. Comme $\mathrm{Tr}\ (AS) = -\mathrm{Tr}\ (AS)$, on a $\mathrm{Tr}\ (AS) = 0$ donc $A \perp S$. Ainsi $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux, ce qui justifie que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$. Par égalité des dimensions ($A_n(\mathbb{R})^\perp$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires de $A_n(\mathbb{R})$), on a $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$: $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux. Ainsi $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^\perp$.

c. ψ est clairement bilinéaire. De plus $\psi(Y,X) = Y^TMX = (Y^TMX)^T$ (puisque c'est une matrice 1×1) donc $\psi(Y,X) = X^TM^TY = \psi(X,Y)$ car M est symétrique. Ainsi ψ est symétrique. Soit $(V_1, \cdots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de M (théorème spectral). On note $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $MV_k = \lambda_k V_k$ avec $\lambda_k > 0$ par hypothèse. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, on le décompose $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k V_k$. Alors, comme $(V_1, \cdots, V_n)$ est une base orthonormale : $\psi(X,X) = X^TMX = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i V_i^T\Big)\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \lambda_j V_j\Big) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_j x_i x_j V_i^T V_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant 0$. De plus, si $X \neq 0$, l'une des coordonnées $x_1, \cdots, x_n$ est non nulle ce qui fait que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$ sera strictement positif. Ainsi, ψ est aussi défini positif. En résumé, ψ est un nouveau produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

12.61 **a.** Il y a bien sûr $n!$ permutations dans ce groupe (pour la loi $\circ$ des permutations de $[\![1;n]\!]$).

b. Par structure de groupe de S_n, ϕ va bien de S_n dans S_n. $\phi(\tau) = \phi(\tau') \Longleftrightarrow \tau \circ \sigma = \tau' \circ \sigma \Longleftrightarrow \tau = \tau'$ (en composant par σ^{-1}) ; ainsi ϕ est injective. Comme S_n est un ensemble fini, on sait que l'injectivité de ϕ équivaut à sa surjectivité et donc à sa bijectivité. Ou alors on constatait qu'un antécédent de $\pi \in S_n$ était $\tau = \pi \circ \sigma^{-1} \in S_n$ pour la surjectivité.

c. f_σ est définie comme l'unique endomorphisme de E qui envoie la base $\mathcal{B}$ sur la base $(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$. Comme f_σ envoie une base orthonormale sur une autre base orthonormale, $f_\sigma \in O(E)$. Puisque f_σ conserve la norme, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f_σ, il existe $x \neq 0_E$ tel que $f_\sigma(x) = \lambda x$ donc $||f_\sigma(x)|| = |\lambda|\,||x||$ donc $|\lambda| = 1$, soit $\lambda = \pm 1$. Si f_σ est diagonalisable, alors $E = E_1(f_\sigma) \oplus E_{-1}(f_\sigma)$ donc f_σ est une symétrie. Réciproquement, une symétrie est diagonalisable car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ l'annule.

Ainsi f_σ est diagonalisable si et seulement si c'est une symétrie orthogonale (car c'est déjà une isométrie). De plus, si $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$, pour $k \in [\![1;n]\!]$, $f_\sigma \circ f_{\sigma'}(e_k) = f_\sigma(e_{\sigma'(k)}) = e_{\sigma \circ \sigma'(k)}$ donc $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$. Ainsi $(f_\sigma)^2 = f_{\sigma^2} = \mathrm{id}_E \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $e_{\sigma^2(k)} = e_k \Longleftrightarrow \sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$. D'où f_σ diagonalisable $\Longleftrightarrow \sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$ ce qui signifie encore que σ est la composée de transpositions à supports disjoints (on peut les dénombrer).

d. Par somme, $p = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un endomorphisme de E. On a $p(e_k) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma \in S_n} f_\sigma(e_k) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(k)}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$. Ainsi $p(e_k) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(k)=j}} e_j\Big)$. Or il existe $(n-1)!$ permutations de S_n telles que $\sigma(k) = j$ puisque l'image de k est choisie mais il reste les $n-1$ autres images à choisir. Ainsi, on trouve simplement $p(e_k) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{j=1}^{n}((n-1)!e_j) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} e_j$. p admet donc pour matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ la matrice A qui ne contient que des $\dfrac{1}{n}$. On vérifie que $A^2 = A$. Comme A est symétrique, p est une projection orthogonale. Comme $\mathrm{rang}\,(A) = 1$, p est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Vect}((1, \cdots, 1))$.

12.62 **a.** Clairement, $0 \in W$ donc $W \neq \emptyset$. De plus, si $(A,B) \in W^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout entier $k \in [\![2;n]\!]$, on a $[A + \lambda B]_{k,1} = [A]_{k,1} + \lambda[B]_{k,1} = 0 + \lambda \times 0 = 0$ et $[A + \lambda B]_{1,k} = [A]_{1,k} + \lambda[B]_{1,k} = 0 + \lambda \times 0 = 0$ donc $A + \lambda B \in W$. Ainsi, W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc W est lui-même un espace vectoriel.

Comme $A \in W \Longleftrightarrow A \in \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, \cdots, E_{n,n})$ on a $W = \mathrm{Vect}(E_{1,1}) \oplus \mathrm{Vect}(E_{i,j} \mid (i,j) \in [\![2;n]\!]^2)$. Comme cette famille $(E_{1,1}) \amalg (E_{i,j})_{(i,j) \in [\![2;n]\!]^2}$ est libre (sous-famille de la base canonique), elle constitue une base de W et, en comptant, on obtient $\dim(W) = 1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$.

b. $v_1 = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$ est unitaire dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique donc (v_1) est une famille orthonormale. D'après le théorème de la base orthonormée incomplète, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de

$\mathbb{R}^n$. La matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ à la base $\mathcal{B}$ est orthogonale car ce sont deux bases orthonormales. La première colonne de P contient v_1 par définition : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \cdots & * \end{pmatrix} \in O(n)$.

c. <u>Méthode 1</u> : notons f (resp. g) l'endomorphisme canoniquement associé à A (resp. à A^T). Avec la base $\mathcal{B}$ de la question précédente, par formule de changement de base, nous avons $B = P^TAP = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $C = P^TA^TP = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ car, comme P est orthogonale, on a $P^T = P^{-1}$. Si $u = (1, \cdots, 1)$, la matrice A appartient à V si et seulement si u est un vecteur propre de f et de g par définition de V. Ceci équivaut au fait que la première colonne de $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ (resp. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$) contient des termes nuls en dehors de la diagonale car ceci équivaut au fait que $Bu = b_{1,1}u$ et $Cu = c_{1,1}u$. Or, un calcul simple montre que $P^TA^TP = C = B^T = (P^TAP)^T$ donc la première colonne de C est la transposée de la première ligne de B.

<u>Méthode 2</u> : en notant E_1 le vecteur colonne tel que $E_1^T = (1\ 0 \cdots 0)$ et V_1 le vecteur colonne tel que $V_1^T = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \ \cdots \ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, si on suppose que U est un vecteur propre de A et de A^T, c'est-à-dire, comme $U = \sqrt{n}\,V_1$, que $AV_1 = \lambda V_1$ et $A^TV_1 = \mu V_1$, on a $P^TAPE_1 = P^TAV_1 = \lambda P^TV_1 = \lambda E_1$ car P^TV_1 est le vecteur colonne tel que $(P^TV_1)^T = \left(||V_1||^2 \ (V_1|V_2) \ \cdots \ (V_1|V_n)\right) = (1\ 0 \cdots 0)$ (V_j est la j-ième colonne de P). De même, on trouve $P^TA^TPE_1 = \mu E_1$ ce qui justifie bien que les premières colonnes de P^TAP et de P^TA^TP sont nulles en dehors de la diagonale donc, comme on a $P^TA^TP = (P^TAP)^T$, que la première colonne et la première ligne de P^TAP sont nulles en dehors de la diagonale. La réciproque se fait de même.

Ainsi, $A \in V \iff$ (les premières colonne et ligne de B sont nulles en dehors de la diagonale) $\iff P^TAP \in W$.

d. La matrice nulle est clairement dans V. Soit $(A, A') \in V^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $P^T(\lambda A + A')P = \lambda P^TAP + P^TA'P \in W$ car $(P^TAP, P^TA'P) \in W^2$ d'après **c.**. V est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel lui-même. On peut aussi le démontrer en revenant à la définition des vecteurs propres.

L'application $f : V \to W$ définie par $f(A) = P^TAP$ est bien définie d'après **c.**, clairement linéaire, et bijective par l'équivalence de la question précédente, un antécédent de $B \in W$ par f est PBP^T. Par conséquent, f est un isomorphisme et, en tant que tel, conserve les dimensions des espaces : $\dim(V) = \dim(W) = (n-1)^2 + 1$.

12.63 **a.** Soit p la projection orthogonale sur le sous-espace $F \subset E$. Soit $(x, y) \in E^2$, on décompose ces deux vecteurs en $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F^2$ et $(x_2, y_2) \in (F^\perp)^2$. Alors p est symétrique car on a $(p(x)|y) = (x_1|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) = (x_1|y_1) = (x_1|y_1) + (x_2|y_1) = (x_1 + x_2|y_1) = (x|p(y))$.

b. p et q étant des projecteurs orthogonaux, ils sont symétriques donc par, par composition, $p \circ q \circ p$ est symétrique. En effet, si $(x, y) \in E^2$, on a $(p \circ q \circ p(x)|y) = (q \circ p(x)|p(y)) = (p(x)|q \circ p(y)) = (x|p \circ q \circ p(y))$ car, successivement, p est symétrique, q est symétrique, p est symétrique.

c. Comme $\text{Im}\,(q)$ et $\text{Ker}(p)$ sont des sous-espaces E, on sait que $(\text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q))^\perp = (\text{Im}\,(p))^\perp \cap (\text{Ker}(q))^\perp$. Or p (même chose pour q) est un projecteur orthogonal donc $\text{Im}\,(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = E_1(p) \perp E_0(p) = \text{Ker}(p)$. On conclut par égalité des dimensions que $\big(\text{Im}\,(p)\big)^\perp = \text{Ker}(p)$. De même $(\text{Ker}(q))^\perp = \text{Im}\,(q)$.
Ainsi : $(\text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q))^\perp = \text{Im}\,(q) \cap \text{Ker}(p)$.

d. D'après la question précédente : $E = \text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q) + (\text{Im}\,(q) \cap \text{Ker}(p))$, ces sous-espaces ne sont pas forcément supplémentaires car on ne sait pas si $\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathsf{Ker}(p) = \{0_E\}$. L'endomorphisme $u = p \circ q \circ p$ est symétrique donc diagonalisable. On va étudier $p \circ q$ sur chacun des trois sous-espaces précédents.

• Comme $\mathrm{Im}\,(p)$ est stable par u, l'endomorphisme induit par u dans $\mathrm{Im}\,(p)$ est aussi symétrique donc diagonalisable et il existe donc une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_r)$ de $\mathrm{Im}\,(p)$ formée de vecteurs propres de u (associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$). Or $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $p(e_k) = e_k$ donc $p \circ q \circ p(e_k) = \lambda_k e_k$ devient $p \circ q(e_k) = \lambda_k e_k$ et e_k est aussi un vecteur propre de $p \circ q$.

• On complète cette famille libre $(e_1, \cdots, e_r)$ en une base $(e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_m)$ de $\mathrm{Im}\,(p) + \mathsf{Ker}(q)$. Or $\forall k \in [\![r+1; m]\!]$, $q(e_k) = 0_E$ donc $p \circ q(e_k) = 0_E$ et e_k est aussi un vecteur propre de $p \circ q$.

• Enfin, on complète cette famille libre $(e_1, \cdots, e_m)$ (qui est une base de $\mathrm{Im}\,(p) + \mathsf{Ker}(q)$) en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$ de E en la complétant avec une base de $(\mathrm{Im}\,(p) + \mathsf{Ker}(q))^\perp = \mathsf{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)$. Or $\forall k \in [\![m+1; n]\!]$, $p \circ q(e_k) = p(q(e_k)) = p(e_k) = 0_E$ donc e_k est à nouveau un vecteur propre de $p \circ q$.

Au final on obtient une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de $p \circ q$ donc $p \circ q$ est diagonalisable.

En général, si u est un projecteur orthogonal sur F d'un espace euclidien E, on va établir les deux inégalités $\forall x \in E,\ 0 \leqslant (u(x)|x) \leqslant ||x||^2$ et $||u(x)||^2 \leqslant ||x||^2$. Il suffit de prendre $x \in E$, de le décomposer $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$ et écrire $(u(x)|x) = (y|y+z) = ||y||^2 + (y|z) = ||y||^2 = ||x||^2 - ||z||^2$ avec PYTHAGORE. Ainsi $0 \leqslant ||y||^2 = (u(x)|x) = ||x||^2 - ||z||^2 \leqslant ||x||^2$. De plus, $||u(x)||^2 = ||y||^2 = (u(x)|x) \leqslant ||x||^2$.

Soit $k \in [\![r+1; n]\!]$, alors $p \circ q(e_k) = 0_E$ donc e_k est associé à la valeur propre 0.

Soit $k \in [\![1; r]\!]$, $p \circ q(e_k) = p \circ q \circ p(e_k) = \lambda_k e_k$ et $\lambda_k ||e_k||^2 = (p \circ q \circ p(e_k)|e_k) = (q \circ p(e_k)|p(e_k))$ car p est symétrique donc $0 \leqslant \lambda_k ||e_k||^2 \leqslant ||p(e_k)||^2 \leqslant ||e_k||^2$ d'après les deux inégalités précédentes puisque p et q sont des projections orthogonales. Comme $||e_k||^2 > 0$, on en déduit que $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$.

Par conséquent, $p \circ q$ est à valeurs propres dans $[0; 1]$.

12.64 **a.** J_n est symétrique réelle donc diagonalisable. J_n est de rang 1 donc $\dim(E_0(J_n)) = n - 1$ par la formule du rang. Comme $\mathsf{Tr}\,(M) = n$, la seule autre valeur propre est n de multiplicité 1. Ainsi $\mathsf{Sp}(J_n) = \{0, n\}$.

b. Comme $J_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, il suffit de normer ces deux vecteurs propres pour avoir $J_2 = P_2 D_2 {}^tP_2$ avec $D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $J_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, il suffit de d'orthonormaliser ces trois vecteurs propres pour avoir $J_3 = P_3 D_3 {}^tP_3$ avec $D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

12.65 **a.** Soit $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note ${}^tX = (x_1\, x_2 \cdots x_n)$. En général ${}^tXAX = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$, ce qui donne ici ${}^tXAX = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,k} x_k^2 + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{k,k} - 1) x_k^2 + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{k,k} - 1) x_k^2 + \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \Big)^2$.

b. Soit $X \in \mathsf{Ker}(A)$, alors $AX = 0$ donc ${}^tXAX = 0$ ce qui implique $X = 0$ par la question **a.**. Ainsi $\mathsf{Ker}(A) = \{0\}$, A est donc "injective" donc A est inversible.

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. Toutes ses valeurs propres sont strictement positives car soit $\lambda \in \mathsf{Sp}(A)$ et $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, alors ${}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda ||X||^2 > 0$ d'après la question **a.** donc $\lambda > 0$ car $||X||^2 > 0$. On dit que A est symétrique définie positive.

12.66 E contient I_n et si $(A,B) \in E^2$, par produit matriciel, on a $A^tB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $A^tB \in O_n(\mathbb{R})$ car $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe. Comme ${}^tB = B^{-1}$, on a $AB^{-1} \in E$ donc E est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ ou de $O_n(\mathbb{R})$ donc E est lui-même un groupe (non abélien à moins que $n = 1$).

Si $A \in E$, comme ses colonnes forment une base orthonormale, elles sont unitaires : $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ donc tous les coefficients (puisqu'ils sont entiers) sont nuls sauf un seul qui vaut ± 1. Mais comme les colonnes sont orthogonales entre elles, deux cases avec des ± 1 ne peuvent pas être sur la même ligne si elles correspondent à des colonnes différentes. L'application $\varphi : [\![1;n]\!] \to [\![1;n]\!]$ définie par $\varphi(j) = i$ où $a_{i,j} = \pm 1$ est donc une permutation (et il y en a $n!$). Il reste à choisir les signes des n cases non nulles : 2^n choix. Il y a donc $2^n n!$ éléments dans le groupe E avec des matrices comme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $n = 3$.

12.67 **a.** Soit λ une valeur propre (réelle par le théorème spectral) de la matrice symétrique réelle A, il existe $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ avec $AV = \lambda V$. Alors ${}^tVAV = \lambda {}^tVV = \lambda ||V||^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$ car $||V||^2 > 0$. Ainsi, $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$.

b. Si $X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ est constante (avec $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ X(t) = U$) et solution de (E), alors $X' = 0$ donc $AU = B$ donc $X = U \in S$. Les solutions constantes de (E) sont les fonctions $X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ X(t) = U \in S$.

c. Définissons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = ||X(t) - Y(t)||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k(t) - y_k(t))^2$. Comme X et Y sont dérivables, toutes les x_k et y_k le sont donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, d'après le cours, on a $f'(t) = 2(X'(t) - Y'(t)|X(t) - Y(t)) = -2(A(X(t) - Y(t))|X(t) - Y(t)) = {}^t(X - Y)A(X - Y) \leqslant 0$ par hypothèse sur la matrice A. Ainsi, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. Soit X une solution quelconque de (E). Prenons $Y(t) = U \in S$, alors Y est solution de (E) d'après la question **b.** donc $g : t \mapsto ||X(t) - U||$ est décroissante donc bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $g(0) = ||X(0) - U||$ d'après **c.**. $\forall t \geqslant 0,\ ||X(t)|| = ||X(t) - U + U|| \leqslant ||X(t) - U|| + ||U|| \leqslant ||X(0) - U|| + ||U||$ donc X est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Soit X une solution de (E) qu'on décompose dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_n)$ de vecteurs propres de A : $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t)V_i$. On décompose aussi $B = \sum\limits_{i=1}^{n} b_iV_i$. On note k la dimension de $Ker(A) = E_0(A)$, on prend $V_1, \cdots, V_k$ dans $Ker(A)$ et $V_{k+1}, \cdots, V_n$ associés à des valeurs propres strictement positives $\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n$ de A (pas forcément distinctes). Alors $X'(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i'(t)V_i = -A\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t)V_i\Big) + B = \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - \lambda_i x_i(t))V_i$ ce qui donne en identifiant $\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i'(t) = -\lambda_i x_i(t) + b_i \quad (F_i)$. Comme $B \in Im(A)$ par hypothèse puisque $S \neq \emptyset$ et que $Im(A) = Vect(V_{k+1}, \cdots, V_n)$ on a $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Si $i \in [\![1;k]\!]$, on en déduit que x_i est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ car $\lambda_i = 0$ et $b_i = 0$ donc $\forall t \geqslant 0,\ x_i(t) = x_i(0)$. Si $i \in [\![k+1;n]\!]$, en résolvant (F_i) sur $\mathbb{R}_+$: $\forall t \geqslant 0,\ x_i(t) = \Big(x_i(0) - \dfrac{b_i}{\lambda_i}\Big)e^{-\lambda_i t} + \dfrac{b_i}{\lambda_i}$, ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = \dfrac{b_i}{\lambda_i}$. En posant $X_\infty = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i(0)V_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \dfrac{b_i}{\lambda_i}V_i$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = X_\infty$. De plus, $X_\infty \in S$ car $AX_\infty = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i(0)AV_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \dfrac{b_i}{\lambda_i}AV_i = \sum\limits_{i=k+1}^{n} b_iV_i = B$.

e. Les vecteurs de S, dans la base $\mathcal{B}$ définie ci-dessus, sont les U qui s'écrivent $U = \sum\limits_{i=1}^{k} u_iV_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \dfrac{b_i}{\lambda_i}V_i$. Ainsi $||X(0) - X_\infty||^2 = \Big|\Big|\sum\limits_{i=k+1}^{n} \dfrac{b_i}{\lambda_i}V_i\Big|\Big|^2 = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \dfrac{b_i^2}{\lambda_i^2}$ (car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée) alors que si $U \in S$, on a

$||X(0)-U||^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i(0)-u_i)^2 + \sum_{i=k+1}^{n}\frac{b_i^2}{\lambda_i^2} \geqslant ||X(0)-X_\infty||^2$. On a donc $\forall U \in S,\ ||X(0)-X_\infty|| \leqslant ||X(0)-U||$ avec égalité si $U = X_\infty$. On vient donc d'établir que $||X(0)-X_\infty|| = \underset{U\in S}{\mathrm{Inf}}\,||X(0)-U||$.

f. Supposons $S = \emptyset$ et qu'une solution X de (E) admette une limite finie en $+\infty$: $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = X_\infty \in \mathbb{R}^2$. Par continuité de $V \mapsto -AV+B$, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} X'(t) = -AX_\infty + B = D'_\infty$. Mais comme X admet une limite finie en $+\infty$, il est classique de conclure que $D'_\infty = 0$. Ainsi, $AX_\infty = B$ et $X_\infty \in S$ ce qui est absurde. Par conséquent, si $S = \emptyset$, les solutions de (E) n'admettent pas de limite finie en $+\infty$.

12.68 **a.** Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors $MX = \begin{pmatrix} a - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{6}c \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c \end{pmatrix}$ donc, par inégalité triangulaire, on obtient la majoration $||MX||_1 = \left|a - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{6}c\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c\right| \leqslant |a| + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)|b| + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)|c|$. Ainsi, $||MX||_1 \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)(|a|+|b|+|c|)$ car $1 \leqslant \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sim 1,6052$ et $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 1,366 \leqslant \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Ainsi, en posant $C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, on a $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ ||MX||_1 \leqslant C||X||_1$. Cette inégalité est une égalité si on prend le vecteur non nul $X \in \mathbb{R}^3$ tel que ${}^tX = (0\ 0\ 1)$ donc $|||M|||_1 = \underset{X\neq 0}{\mathrm{Sup}}\,\frac{||MX||_1}{||X||_1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sim 1,605$.

b. Avec les notations précédentes, il vient $||MX||_\infty = \mathrm{Max}\left(\left|a - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right|, \left|\frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{6}c\right|, \left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c\right|\right)$ or on a $\left|a - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right| \leqslant |a| + \frac{|b|}{2} + \frac{|c|}{2} \leqslant 2||X||_\infty$, $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{6}c\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}|b| + \frac{\sqrt{3}}{6}|c| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)||X||_\infty \leqslant 2||X||_\infty$ et $\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}||X||_\infty \leqslant 2||X||_\infty$ donc $||MX||_\infty \leqslant 2||X||_\infty$. Cette inégalité est une égalité si on prend le vecteur non nul $X \in \mathbb{R}^3$ tel que ${}^tX = (1\ \ -1\ 1)$ donc $|||M|||_\infty = \underset{X\neq 0}{\mathrm{Sup}}\,\frac{||MX||_\infty}{||X||_\infty} = 2$.

c. L'inégalité $||MX||_2^2 \leqslant C^2||X||_2^2$ équivaut à ${}^tX{}^tMMX \leqslant C^2\,{}^tXX$ ce qui conduit à étudier la matrice ${}^tMM$. Or, ${}^tMM = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral et il existe une base orthonormale de vecteurs propres de $A = {}^tMM$. On trouve $\chi_A = (X-1)^3 - \frac{1}{2}(X-1)$ donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lambda_3 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Soit une base orthonormée $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\forall i \in [\![1;3]\!],\ AX_i = \lambda_i X_i$. Par exemple, on peut prendre ${}^tX_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\ 1\ 1)$, ${}^tX_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\ -1\ 1)$ et ${}^tX_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\ -1\ 1)$ par résolution de systèmes. Alors en décomposant $X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3$, on a ${}^tX{}^tMMX = {}^tXAX = (x_1{}^tX_1 + x_2{}^tX_2 + x_3{}^tX_3)(\lambda_1x_1X_1 + \lambda_2x_2X_2 + \lambda_3x_3X_3)$ donc, comme ${}^tX_iX_j = \delta_{i,j}$, ${}^tXAX = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 \leqslant \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \lambda_2{}^tXX$. Ainsi, on a la majoration $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ ||MX||_2^2 \leqslant \lambda_2||X||_2^2$ donc $||MX||_2 \leqslant \sqrt{\lambda_2}||X||_2$. Cette inégalité est une égalité si on prend le vecteur non nul $X = X_2 \in \mathbb{R}^3$ donc $|||M|||_2 = \underset{X\neq 0}{\mathrm{Sup}}\,\frac{||MX||_2}{||X||_2} = \sqrt{\lambda_2} \sim 1,31$.

12.69 **a.** Les matrices triangulaires supérieures T vérifient la propriété $\chi_T = \prod\limits_{k=1}^{n}(X - t_{k,k})$ donc B_n est non vide.

b. Pour $n = 1$, il est clair que $B_1 = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc que B_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Dès que $n \geqslant 2$, B_n n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par somme. En effet, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans B_2 alors que $A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ car $\chi_{A_2-B_2} = X^2+1$ donc $\mathrm{Sp}(A_2-B_2) = \{-i, i\}$ alors que les deux termes diagonaux de $A_2 - B_2$ sont 0 et 0. On peut généraliser pour $n \geqslant 3$ en prenant $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec les mêmes justifications.

c. Si A est symétrique, pour le produit scalaire canonique sur les matrices défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$, on a $||A||^2 = \mathrm{Tr}\,({}^tAA) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$. Or, d'après le théorème spectral, on a $A = PD{}^tP$ avec P orthogonale et D diagonale contenant les valeurs propres de A (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Ainsi, il vient $||A||^2 = \mathrm{Tr}\,({}^tAA) = \mathrm{Tr}\,(PD^2{}^tP) = \mathrm{Tr}\,(D^2)$ car deux matrices semblables ont même trace. Or $\mathrm{Tr}\,(D^2) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ ce qui donne bien la relation $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ (1).

d. Si $A \in B_n \cap S_n$, d'après la question précédente, $||A||^2 = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$. Mais puisque l'on sait que $\chi_A = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - a_{k,k}) = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)^{m_\lambda(A)}$, on a en identifiant $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$ (2) (somme des carrés des racines de χ_A). Par soustraction entre (1) et (2), il ne reste que $\sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}^2 = 0$ donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$ et enfin A diagonale. Réciproquement, les matrices diagonales (étant triangulaires supérieures par exemple) sont dans B_n. Ainsi, $B_n \cap S_n = D_n$ (les matrices diagonales).

e. Si $A \in B_n \cap S_n$, alors par hypothèse $\chi_A = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - 0) = X^n$ car les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Par Cayley-Hamilton, $A^n = 0$ donc A est nilpotente. Comme A^2 est symétrique réelle car ${}^t(A^2) = {}^tA{}^tA = (-A)(-A) = A^2$, la matrice A^2 est diagonalisable par le théorème spectral. De plus, elle est aussi nilpotente car $(A^2)^n = (A^n)^2 = 0$. Alors $A^2 = 0$ car A^2 est semblable à une matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. Ainsi $A^2 = 0 = -{}^tAA$ donc ${}^tAA = 0$ ce qui donne $||A||^2 = \mathrm{Tr}\,({}^tAA) = 0$ donc $A = 0$. Par conséquent $B_n \cap A_n = \{0\}$.

12.70 **a.** Il est clair que $\mathrm{rang}\,(A) = 2$ donc 0 est valeur propre et $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$ par la formule du rang. On trouve sans peine $v_1 = (1,0,-2) \in \mathrm{Ker}(A)$. Si on pose $v_2 = (1,1,1)$, on voit que $Av_2 = -v_2$ donc -1 est une autre valeur propre de A. Comme $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$, la dernière valeur propre cherchée est 3. Ainsi, $\chi_A = X(X+1)(X-3)$ ce qu'on pouvait bien sûr calculer directement par déterminant. Comme il y a 3 valeurs propres distinctes en dimension 3, A est diagonalisable. En résolvant le système linéaire $AX = 3X$ ou en écrivant $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, on a $E_3(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1,-3,1)$. Les trois sous-espaces propres sont des droites et on a $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $E_3(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ de sorte que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(0,-1,3)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. On trouve par calcul direct de déterminant que $\chi_A = (X-\lambda)(X-\mu)(X-\nu) - b\beta(X-\lambda) - a\alpha(X-\nu)$ donc $\chi_A = (X-\lambda)(X-\mu)(X-\nu) - (a\alpha + b\beta)\Big(X - \dfrac{a\alpha\nu + b\beta\lambda}{a\alpha + b\beta}\Big)$. Comme $a\alpha > 0$ et $b\beta > 0$, en posant $m = \dfrac{a\alpha\nu + b\beta\lambda}{a\alpha + b\beta}$, on vérifie sans peine que $m \in \widetilde{]\lambda;\nu[}$ si $\lambda \neq \nu$ car m est un barycentre à coefficients positifs de λ et ν et que $m = \lambda = \nu$ si $\lambda = \nu$. Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \chi_A(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_A(x) = +\infty$. Posons $u = a\alpha + b\beta > 0$ et considérons plusieurs cas :

• si $\lambda < \nu$, alors $\lambda < m < \nu$ donc $\chi_A(\lambda) = -u(\lambda - m) > 0$ et $\chi_A(\nu) = -u(\nu - m) < 0$ donc, par le TVI, χ_A s'annule une fois sur chacun des intervalles $]-\infty;\lambda[$, $]\lambda;\nu[$ et $]\nu;+\infty[$.
• si $\nu < \lambda$, par symétrie, χ_A s'annule une fois sur chacun des intervalles $]-\infty;\nu[$, $]\nu;\lambda[$ et $]\lambda;+\infty[$.
• si $\nu = \lambda = \mu$, alors $\chi_A = (X-\lambda)^3 - u(X-\lambda)$ donc χ_A s'annule en $\lambda, \lambda + \sqrt{u}$ et $\lambda - \sqrt{u}$.
• si $\mu < \lambda = \nu = m$, alors $\chi_A = (X-\lambda)\big((X-\lambda)(X-\mu) - u\big) = (X-\lambda)P$ avec $P = (X-\lambda)(X-\mu) - u$ et $\chi_A(\lambda) = 0$, $\chi_A(\mu) = -u(\mu - \lambda) > 0$ et $P(\lambda) = -u < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ donc, par le TVI encore, χ_A s'annule en λ et une fois sur chacun des intervalles $]-\infty;\lambda[$, $]\lambda;+\infty[$.
• si $\lambda = \nu = m < \mu$, à nouveau $\chi_A = (X-\lambda)\big((X-\lambda)(X-\mu) - u\big) = (X-\lambda)P$ avec $P = (X-\lambda)(X-\mu) - u$ et $\chi_A(\lambda) = 0$, $\chi_A(\mu) = -u(\mu-\lambda) < 0$ et $P(\lambda) = -u < 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ donc, par le TVI encore, χ_A s'annule en λ et une fois sur chacun des intervalles $]-\infty;\lambda[$, $]\mu;+\infty[$.
Dans tous les cas, χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ donc toutes les valeurs propres de A sont réelles et simples : A est diagonalisable et tous ses sous-espaces propres sont des droites.
<u>Autre méthode</u> : trouver une matrice symétrique semblable à A. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels strictement positifs et $P = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, alors $P^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\lambda_3^{-1})$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha\lambda_1^{-1}\lambda_2 & 0 \\ -a\lambda_2^{-1}\lambda_1 & \mu & -\beta\lambda_2^{-1}\lambda_3 \\ 0 & -b\lambda_3^{-1}\lambda_2 & \nu \end{pmatrix} = A'$.
Il suffit donc de choisir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de manière à avoir $\alpha\lambda_1^{-1}\lambda_2 = a\lambda_2^{-1}\lambda_1$ et $\beta\lambda_2^{-1}\lambda_3 = b\lambda_3^{-1}\lambda_2$ pour que A' soit symétrique. On prend donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{\dfrac{a}{\alpha}}$ et $\lambda_3 = \sqrt{\dfrac{b}{\beta}}$ et A' est symétrique donc diagonalisable par le théorème spectral. Mais comme A est semblable à A', elle est aussi diagonalisable. De plus, pour toute valeur propre θ de A', la matrice $A' - \theta I_3$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda-\theta & -u & 0 \\ -u & \mu-\theta & -\nu \\ 0 & -\nu & \nu-\theta \end{pmatrix}$ qui est visiblement de rang 2 car les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires car u et v sont non nuls. Ceci prouve autrement que tous les sous-espaces propres sont des droites donc que les trois valeurs propres sont distinctes.

12.71 **a.** Pour $(x,x',y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(\alpha x + x', y) = (u(\alpha x + x')|y) = (\alpha u(x) + u(x')|y)$ par linéarité de u donc $\Phi(\alpha x + x', y) = \alpha(u(x)|y) + (u(x')|y) = \alpha\Phi(x,y) + \Phi(x',y)$ par bilinéarité du produit scalaire donc Φ est linéaire par rapport à sa première variable. De même, si on se donne $(x,y,y') \in E^2$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(x, \beta y + y') = (u(x)|\beta y + y') = \beta(u(x)|y) + (u(x)|y') = \beta\Phi(x,y) + \Phi(x,y')$ par bilinéarité du produit scalaire donc Φ est linéaire par rapport à sa seconde variable. Au final, Φ est bien bilinéaire.
Si Φ est symétrique, pour $(x,y) \in E^2$, $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$ donc $(u(x)|y) = (u(y)|x) = (x|u(y))$ par symétrie du produit scalaire donc u est un endomorphisme auto-adjoint. Par le théorème spectral, u est diagonalisable.
b. Montrons que Φ est un produit scalaire si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ (u symétrique défini positif).
($\Longrightarrow$) Si Φ est un produit scalaire, soit λ une valeur propre de u, alors il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$. Comme $\Phi(x,x) > 0$ par hypothèse, on obtient $(u(x)|x) = (\lambda x|x) > 0$ donc $\lambda||x||^2 > 0$ d'où $\lambda > 0$ car $||x||^2 > 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ et u est bien un endomorphisme symétrique défini positif.
($\Longleftarrow$) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, soit $x \neq 0_E \in E$ et $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ strictement positives. On décompose $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k$ et $\Phi(x,x) = (u(x)|x) = \Big(u\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k\Big)\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k\Big) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k v_k\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée donc $\Phi(x,x) > 0$ car au moins l'un des x_k est non nul et alors $\lambda_k x_k^2 > 0$. Ainsi, Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire.

c. u est diagonalisable d'après **a.** et son rang vaut 1. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n-1 > 0$ par la formule du rang, 0 est valeur propre de u. Comme E est la somme orthogonale de ses sous-espaces propres, il n'y a qu'une valeur propre non nulle de u, on la note λ. Alors, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus E_\lambda(u)$ donc $E_\lambda(u) = \mathrm{Vect}(v) = \mathrm{Im}\,(u)$ (avec $v \neq 0_E$) est une droite et $\mathrm{Ker}(u) \perp \mathrm{Im}\,(u)$ donc $\mathrm{Ker}(u) = (\mathrm{Vect}(v))^\perp$.

Tout vecteur x de E s'écrit $x = x - \dfrac{(x|v)}{||v||^2}v + \dfrac{(x|v)}{||v||^2}v = p(x) + \varphi(x)v$ avec $p(x) = x - \dfrac{(x|v)}{||v||^2}v$ le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(u)$ car $\left(x - \dfrac{(x|v)}{||v||^2}v \middle| v\right) = (x|v) - (x|v) = 0$ et $\varphi(x) = \dfrac{(x|v)}{||v||^2}$. L'application φ est une forme linéaire sur E par bilinéarité du produit scalaire. Ainsi $\Phi(x,y) = \Phi(p(x)+\varphi(x)v, p(y)+\varphi(y)v)$ donc $\Phi(x,y) = \Phi(p(x),p(y)) + \varphi(x)\Phi(v,p(y)) + \varphi(y)\Phi(p(x),v) + \varphi(x)\varphi(y)\Phi(v,v)$. Mais, comme $p(x) \in \mathrm{Ker}\,(u)$, $\Phi(p(x),v) = (u(p(x))|v) = (0_E|v) = 0$. De même, il vient $\Phi(v,p(y)) = \Phi(p(y),v) = (u(p(y))|v) = (0_E|v) = 0$ et $\Phi(p(x),p(y)) = (u(p(x))|p(y)) = 0$ car $p(x) \in \mathrm{Ker}(u)$ et $p(y) \in \mathrm{Ker}(u)$. Ainsi $\Phi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)\Phi(v,v)$.

On considère alors trois cas :

- Si $\Phi(v,v) = 0$, on pose $\ell = 0 \in E^*$ la forme linéaire nulle et on a bien $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = \ell(x)\ell(y)$.
- Si $\Phi(v,v) > 0$, on pose $\gamma = \sqrt{\Phi(v,v)}$ et $\ell = \dfrac{\varphi}{\gamma} \in E^*$ et on a $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = \ell(x)\ell(y)$.
- Si $\Phi(v,v) < 0$, on pose $\gamma = \sqrt{-\Phi(v,v)}$ et $\ell = \dfrac{\varphi}{\gamma} \in E^*$ et on a $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = -\ell(x)\ell(y)$.

Dans les trois cas, il existe $\ell \in E^*$ tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = \varepsilon \ell(x)\ell(y)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Question de cours : soit v un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et e_1, e_2 deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Alors $e_1 \perp e_2$. En effet, $(u(e_1)|e_2) = (e_1|u(e_2))$ donc $\lambda_1(e_1|e_2) = \lambda_2(e_1|e_2)$ donc $(\lambda_1 - \lambda_2)(e_1|e_2) = 0$ donc, comme $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, on a $(e_1|e_2) = 0$.

12.72 **a.** Si A est symétrique, il existe D diagonale et P orthogonale telles que $A = PD{}^tP$ par le théorème spectral donc A est orthodiagonalisable. Réciproquement, si $A = PD{}^tP$ avec D diagonale et P orthogonale, alors ${}^tA = {}^t({}^tP){}^tD{}^tP = PD{}^tP = A$ car ${}^tD = D$ puisque D est diagonale, ainsi A est bien symétrique.
On a l'équivalence : A est orthodiagonalisable $\iff$ A est symétrique.
b. Avec la question précédente, une telle matrice A est orthodiagonalisable si et seulement si elle est symétrique, c'est-à-dire si et seulement si $\sin(\theta) = -\sin(\theta)$ ou encore $\theta \equiv 0\ [\pi]$. Il y a donc deux telles matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$) et A représente l'identité, et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$) et A représente la symétrie centrale (ou homothétie de rapport -1).
Questions de cours :
• Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien, alors χ_u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, u est diagonalisable et, plus précisément, il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.
• Soit E un espace euclidien, on dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique s'il vérifie la condition $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|u(y))$. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, alors u est un endomorphisme symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique.
• Le groupe spécial orthogonal de E est l'ensemble des isométries vectorielles u de E (c'est-à-dire que $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$) tels que $\det(u) = 1$. On le note $SO(E)$ et on sait que $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$ qui est lui-même un sous-groupe de $GL(E)$ pour la loi $\circ$.

12.73 **a.** Il y a bien sûr $n!$ permutations dans ce groupe (pour la loi $\circ$ des permutations de $[\![1;n]\!]$). La composée de deux permutations de $[\![1;n]\!]$ en est encore une, donc ϕ va bien de S_n dans S_n. ϕ est injective car $\phi(\tau) = \phi(\tau') \iff \tau \circ \sigma = \tau' \circ \sigma \iff \tau = \tau'$ (en composant par σ^{-1}). Comme S_n est un ensemble fini, on sait que l'injectivité de ϕ équivaut à sa surjectivité et donc à sa bijectivité. Ou alors on constatait qu'un antécédent de $\pi \in S_n$ était $\tau = \pi \circ \sigma^{-1} \in S_n$ pour la surjectivité.

b. En tant que somme d'endomorphismes, l'application $p = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un endomorphisme de E. Soit $k \in [\![1;n]\!]$, on a $p(e_k) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma \in S_n} f_\sigma(e_k) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(k)}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$. Ainsi $p(e_k) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(k)=j}} e_j\Big)$.
Or il existe $(n-1)!$ permutations de S_n telles que $\sigma(k) = j$ puisque l'image de k est choisie mais il reste les $n-1$ autres images à choisir. Ainsi, on trouve simplement $p(e_k) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{j=1}^{n}((n-1)!e_j) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} e_j$.

p admet donc pour matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ la matrice A qui ne contient que des $\dfrac{1}{n}$. On vérifie que $A^2 = A$. Comme A est symétrique, p est une projection orthogonale. Comme $\text{rang}\,(A) = 1$, p est la projection orthogonale sur la droite $\text{Im}\,(p) = \text{Vect}((1, \cdots, 1))$.

12.74 ((i) et (ii)) $\Longrightarrow$ (iii) : si f est une isométrie et $f^2 = -\text{id}_E$ alors $\forall x \in E,\ (f(x)|x) = -(f(x)|f(f(x)))$ car $f^2 = -\text{id}_E$ donc $(f(x)|x) = -(x|f(x))$ car f conserve le produit scalaire et on en déduit que $(x|f(x)) = 0$.
((i) et (iii)) $\Longrightarrow$ (ii) : si f est une isométrie et $\forall x \in E,\ (f(x)|x) = 0$, montrons que $\forall x \in E,\ ||f^2(x)+x||^2 = 0$. Or $0 = (f(x+f(x))|x+f(x)) = (f(x)+f^2(x)|x+f(x)) = ||f(x)||^2+(f^2(x)|x)$ car $(f(x)|x) = (f^2(x)|f(x)) = 0$. Mais $||f(x)||^2 = ||f^2(x)||^2 = ||x||^2$ car f est une isométrie donc on a aussi $||f^2(x)||^2+(f^2(x)|x) = ||x||^2+(f^2(x)|x) = 0$. On somme pour obtenir $||f^2(x)||^2+2(f^2(x)|x)+||x||^2 = ||f^2(x)+x||^2 = 0$ donc $f^2(x) = -x$. Ainsi $f^2 = -\text{id}_E$.
((ii) et (iii)) $\Longrightarrow$ (i) : si $f^2 = -\text{id}_E$ et $\forall x \in E,\ (f(x)|x) = 0$ alors, en appliquant (iii) à $x+f(x)$, on a $\forall x \in E,\ (f(x+f(x))|x+f(x)) = 0 \Longleftrightarrow (f(x)-x|x+f(x)) = 0 \Longleftrightarrow ||f(x)||^2 - ||x||^2 = 0$ donc $||f(x)|| = ||x||$ et f est une isométrie car elle conserve la norme.
En dimension 2, si f est une isométrie vectorielle telle que $f^2 = -\text{id}_E$, f ne peut donc pas être une symétrie donc f est une rotation, et comme $f^2 = -\text{id}_E$, c'est une rotation d'angle $\pm\pi/2$: il en existe donc deux.
En dimension 3, $f^2 = -\text{id}_E \Longrightarrow \det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\text{id}_E) = -1$: impossible ! Pas de telle isométrie.

12.75 **a.** $S^2 = (MM^T)(MM^T) = M(M^TM)M^T = M(MM^T)M^T = M^2(M^T)^2 = M^2(M^2)^T = (-4I_n)(-4I_n)^T = 16I_n$ en raison des hypothèses $(*)$ et par associativité. Ainsi, $S^2 = 16I_n$ donc X^2-16 est annulateur de S.
La matrice S est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Mais sans ça, comme $X^2-16 = (X-4)(X+4)$ est annulateur de S et scindé à racines simples, S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\text{Sp}(S) \subset \{-4, 4\}$. On a $(S-4I_n)(S+4I_n) = 0$ et $(M/2) \in O(n) \Longleftrightarrow (M/2)(M/2)^T = I_n \Longleftrightarrow S = 4I_n$. On voudrait donc prouver que $S+4I_n$ est inversible, c'est-à-dire que -4 n'est pas valeur propre de S.
Par l'absurde, si -4 était valeur propre de S, il existerait $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $SX = -4X$. On aurait donc $M^TMX = -4X$ d'où $||MX||^2 = X^TM^TMX = -4X^TX = -4||X||^2$ en multipliant par X^T à gauche. Or $||X||^2 > 0$ car $X \neq 0$ donc cela donnerait $||MX||^2 < 0$ ce qui ne se peut ! Comme $S+4I_n$ est inversible, $(S-4I_n)(S+4I_n) = 0$ devient $S-4I_n = 0$ en multipliant par $(S+4I_n)^{-1}$ à droite. On pouvait dire aussi que comme $\text{Sp}(S) \neq \emptyset$ puisque S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'on a vu que $\text{Sp}(S) \subset \{-4, 4\}$ et que $-4 \notin \text{Sp}(S)$, alors $\text{Sp}(S) = \{4\}$ donc S est semblable à $4I_n$ donc $S = P(4I_n)P^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $S = 4I_n$. Toujours est-il que $S = MM^T = 4I_n$ donc $(M/2)(M/2)^T = I_n$ et $(M/2) \in O(n)$.

b. Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2+4I_2 = 0$ et $M^TM = MM^T$, alors $\dfrac{M}{2} \in O(2)$ et $\left(\dfrac{M}{2}\right)^2 = -I_2$. On sait que les matrices de $O(2)$ sont les $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO(2)$ ou les $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in O(2)\backslash SO(2)$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. Or $S_\theta^2 = I_2 \neq -I_2$ et $R_\theta^2 = R_{2\theta} = -I_2 = R_\pi$ si et seulement si $2\theta \equiv \pi\ [2\pi] \Longleftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ainsi $\frac{M}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\frac{M}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme réciproquement elles conviennent, les seules matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + 4I_2 = 0$ et $M^TM = MM^T$ sont les matrices antisymétriques $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $(*)$, alors $M^2 = -4I_3$ donc $\det(M^2) = (\det(M))^2 = -64 = \det(-4I_3)$, ce ne se peut ! Il n'y a donc aucune matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $(*)$ pour $n = 3$.

12.76 **a.** Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et si X est un vecteur du noyau de $I_n + A$, alors $(I_n + A)X = 0$ donc $AX = -X$. Alors $X^TAX = -X^TX = -||X||^2$ mais on a aussi $X^TAX = -X^TA^TX = -(AX)^TX = X^TX = ||X||^2$. Ainsi, $2||X||^2 = 0$ donc $X = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(A + I_n) = \{0\}$ donc $A + I_n$ est inversible.

b. La matrice $M = (I_n+A)^{-1}(I_n-A)$ est bien définie par la question précédente car I_n+A est inversible. Les polynômes en A commutent donc $(I_n-A)(I_n+A) = (I_n+A)(I_n-A)(= I_n-A^2)$. En multipliant par $(I_n+A)^{-1}$ à gauche et à droite, on a $(I_n+A)^{-1}(I_n-A) = (I_n-A)(I_n+A)^{-1}$. Comme $A^T = -A$ et $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$, il vient $M^TM = ((I_n+A)^{-1}(I_n-A))^T((I_n+A)^{-1}(I_n-A)) = (I_n+A)(I_n-A)^{-1}(I_n+A)^{-1}(I_n-A)$. Ainsi, $M^TM = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)I_n(I_n + A)^{-1} = I_n$. Par définition, $M \in O(n)$.

c. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $M = (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \in O(n)$. Mais on a même $M \in SO(n)$ car $\det(M) = \dfrac{\det(I_n + A)}{\det(I_n - A)}$ or $I_n - A = (I_n + A)^T$ donc $\det(I_n - A) = \det(I_n + A)$ et $\det(M) = 1$.

On a nettement mieux : soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = -X$, alors $(I_n + A)^{-1}(I_n - A)X = -X$ donc $(I_n - A)X = -(I_n + A)X$ d'où $2X = 0$ et $X = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(M + I_n) = \{0\}$ et -1 n'est pas valeur propre de M.

d. D'après les questions précédentes, φ est bien définie de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $SO_n(\mathbb{R})$. Ensuite, si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $M = \varphi(A)$, on a $(I_n + A)(M + I_n) = (I_n + A)\big((I_n + A)^{-1}(I_n - A) + I_n\big) = I_n - A + I_n + A = 2I_n$ donc $M + I_n$ est inversible et -1 n'est pas valeur propre de M (on le savait déjà avec la question **c.**). L'image de φ est bien incluse dans l'ensemble $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$.

• Soit $(A, B) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $\varphi(A) = \varphi(B)$, alors comme les matrices $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent, il vient : $(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A) = (I_n - B)(I_n + B)^{-1} \Longleftrightarrow (I_n - A)(I_n + B) = (I_n + A)(I_n - B)$ qui est encore équivalent à $A = B$ en développant. Ainsi, φ est injective.

• En résolvant l'équation $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a successivement $M(I_n + A) = I_n - A \Longleftrightarrow (I_n + M)A = I_n - M \Longleftrightarrow A = (I_n + M)^{-1}(I_n - M)$ si $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Ainsi, si $M \in O_n(\mathbb{R})$ et $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$, on pose $A = (I_n + M)^{-1}(I_n - M)$ (qui existe) et on vérifie que A est antisymétrique. En effet, $A^T = ((I_n+M)^{-1}(I_n-M))^T = (I_n-M^T)(I_n+M^T)^{-1} = (I_n-M^{-1})(I_n+M^{-1})^{-1}$ donc $A^T = M^{-1}(M - I_n)M(M + I_n)^{-1} = -(I_n + M)^{-1}(I_n - M) = -A$ (tout commute) et φ est surjective.

Au final, φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$.

12.77 **a.** On constate d'abord que u est linéaire par linéarité de la trace et va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même donc u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit M une matrice non nulle telle que $\mathrm{Tr}\,(M)=0$ (par exemple $M=E_{1,2}$), alors $u(M)=-M$ donc -1 est valeur propre de u.

b. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par définition de u, on a $u(M)=-M \iff \mathrm{Tr}\,(M)I_n=0 \iff \mathrm{Tr}\,(M)=0$. Ainsi, $E_{-1}(u)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$. Comme Tr est une forme linéaire non nulle, $E_{-1}(u)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1}(u)$ est donc de dimension n^2-1. Une base de $E_{-1}(u)$ est $((E_{1,1}-E_{i,i})_{2\leqslant i\leqslant n},(E_{i,j})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n})$.

c. Comme $u(I_n)=(n-1)I_n$ et que $I_n\neq 0$, $n-1$ est aussi une valeur propre de u. Comme $I_n\notin\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$ et $\mathrm{Vect}(I_n)$ sont en somme directe donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=E_{-1}(u)\oplus\mathrm{Vect}(I_n)$. Comme $\mathrm{Vect}(I_n)\subset E_{n-1}(u)$, on a $E_{n-1}(u)=\mathrm{Vect}(I_n)$ par inclusion et égalité des dimensions. L'endomorphisme u est donc diagonalisable, ses valeurs propres sont -1 et $n-1$ avec des multiplicités respectives n^2-1 et 1.
Ainsi, $\det(u)=(-1)^{n^2-1}(n-1)$ et $\mathrm{Tr}\,(u)=-(n^2-1)+n-1=n-n^2$.
d. Testons avec le produit scalaire canonique défini par classiquement $(A|B)=\mathrm{Tr}\,({}^tAB)$.
Alors $(u(A)|B)=(-A+\mathrm{Tr}\,(A)I_n|B)=-(A|B)+\mathrm{Tr}\,(A)(I_n|B)=-(A|B)+\mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B)$. Cette expression étant symétrique en A, B, on a aussi $(u(B)|A)=-(B|A)+\mathrm{Tr}\,(B)\mathrm{Tr}\,(A)=(u(A)|B)$ donc u est bien un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire canonique. Une base orthonormale de vecteurs propres de u contient les n^2 vecteurs suivants : $\dfrac{I_n}{\sqrt{n}}$, $E_{i,j}$ avec $i\neq j$ (il y en a n^2-n) et les matrices $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1}-E_{2,2})$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1}-E_{2,2})$, $\cdots$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1}+E_{2,2}+\cdots+E_{n-1,n-1}-E_{n,n})$ (il y en a $n-1$).

12.78 **a.** D'abord, ${}^tH(V)={}^t\Big(I_n-\dfrac{2}{||V||^2}V{}^tV\Big)=I_n-\dfrac{2}{||V||^2}{}^t(V{}^tV)=I_n-\dfrac{2}{||V||^2}V{}^tV$ par linéarité de la transposée et d'après la formule classique ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$. Ainsi, la matrice $H(V)$ est bien symétrique.
De plus, ${}^tH(V)H(V)=H(V)^2=\Big(I_n-\dfrac{2}{||V||^2}V{}^tV\Big)^2=I_n-\dfrac{4}{||V||^2}V{}^tV+\dfrac{4}{||V||^4}V{}^tV\,V{}^tV$ car $H(V)$ est symétrique et qu'on peut utiliser le binôme de NEWTON car I_n et $V{}^tV$ commutent. Or $V{}^tV\,V{}^tV=V({}^tV\,V){}^tV=||V||^2V{}^tV$ car ${}^tV\,V\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ a pour seul coefficient $||V||^2$ et que si $U=(\lambda)\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $XU=\lambda X$.
Au final, on a bien ${}^tH(V)H(V)=I_n-\dfrac{4}{||V||^2}V{}^tV+\dfrac{4}{||V||^2}V{}^tV=I_n$. Par conséquent, $H(V)\in O_n(\mathbb{R})\cap S_n(\mathbb{R})$.

b. Comme $H(V)$ est une matrice orthogonale et symétrique, elle représente une symétrie orthogonale (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est bien orthonormée). Il suffit de constater que si $X\perp V$, alors $(V|X)={}^tVX=0$ donc $H(V)X=\Big(I_n-\dfrac{2}{||V||^2}V{}^tV\Big)X=X-\dfrac{2}{||V||^2}V{}^tVX=X$: les vecteurs $\mathrm{Vect}(V)^\perp$ sont invariants par $H(V)$.
De plus, $H(V)V=\Big(I_n-\dfrac{2}{||V||^2}V{}^tV\Big)V=V-\dfrac{2||V||^2}{||V||^2}V=-V$ (comme avant). On déduit de ces deux calculs que $H(V)$ est la matrice dans la base canonique de la réflexion d'hyperplan $H_V=\mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Si on se donne deux vecteurs X,Y de $\mathbb{R}^n$ tels que $||X||=||Y||$, montrer l'existence d'une matrice $H\in\mathcal{H}_n$ telle que $HX=Y$ revient à prouver l'existence d'une réflexion qui échange les vecteurs X et Y. Traitons deux cas :

- Si $X=Y$, la matrice $I_n\in\mathcal{H}_n$ convient car $I_nX=X=Y$.
- Si $X\neq Y$, posons $V=X-Y\neq 0$ et $H=H(V)$ la matrice de la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(V)^\perp$. En écrivant $X=\dfrac{X+Y}{2}+\dfrac{X-Y}{2}$ et en constatant que $\Big(\dfrac{X+Y}{2}\Big|\dfrac{X-Y}{2}\Big)=\dfrac{||X||^2-||Y||^2}{4}=0$, la matrice $H\in\mathcal{H}_n$ convient car $HX=H(V)X=H(V)\Big(\dfrac{X+Y}{2}\Big)+H(V)\Big(\dfrac{X-Y}{2}\Big)=\dfrac{X+Y}{2}-\dfrac{X-Y}{2}=Y$.

c. On va procéder par récurrence sur n.

• Si $n = 1$ et $A = (a) \in GL_1(\mathbb{R})$, en prenant $P = (\mathrm{sgn}(a))$ et $R = (|a|)$, on a bien $P \in O(1)$, R matrice triangulaire supérieure avec des termes diagonaux strictement positifs car $|a| > 0$ et $PA = R$.

• Soit $n \geqslant 1$ et supposons la propriété vraie au rang n. Soit alors $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$, notons $X = C_1$ la première colonne de A, alors $X \neq 0$ car A est inversible. Posons aussi $Y = ||X||E_1$ où ${}^tE_1 = (1\ 0 \cdots\ 0)$. D'après la question **b.**, il existe $H \in \mathcal{H}_{n+1}$ telle que $HX = Y$. On en déduit que $HA = B$ où la première colonne de B est Y. Notons B' la sous-matrice de B obtenue en en levant la première ligne et la première colonne. Comme $H \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, $\det(H) = \pm 1$ donc, puisque $HA = B$, on a $\det(A) = \pm\det(B) \neq 0$. De plus, par blocs, $\det(B) = ||Y||\det(B')$ donc $\det(B') \neq 0$. Comme B' est inversible, il existe par hypothèse de récurrence une matrice $P' \in O_n(\mathbb{R})$ produit de $r \leqslant n$ matrices $H'_1, \cdots, H'_r$ de $\mathcal{H}_n$ telle que $P'B' = R'$ avec R' matrice triangulaire supérieure avec des termes diagonaux strictement positifs (et donc $P' = H'_1 \cdots H'_r$). Si, pour $k \in [\![1; r]\!]$, $H'_k = H(V'_k)$ avec $V'_k \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ et qu'on définit la matrice $H_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H'_k \end{pmatrix}$, alors $H_k \in \mathcal{H}_{n+1}$ car $H_k = H(V_k) = I_{n+1} - \dfrac{2}{||V_k||^2} V_k {}^tV_k$ avec $V_k = \begin{pmatrix} 0 \\ V'_k \end{pmatrix} \neq 0$; ce qui prouve que $H_k \in \mathcal{H}_{n+1}$ (bien sûr $H_k = I_{n+1}$ si $H'_k = I_n$). En raisonnant par blocs, $H_1 \cdots H_r B = \begin{pmatrix} ||X|| & * \\ 0 & H'_1 \cdots H'_r B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||X|| & * \\ 0 & R' \end{pmatrix} = R$ qui est bien triangulaire supérieure avec des termes diagonaux strictement positifs. En posant $P = H_1 \cdots H_r H$, on a donc $PA = H_1 \cdots H_r HA = H_1 \cdots H_r B = R$ et l'hérédité est établie puisque P est le produit d'au plus $n+1$ matrices de $\mathcal{H}_{n+1}$.

• Par principe de récurrence, on a bien prouvé que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, toute $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ produit d'au plus n matrices de $\mathcal{H}_n$ telle que $PA = R$ avec R matrice triangulaire supérieure avec des termes diagonaux strictement positifs.

Cette décomposition des matrices inversibles s'appelle "décomposition QR" et vient de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt. En effet, soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ qu'on interprète comme la matrice de passage entre la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ et une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. On sait qu'on peut construire une base orthonormée $\mathcal{B}' = (w_1, \cdots, w_n)$, la seule à vérifier les conditions suivantes :

- $\forall k \in [\![1; n]\!],\ \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k) = \mathrm{Vect}(w_1, \cdots, w_k)$.
- $\forall k \in [\![1; n]\!],\ (v_k | w_k) > 0$.

Par transitivité des matrices de passages, $\mathrm{Pas}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \mathrm{Pas}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_0} \times \mathrm{Pas}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ or $\mathrm{Pas}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = A$ par définition, $P = \mathrm{Pas}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_0} \in O(n)$ car $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_0$ sont deux bases orthonormées dans $\mathbb{R}^n$ et $R = \mathrm{Pas}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (r_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive car puisque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée, on a $r_{i,j} = (w_i | v_j)$ donc $r_{i,j} = 0$ si $i > j$ car $v_j \in \mathrm{Vect}(w_1, \cdots, w_j)$ et $r_{k,k} = (w_k | v_k) > 0$ par construction.

On a donc bien $PA = R$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ (produit d'au plus n matrices de $\mathcal{H}_n$ en prime) avec R matrice triangulaire supérieure avec des termes diagonaux strictement positifs.

d. À faire.

12.79 **a.** La matrice A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, il existe $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots \lambda_n$. En décomposant $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ et $p = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i f_i$ (avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$), alors $(p|X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i$ et $f(x) = (Ax|x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$ car $f(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i f_i$ car $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale. Ainsi, $F_p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\beta_i \alpha_i - \lambda_i \alpha_i^2)$.

b. On écrit chaque terme $\beta_i \alpha_i - \lambda_i \alpha_i^2$ sous forme canonique $\beta_i \alpha_i - \lambda_i \alpha_i^2 = -\lambda_i \Big(\alpha_i - \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i}\Big)^2 + \dfrac{\beta_i^2}{4\lambda_i}$. Comme les λ_i sont strictement positifs, on a $F_p(X) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\beta_i^2}{4\lambda_i} = m$ mais $m = F_p(X_0)$ en posant $X_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i} f_i$ et $F_p(X) < m$ si $X \neq X_0$. Ainsi, F_p admet un maximum qui vaut m atteint seulement en X_0.

Questions de cours :

• Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$ (inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

• Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VADR deux à deux indépendantes et suivant toutes la même loi. Si X_1 (donc tous les X_k) admet un moment d'ordre 2 et si on note $m = \mathbb{E}(X_1)$ (espérance commune), $\sigma = \sigma(X_1)$ (écart-type commun) et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{1}{n} S_n - m\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.
Ceci implique : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{1}{n} S_n - m\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$ (loi faible des grands nombres).

12.80 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de A, alors il existe $X = {}^t(x_1 \ \cdots \ x_n) \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$, ce qui donne en conjuguant, comme A est réelle, $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$. En transposant, comme A est symétrique, ${}^t(\overline{X})A = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}$. En multipliant par X à droite, ${}^t(\overline{X})AX = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}||X||^2$ avec $||X||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0$. Mais on a aussi ${}^t(\overline{X})AX = {}^t(\overline{X})(\lambda X) = \lambda||X||^2$ donc $(\lambda - \overline{\lambda})||X||^2 = 0$ ce qui prouve que $\lambda = \overline{\lambda}$ donc que $\lambda \in \mathbb{R}$. Toutes les valeurs propres complexes de A sont donc réelles.

b. $\text{Tr}\,(A) = 1$ et, comme $A^2 = \begin{pmatrix} S & 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$ avec $S = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\text{Tr}\,(A^2) = 2S - 1$.

c. Les $n-1$ dernières colonnes de A sont proportionnelles entre elles et non nulles et non colinéaires à la première d'où rang$\,(A) = 2$. D'après la formule du rang, $n = \text{rang}\,(A) + \dim(\text{Ker}(A))$. On en déduit donc que $\dim(\text{Ker}(A)) = n - 2$. La multiplicité algébrique de 0 (dans χ_A) est égale à la dimension de $E_0(A)$ car A est diagonalisable, ainsi 0 est de multiplicité $n-2$ dans χ_A ce qui nous permet de factoriser le polynôme caractéristique $\chi_A = X^{n-2}(X - \alpha_n)(X - \beta_n)$ avec $(\alpha_n, \beta_n) \in (\mathbb{R}^*)^2$ d'après la question **a.**. Comme A est semblable à $\text{diag}(0, \cdots, 0, \alpha_n, \beta_n)$, on a $\text{Tr}\,(A) = \alpha_n + \beta_n = 1$. Or A^2 est semblable à $\text{diag}(0, \cdots, 0, \alpha_n^2, \beta_n^2)$ donc $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = \text{Tr}\,(A^2) = 2S - 1$. Ainsi, $2\alpha_n\beta_n = (\alpha_n + \beta_n)^2 - (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = 2 - 2S < 0$. Alors $(X - \alpha_n)(X - \beta_n) = X^2 - (\alpha_n + \beta_n)X + \alpha_n\beta_n = X^2 - X + 1 - S$. Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = 1 - 4(1 - S) = -3 + 4S$ donc, classiquement, on a (à l'ordre près), $\alpha_n = \dfrac{1 + \sqrt{4S - 3}}{2}$ et $\beta_n = \dfrac{1 - \sqrt{4S - 3}}{2}$.

Les vecteurs $(0, 3, -2, 0, \cdots, 0), (0, 4, 0, -2, \cdots, 0), \cdots, (0, n, -0, \cdots, 0, -2)$ forment une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Ker}(A)$ donc, comme il y en a $n-2$, cette famille est une base de vecteurs propres de $\mathrm{Ker}(A) = E_0(A)$.

Pour les sous-espaces propres associés à α_n et β_n, comme ces valeurs propres sont simples dans χ_A, on peut affirmer que ce sont des droites. On résout le système $AX = \lambda X$ (avec $\lambda \in \{\alpha_n, \beta_n\}$) qui donne, si ${}^tX = (x_1 \ \cdots \ x_n)$, $\forall k \in [\![2;n]\!]$, $x_k = \dfrac{kx_1}{\lambda}$ et, en reportant dans la première ligne, $0 = x_1\Big(\lambda^2 - \lambda - \sum\limits_{k=2}^{n} k^2\Big) = 0$ car justement $\lambda = \alpha_n$ ou $\lambda = \beta_n$ annule ce facteur. x_1 est donc quelconque et $\forall k \in [\![2;n]\!]$, $x_k = \dfrac{kx_1}{\lambda}$ donc, en prenant par exemple $x_1 = \alpha_n$ ou $x_1 = \beta_n$ pour avoir un vecteur directeur, on obtient les deux sous-espaces propres $E_{\alpha_n}(A) = \mathrm{Vect}\big((\alpha_n, 2, 3, \cdots, n)\big)$ et $E_{\beta_n}(A) = \mathrm{Vect}\big((\beta_n, 2, 3, \cdots, n)\big)$.

12.81 **a.** La matrice A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (comptées avec leur ordre de multiplicité) telles $A = PDP^T$. Comme $P^T = P^{-1}$, A est diagonalisable.

b. Avec les notations précédentes, comme $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, posons $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D = \Delta^2$ donc que $A = (P\Delta)(\Delta P^T) = M^TM$ en posant $M = (\Delta P^T)$ car Δ est symétrique car diagonale.

c. Comme $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ par hypothèse. L'application $\varphi : (X, Y) \mapsto X^TAY$ est bien définie si on identifie X^TAY à un réel. Sa bilinéarité vient de la distributivité du produit matriciel par rapport à la somme et de la linéarité de la transposition car, par exemple si $(X, X', Y) \in (\mathbb{R}^n)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\alpha X + X', Y) = (\alpha X + X')^TAY = (\alpha X^T + X'^T)AY = \alpha X^TAY + X'^TAY = \alpha\varphi(X, Y) + \varphi(X', Y)$. De plus, $\varphi(Y, X) = Y^TAX = (X^TAY)^T = \varphi(X, Y)$ car A est symétrique donc φ est aussi symétrique. Si $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$, en notant $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A (avec $AV_k = \lambda_kV_k$), on décompose $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_kV_k$ et on a $\varphi(X, X) = X^TAX = (X|AX) = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_iV_i \Big| \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_jx_jV_j\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_kx_k^2$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale. Comme $X \neq 0$, l'un des x_k est non nul donc l'un des $\lambda_kx_k^2$ est strictement positif. On en déduit que $\varphi(X, X) > 0$ donc que φ est définie positive. Au final, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Soit la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_1, \cdots, E_n)$, alors si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $a_{i,j} = E_i^TAE_j = \varphi(E_i, E_j)$. On peut donc construire par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt une base orthonormale $\mathcal{B} = (W_1, \cdots, W_n)$ pour le produit scalaire φ qui vérifie $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(E_1, \cdots, E_k) = \mathrm{Vect}(W_1, \cdots, W_n)$ et $\varphi(E_k, W_k) > 0$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$ est donc de la forme $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux strictement positifs. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour φ, on a $B = (\varphi(E_j, W_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Ainsi, B^TB est la matrice de Gram telle que $B^TB = (\varphi(E_i, E_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = A$.

Question de cours :

• déjà fait en **a.** pour la version matricielle. Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien, alors χ_u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, u est diagonalisable et il existe une base orthonormale de vecteurs propres de E.

• Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $X \in \mathrm{Ker}(M)$, alors $MX = 0$ donc $M^TMX = M^T0 = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}(M^TM)$. Réciproquement, si $X \in \mathrm{Ker}({}^TM)$, alors $M^TMX = 0$ donc $X^TM^TMX = X^T0 = 0$ donc $||MX||^2 = 0$ ce qui montre que $MX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}(M)$. Par double inclusion, on a montré que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^TM)$.

12.82 **a.** ($\Longrightarrow$) si f est antisymétrique et $x \in E$, en prenant $y = x$, on a $< x, f(x) >=< f(x), x >= - < x, f(x) >$ par symétrie du produit scalaire donc $2 < f(x), x >= 0$ puis $< f(x), x >= 0$.

($\Longleftarrow$) si $\forall x \in E,\ < x, f(x) >= 0$ et $(x, y) \in E^2$, alors $< x + y, f(x + y) >= 0$, donc, par bilinéarité du produit scalaire, $0 =< x, f(x) > + < y, f(x) > + < x, f(y) > + < y, f(y) >=< y, f(x) > + < x, f(y) >$ dont on déduit que $< y, f(x) > + < x, f(y) > + < y, f(y) >= 0$ et f est bien antisymétrique.

b. Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}\,(f)$, alors $\exists z \in E,\ y = f(z)$ et $< x, y >=< x, f(z) >= - < f(x), z >= - < 0_E, z >= 0$ et on a bien comme attendu $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}\,(f)$.

c. Pour $(x, y) \in E^2$, $< s(x), y >=< f(f(x)), y >= - < f(x), f(y) >= -(- < x, f(f(y)) >) =< x, s(y) >$ donc, par définition, s est un endomorphisme symétrique. On sait d'après le théorème spectral que χ_s est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(s)$, il existe $x \neq 0_E$ tel que $s(x) = \lambda x$. Or $< s(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda||x||^2$ mais aussi $< s(x), x >=< f(f(x)), x >= - < f(x), f(x) >= -||f(x)||^2$ donc, comme $||x||^2 > 0$, $\lambda \leqslant 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(s) \subset \mathbb{R}_-$.

Comme $s = f \circ f$, il est clair que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(s)$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(s)$, alors $s(x) = 0_E$ donc $0 =< s(x), x >=< f(f(x)), x >= - < f(x), f(x) >= -||f(x)||^2$ ce qui montre que $||f(x)|| = 0$ donc que $f(x) = 0_E$. On a bien établi que $\mathrm{Ker}(s) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par double inclusion, on a bien $\mathrm{Ker}(s) = \mathrm{Ker}(f)$.

d. Si de plus $n = 3$, montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

• On calcule facilement $\chi_M = X(X^2 + \alpha^2)$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0, i\alpha, -i\alpha\}$. Pour une matrice antisymétrique $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ de taille quelconque, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre complexe de M, alors il existe $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$ donc $M\overline{X} = \overline{\lambda X}$ en conjuguant et ${}^t\overline{X}MX = \lambda{}^t\overline{X}X = \lambda||X||^2$ d'une part et ${}^t\overline{X}MX = {}^t({}^tM\overline{X})X = -{}^t(M\overline{X})X = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}||X||^2$ d'autre part donc $(\lambda + \overline{\lambda})||X||^2 = 0$ ce qui donne, puisque $||X|| > 0$, $\lambda + \overline{\lambda} = 0$ et λ est un imaginaire pur. Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset i\,\mathbb{R}$.

• Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\exp(M) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{M^n}{n!}$.

12.83 Un tel endomorphisme (unique) v s'appelle l'adjoint de u (et vice-versa).

a. Soit $(x, y) \in \mathrm{Im}\,(u) \times \mathrm{Im}\,(v)$, alors il existe $z \in E$ tel que $y = v(z)$ et, comme $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(x) = 0_E$. Ainsi, $(x|y) = (x|v(z)) = (u(x)|z) = (0_E|z) = 0$. On a déjà établi que $\mathrm{Im}\,(u) \perp \mathrm{Im}\,(v)$.

Si on choisit une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et qu'on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $b_{i,j} = (v(e_j)|e_i) = (e_i|v(e_j)) = (u(e_i)|e_j) = a_{j,i}$ donc $B = {}^tA$ ce qui montre que $\mathrm{rang}\,(v) = \mathrm{rang}\,(B) = \mathrm{rang}\,({}^tA) = \mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(u)$.

Comme $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}(u)$, la formule du rang appliquée à u montre que $\dim(E) = n = 2\,\mathrm{rang}\,(u)$ donc il vient $2\,\mathrm{rang}\,(v) = n$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}\,(u)) + \dim(\mathrm{Im}\,(v)) = \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v) = n$ ce qui, couplé à l'information $\mathrm{Im}\,(u) \perp \mathrm{Im}\,(v)$ (donc $\mathrm{Im}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,(v)$ en somme directe), justifie bien que $E = \mathrm{Im}\,(u) \oplus^\perp \mathrm{Im}\,(v)$.

b. Comme $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}(u)$, on a $u^2 = 0$ donc, si $(x, y) \in E^2$, $0 = (0_E|y) = (u^2(x)|y) = (u(x)|v(y)) = (x|v^2(y))$ donc le vecteur $v^2(y)$ est orthogonal à tout vecteur x de E, ce qui s'écrit $v^2(y) \in E^\perp = \{0_E\}$ donc $v^2(y) = 0_E$ (on pouvait aussi dire que $B^2 = {}^t(A^2) = 0$). Ainsi, $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et on en déduit que $\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Ker}(v)$ avec l'égalité des dimensions puisque $\dim(\mathrm{Ker}(v)) = n - \mathrm{rang}\,(v) = \mathrm{rang}\,(v)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u + v)$, alors $u(x) + v(x) = 0_E$. On applique u et, comme $u^2 = 0_E$, on a $u \circ v(x) = 0_E$. De même, comme $v^2 = 0_E$, en appliquant v à la même relation, on a $v \circ u(x) = 0_E$. Ainsi, $(u(v(x))|x) = 0 = ||v(x)||^2$ et $(x|v(u(x))) = 0 = ||u(x)||^2$. On en déduit que $u(x) = v(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$. Or $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}\,(u)$, $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}\,(v)$ et $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0_E\}$, ainsi $x = 0_E$ donc $u + v$ est injective. Et comme u est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, $u + v$ est un automorphisme de E.

12.84 **a.** Supposons U et V non inversibles, alors $\det(U) = \det(V) = 0$ et l'inégalité se résume à $\det(U + V) \geqslant 0$. Or $U + V$ est symétrique donc, par le théorème spectral, $U + V = PDP^T$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale. Or les valeurs propres de $U + V$ sont positives car, si $(U + V)X = \lambda X$ avec $X \neq 0$ donc $||X||^2 > 0$, alors il vient $((U+V)X|X) = \lambda||X||^2 = (UX|X) + (VX|X) \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$. Ainsi, la diagonale de D est composée uniquement de termes positifs donc $\det(U + V) = \det(D) \geqslant 0$ et on a l'inégalité attendue.

b. • Si $U = I_n$, comme V est matrice symétrique positive, par le théorème spectral, il existe à nouveau $Q \in O(n)$ et $D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ avec $\mu_1, \cdots, \mu_n$ positifs telles que $V = QD'Q^T$. Ainsi, on peut écrire $\det(I_n + V) = \det(QQ^T + QD'Q^T) = \det(Q(I_n + D')Q^T) = \det(Q)\det(I_n + D')\det(Q^T) = \det(I_n + D')$ donc, comme $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\mu_k) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mu_i\mu_j + \cdots + \prod\limits_{k=1}^{n}\mu_k \geqslant 1 + \prod\limits_{k=1}^{n}\mu_k$, on parvient à l'inégalité souhaitée, c'est-à-dire $\det(I_n + V) = \prod\limits_{k=1}^{n}(1 + \mu_k) \leqslant 1 + \prod\limits_{k=1}^{n}\mu_k = 1 + \det(V) = \det(I_n) + \det(V)$.

• Supposons seulement U inversible. En notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres strictement positives (comme avant et puisque 0 ne peut pas faire partie des valeurs propres d'une matrice inversible) de U (éventuellement répétées), $U = PDP^T$ avec P orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ et $S = P\Delta P^T$, il vient $S = S^T$ donc S est symétrique et inversible car $\det(S) = \prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\lambda_k} > 0$ et, comme $P^TP = I_n$, on a $U = SS^T = S^2$. Alors $U + V = S^2 + SS^{-1}VS^{-1}S = S(I_n + W)S$ avec $W = S^{-1}VS^{-1}$. La matrice W est aussi symétrique car $W^T = (S^{-1})^TV^T(S^{-1})^T = (S^T)^{-1}V(S^T)^{-1} = S^{-1}VS^{-1} = W$ et elle vérifie $(WX|X) = X^TS^{-1}VS^{-1}X = Y^TVY \geqslant 0$ en posant $Y = S^{-1}X$. D'après le cas $U = I_n$ traité avant, on en déduit que $\det(I_n + W) \geqslant 1 + \det(W)$. Comme $\det(U + V) = \det(S(I_n + W)S) = \det(S)^2\det(I_n + W)$ et $\det(U) + \det(V) = \det(S^2) + \det(SWS) = \det(S)^2(1 + \det(W))$, on a bien $\det(U + V) \geqslant \det(U) + \det(V)$.

• Si U est non inversible et V inversible, on échange les rôles et (I) est encore vérifiée.

Dans tous les cas, on a établi l'inégalité (I) : $\det(U+V) \geqslant \det(U) + \det(V)$ si U et V symétriques positives.

c. D'après la disjonction de cas précédente, (I) devient une égalité :

- si $n = 1$ car $U(u)$ et $V = (v)$ avec $u, v \geqslant 0$ et $\det(U + V) = u + v = \det(U) + \det(V)$.
- si U, V, $U + V$ sont toutes trois non inversibles car alors $\det(U + V) = 0 = 0 + 0 = \det(U) + \det(V)$.
- si U est inversible et $n \geqslant 2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mu_i\mu_j + \cdots = 0 \Longleftrightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$ car ces valeurs sont toutes positives, et dans ce cas $W = 0$ donc $V = SWS = 0$.
- si V est inversible et $n \geqslant 2$ et $U = 0$ par symétrie entre U et V.

Au final, il y a égalité dans (I) si $n = 1$, si l'une des matrices U et V est nulle ou si les trois matrices U, V, $U + V$ sont toutes non inversibles (par exemple si $U = E_{1,1}$ et $V = E_{2,2}$) quand $n \geqslant 3$).

12.85 **a.** Les colonnes C_j de la matrice M forment une base orthonormale $\mathcal{B} = (C_1, \cdots, C_n)$ de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique car M est orthogonale ce qui se traduit, puisque $C_j = {}^t(a_{1,j} \ \cdots \ a_{n,j})$ d'après l'énoncé, par les relations suivantes : $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ et $\forall (j,j') \in [\![1;n]\!]^2$, $j \neq j' \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j'} = 0$.

• Ainsi, $|a_{i,j}|^2 \leqslant 1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j}^2 = a_{i,j}^2 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{k,j}^2$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ d'où $a_{i,j}^2 \leqslant 1$ et on a donc $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \geqslant n = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2$ car $|a_{i,j}| \geqslant |a_{i,j}|^2$ puisque $|a_{i,j}| \in [0;1]$.

• D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ appliquée aux n^2-uplets $\big(|a_{i,j}|\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\big(1\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ euclidien canonique, on obtient $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1^2} = n\sqrt{n}$.

• En posant $u = C_1 + \cdots + C_n = \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}, \cdots, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j}\Big)$ et $v = (1, \cdots, 1)$, on trouve $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = (u|v)$. D'après CAUCHY-SCHWARZ mais cette fois-ci dans $\mathbb{R}^n$, $\Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\Big| = |(u|v)| \leqslant ||u||\,||v|| = \sqrt{n}\sqrt{n} = n$ car $||u||^2 = ||C_1 + \cdots + C_n||^2 = ||C_1||^2 + \cdots + ||C_n||^2 = n$ par PYTHAGORE.

b. Dans l'inégalité $\Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\Big| \leqslant n$ ci-dessus, on a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires d'après CAUCHY-SCHWARZ, et comme ils sont de même norme $\sqrt{n}$, il y a égalité si et seulement si $u = (1, \cdots, 1)$ ou $u = (-1, \cdots, -1)$. Or $u = C_1 + \cdots + C_n = Av$, ce qui se traduit donc par $Av = v$ ou $Av = -v$. Mais les seules valeurs propres réelles possibles de A sont ± 1 car A représente une isométrie, ainsi, on en déduit l'équivalence $\Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\Big| = n \Longleftrightarrow U$ est vecteur propre de A. Ceci se produit si, par exemple, $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ou A est une matrice de permutation comme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. On a égalité dans l'inégalité $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = n$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$ car on a sommé les inégalités $|a_{i,j}| \geqslant |a_{i,j}|^2$ qui ne sont des égalités que si $a_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$. Mais comme les colonnes (et les lignes) sont normées, il ne peut y avoir qu'un seul ± 1 par ligne et par colonne. Les matrices réalisant l'égalité sont dites de permutation avec n fois ± 1 et des 0 ailleurs : il y en a $2^n n!$.

d. On a égalité dans $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$ si et seulement si $\big(|a_{i,j}|\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est colinéaire à $\big(1\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ d'après CAUCHY-SCHWARZ donc si tous les coefficients de la matrice sont égaux en valeur absolue. Les colonnes sont normées, cette valeur commune des $|a_{i,j}|$ est donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$: ce sont (à un facteur près) des matrices de HADAMARD comme par exemple $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ qui représente la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le plan ou $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La taille n d'une matrice de HADAMARD est soit égale à 1, 2 ou un multiple de 4 et c'est encore une conjecture aujourd'hui qu'il en existe pour tous les entiers n multiples de 4.

12.86 **a.** Les $n-1$ dernières colonnes de A_n sont proportionnelles entre elles et non nulles et non colinéaires à la première d'où rang $(A_n) = 2$. D'après la formule du rang, $n = \text{rang}\,(A_n) + \dim(\text{Ker}(A_n))$. On en déduit donc que $\dim(\text{Ker}(A_n)) = n-2$.

b. La matrice A_n est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral.

c. La multiplicité algébrique de 0 (dans χ_{A_n}) est égale à la dimension de $E_0(A_n)$ car A_n est diagonalisable, ainsi 0 est de multiplicité $n-2$ dans χ_{A_n} ce qui nous permet de factoriser le polynôme caractéristique $\chi_{A_n} = X^{n-2}(X^2 + a_nX + b_n) = X^n + a_nX^{n-1} + b_nX^{n-2}$ avec 0 qui n'est pas racine de $X^2 + a_nX + b_n$.

d. D'après le théorème spectral, χ_{A_n} est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc les deux dernières valeurs propres sont les racines (réelles) de $X^2 + a_nX + b_n$: notons-les α_n et β_n. Comme A_n est semblable à $\text{diag}(0, \cdots, 0, \alpha_n, \beta_n)$, on a $\text{Tr}\,(A_n) = \alpha_n + \beta_n = 1$. Or A_n^2 est semblable à $\text{diag}(0, \cdots, 0, \alpha_n^2, \beta_n^2)$ donc $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = \text{Tr}\,(A_n^2)$. Or on calcule $A_n^2 = \begin{pmatrix} S & 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$ avec $S = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 2S - 1$. Ainsi, $2\alpha_n\beta_n = (\alpha_n + \beta_n)^2 - (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = 2 - 2S < 0$. α_n et β_n sont donc de signes opposés et leur somme vaut 1, en notant $\lambda_n = \text{Max}(\alpha_n, \beta_n)$, les deux dernières valeurs propres de A_n sont donc $\lambda_n > 1$ et $1 - \lambda_n < 0$.
On pouvait prendre $\lambda \neq 0$, et poser le système $AX = \lambda X$ qui donne, si ${}^tX = (x_1 \ \cdots \ x_n)$, $\forall k \in [\![2; n]\!]$, $x_k = \dfrac{kx_1}{\lambda}$ et, en reportant dans la première ligne, $x_1\Big(\lambda^2 - \lambda - \sum\limits_{k=2}^{n} k^2\Big) = 0$ avec les mêmes conclusions.

e. Comme $0, \lambda_n, 1 - \lambda_n$ sont les trois valeurs propres distinctes de A_n qui est diagonalisable, on sait d'après le cours que $P = X(X - \lambda_n)(X - 1 + \lambda_n)$ est annulateur de A_n. Or $P = X^3 - X^2 + \lambda_n(1 - \lambda_n)X$ donc, comme $\lambda_n(1 - \lambda_n) = \alpha_n\beta_n = 1 - S = \dfrac{6 - n(n+1)(2n+1)}{6} = -\dfrac{(n-1)(2n^2 + 5n + 6)}{6}$, le polynôme de degré 3 donné par $P = X\Big(X^2 - X - \dfrac{(n-1)(2n^2 + 5n + 6)}{6}\Big)$ est annulateur de A_n.

12.87 **a.** Avec ces hypothèses, $A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (A^2)^2 = A^4$. Ainsi, $X^4 - X$ est annulateur de A.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kX^k$ un polynôme annulateur de M. Il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^kX = \lambda^kP$. Ainsi, on peut calculer $0 = P(M)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kM^kX = \sum\limits_{k=0}^{d} b_k\lambda^kX = P(\lambda)X = 0$. Comme $X \neq 0$, on a forcément $P(\lambda) = 0$.

c. D'après **a.** et **b.**, comme $X^4 - X = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$, on a $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1, j, j^2\}$. Mais A est inversible donc $0 \notin \text{Sp}(A)$. Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \{1, j, j^2\} = \mathbb{U}_3$. Si 1 était valeur propre de A, comme $\text{Tr}\,(A) \in \mathbb{R}$ est la somme des valeurs propres complexes de A, la seconde racine de χ_A serait aussi réelle et ne pourrait valoir que 1. Or $P = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et elle serait donc semblable à la matrice $I_2 = \text{diag}(1, 1)$, elle vaudrait donc I_2 ce qui est contraire à l'énoncé. Ainsi, 1 n'est pas valeur propre de A. D'après la question de cours, j et j^2 sont forcément valeurs propres de A (l'une amène l'autre puisque ces deux complexes sont conjugués). Par conséquent, $\text{Sp}(A) = \{j, j^2\}$ et A est semblable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) à $\text{diag}(j, j^2)$. Comme $j^3 = (j^2)^3 = 1$, on en déduit que $A^3 = I_2$ donc que

${}^tAA = A^2A = A^3 = I_2$: A est donc orthogonale. De plus, $\det(A) = j \times j^2 = j^3 = 1$.

d. Comme A est orthogonale, de déterminant 1 et vérifie $A^3 = I_2$ d'après ce qui précède, on a $A = R_\theta$ avec $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ Mais on ne peut pas avoir $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ car $A \neq I_2$. Les matrices qui vérifient les conditions sont $A_1 = R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A_2 = R_{-2\pi/3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Question de cours : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. En conjuguant cette relation, comme $\overline{\lambda X} = \overline{\lambda}\overline{X}$ et $\overline{AX} = \overline{A}\overline{X}$ et que $\overline{A} = A$ car A est réelle, on a $A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$, on en déduit que $\overline{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ car $\overline{X} \neq 0$.

12.88 **a.** D'abord $({}^tMM)^3 = ({}^tM)^3M^3$ car ${}^tM$ et M commutent (on dit que la matrice M est normale). Comme $({}^tM)^3 = {}^t(M^3) = {}^tI_n = I_n$, on a donc $({}^tMM)^3 = I_3$. Or ${}^tMM$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de ${}^tMM$ d'après le calcul précédent, ses valeurs propres ne peuvent être que $1, j, j^2$. Mais comme ${}^tMM$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, seul 1 peut être valeur propre de ${}^tMM$ donc ${}^tMM$ est orthosemblable à la matrice diagonale n'ayant que des 1 sur le diagonale (euh... I_n quoi !) donc ${}^tMM = I_n$ et $M \in O(n)$ par définition.

b. Comme $M^3 = I_2$, on a $\det(M^3) = (\det(M))^3 = 1$ donc $\det(M) = 1$ puisque $\det(M) \in \mathbb{R}$. Ainsi, $M \in SO(2)$ et, d'après le cours, M est de la forme $M = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Mais comme $M^3 = (R_\theta)^3 = R_{3\theta} = I_2$, on a $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ donc, puisque $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ car $M \neq I_2$, on en déduit que $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Ainsi, les deux seules matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant ces conditions sont $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

12.89 Méthode 1 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O(n)$. Comme $A^TA = I_n$, on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \delta_{i,j}$. Si on prend $i = j$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1$ ce qui montre que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{i,j}^2 \leqslant 1$ d'où $|a_{i,j}| \leqslant 1$.

Ainsi, si $A \in O(n)$ vérifie $\text{Tr}\,(A) = n$, alors $n = \text{Tr}\,(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$ ce qui s'écrit aussi $\text{Tr}\,(A) - n = \sum\limits_{k=1}^{n} (1 - a_{k,k}) = 0$. Mais la somme de tous les réels positifs $1 - a_{k,k}$ est nulle, ces réels sont donc tous nuls : $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $a_{k,k} = 1$. Ensuite, pour $i \in [\![1;n]\!]$, on a $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1 = a_{i,i}^2 + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ donc $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i,j}^2 = 0$. Ceci implique encore, puisqu'une somme nulle de termes positifs implique qu'ils sont tous nuls, que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$. Ainsi, $A = I_n$.

Comme réciproquement $A = I_n$ convient, la seule matrice $A \in O(n)$ telle que $\text{Tr}\,(A) = n$ est la matrice I_n.

Méthode 2 : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Alors, comme A est réelle, $||X||^2 = \overline{X}^TX = \overline{X}^TI_nX = \overline{X}^TA^TAX = \overline{AX}^TAX = ||AX||^2 = ||\lambda X||^2 = |\lambda|^2\,||X||^2$. Comme $||X|| \neq 0$ car $X \neq 0$, on obtient $|\lambda|^2 = 1$ donc $\lambda \in \mathbb{U}$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $\text{Tr}\,(A)$ est la somme des n valeurs propres complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de A comptées avec leur ordre de multiplicité. Si $\mathrm{Tr}\ (A) = n$, par inégalité triangulaire, $n = |\mathrm{Tr}\ (A)| \leqslant |\lambda_1|+\cdots+|\lambda_n| = 1+\cdots+1 = n$. Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire ce qui prouve que les valeurs propres λ_i sont positivement liées (dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$) : elles sont donc toutes égales puisque toutes de module 1. Mais comme $\mathrm{Tr}\ (A) = n\lambda_1 = n$, cela montre que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ donc $\chi_A = (X-1)^n$. Supposons que la dimension r du sous-espace propre $F = E_1(A)$ soit strictement inférieure à n, alors on sait que $F^\perp$ est aussi (comme F) stable par u (isométrie canoniquement associée à A). Ainsi, A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec B qui est aussi orthogonale (car $A^TA = I_n$). Par blocs, on trouve que $(X-1)^n = \chi_A = (X-1)^r\chi_B$ ce qui prouve que $\chi_B = (X-1)^{n-r}$. Alors, 1 serait valeur propre de B ce qui est impossible car B est la matrice de $u_{F^\perp}$ dans une base orthonormée de $F^\perp$ et que, par définition, les vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1 sont dans F. On conclut ce raisonnement par l'absurde : $r = n$. Ainsi, $E_1(u) = \mathbb{R}^n$ donc $A = I_n$.

12.90 **a.** On sait déjà que $\mathrm{Im}\,(a^2) \subset \mathrm{Im}\,(a)$, comme par hypothèse on a aussi $\mathrm{rang}\,(a) = \mathrm{rang}\,(a^2)$, par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(a) = \mathrm{Im}\,(a^2)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors $a(x) \in \mathrm{Im}\,(a)$ donc $a(x) \in \mathrm{Im}\,(a^2)$ ce qui prouve l'existence de $y \in E$ tel que $a(x) = a^2(y)$. Ainsi, $a(x - a(y)) = 0_E$ donc $x = a(y) + (x - a(y)) \in \mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Ker}(a)$. On vient d'établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Ker}(a)$. Or la formule du rang donne $n = \dim(\mathrm{Ker}(a)) + \mathrm{rang}\,(a)$ dont on déduit que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$. Soit une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ adaptée à la décomposition précédente, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\,(a) = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_r)$. et $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Vect}(v_{r+1}, \cdots, v_n)$. Comme $\mathrm{Im}\,(a)$ et $\mathrm{Ker}(a)$ sont stables par a, il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or $\mathrm{Im}\,(a)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(a)$ et le théorème du rang nous apprend que l'application induit par a dans $\mathrm{Im}\,(a)$ est donc un automorphisme de $\mathrm{Im}\,(a)$, dont la matrice C dans la base $(v_1, \cdots, v_r)$ de $\mathrm{Im}\,(a)$ est donc inversible. En notant P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la base $\mathcal{B}$, par la formule de changement de base, on a donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $C \in GL_r(\mathbb{C})$ telles que $A = P\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.

b. ($\Longleftarrow$) si $\mathrm{rang}\,(a) = \mathrm{rang}\,(a^2)$, avec les notations précédentes, posons $B = P\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. On vérifie par blocs que $AB = BA = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, $A = ABA$ et $B = BAB$ donc B est un pseudo-inverse de A.

($\Longrightarrow$) si A admet un pseudo-inverse B, alors en notant b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B, on a $A = ABA = A^2B$ car $AB = BA$ ainsi $a = a^2 \circ b$. Si $x \in \mathrm{Im}\,(a)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a(y) = a^2(b(y))$ donc $x \in \mathrm{Im}\,(a^2)$. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(a) \subset \mathrm{Im}\,(a^2)$ et, comme on a toujours $\mathrm{Im}\,(a^2) \subset \mathrm{Im}\,(a)$, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(a) = \mathrm{Im}\,(a^2)$ donc $\mathrm{rang}\,(a) = \mathrm{rang}\,(a^2)$.

Par double implication, A admet un pseudo-inverse si et seulement si $\mathrm{rang}\,(a) = \mathrm{rang}\,(a^2)$.

c. Par hypothèse, $(AB)^2 = (ABA)B = AB$ donc $(a \circ b)^2 = a \circ b$ ce qui prouve déjà que $a \circ b$ est un projecteur. Si $x \in \mathrm{Ker}(a \circ b)$, alors $ABX = 0$ donc $BAX = 0$ puis $ABAX = 0$ donc $AX = 0$ d'où $x \in \mathrm{Ker}(a)$. De plus, si $x \in \mathrm{Im}\,(a \circ b)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a \circ b(y) = a(b(y)) \in \mathrm{Im}\,(a)$. On vient de prouver que $\mathrm{Ker}(a \circ b) \subset \mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}\,(a \circ b) \subset \mathrm{Im}\,(a)$. Avec la formule du rang appliquée à $a \circ b$ et a, $\dim(\mathrm{Ker}(a \circ b)) + \mathrm{rang}\,(a \circ b) = \dim(\mathrm{Ker}(a)) + \mathrm{rang}\,(a) = n$ alors que les inclusions précédentes montrent que $\dim(\mathrm{Ker}(a \circ b)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(a))$ et $\dim(\mathrm{Im}\,(a \circ b)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,(a))$. Par conséquent, ces inégalités ne peuvent être que des égalités et, par inclusion et égalité des dimensions, $\mathrm{Im}\,(a \circ b) = \mathrm{Im}\,(a)$ et $\mathrm{Ker}(a \circ b) = \mathrm{Ker}(a)$. Ainsi, $a \circ b$ est la projection sur $\mathrm{Im}\,(a)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(a)$.

d. Par hypothèse, A admet un pseudo-inverse donc $\mathrm{rang}\,(a) = \mathrm{rang}\,(a^2)$ d'après **b.** et $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$ d'après **a.** et il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ adaptée à cette décomposition. On sait que $A = P\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$ et $C \in GL_r(\mathbb{R})$ la matrice de l'application induite par a dans $\mathrm{Im}\,(a)$. Posons $A' = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit B un pseudo-inverse de A et $B' = P^{-1}BP$ de sorte que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$ par changement de base. Les conditions $AB = BA$, $A = ABA$ et $B = BAB$ deviennent $A'B' = B'A'$, $A' = A'B'A'$ et $B' = B'A'B'$ en simplifiant par P et P^{-1}. Comme a et b commutent, $\mathrm{Im}\,(a)$ et $\mathrm{Ker}(a)$ sont stables par b donc on a, par blocs de même taille que pour A', $B' = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$. Or $B' = B'A'B'$ impose $V = 0$ et $A' = A'B'A'$ impose $C = CUC$ donc $UC = I_r$ car C est inversible. Ainsi, seule la matrice B (vu en **b.**) définie par $B = P\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ est pseudo-inverse de A.

e. D'après CAYLEY-HAMILTON, $\chi_C(C) = 0$. Écrivons $\chi_C = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ avec $a_0 = \chi_C(0) = (-1)^r \det(C) \neq 0$ car C inversible et $a_r = 1$. Posons $Q = \Big(1 - \dfrac{a_1}{a_0}\Big)\chi_C$ de sorte que, par un petit calcul, le terme en X de Q est nul donc $Q(C) = 0$ avec $Q = a_0 - b_2X^2 - \cdots - b_{r+1}X^{r+1}$. En multipliant $Q(C) = 0$ par $\dfrac{C^{-1}}{a_0}$, on a $C^{-1} = \sum_{k=2}^{r+1} \dfrac{b_k}{a_0} C^{k-1}$. Si on reporte dans l'écriture par blocs $B = P\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, on a donc $B = \sum_{k=2}^{r+1} \dfrac{b_k}{a_0} A^{k-1}$ car $A^k = P\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ pour $k \geqslant 1$ donc B est un polynôme en A.
Avec χ_C directement, on aurait eu C^{-1} en fonction de I_r ce qui aurait donné B en fonction des puissances de A mais aussi de $AB = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ et on n'aurait pas pu conclure.

f. Soit $x \in E$, alors $||a(x) - y||^2 = ||a(x - v + v) - y||^2 = ||a(x - v) + a \circ b(y) - y||^2$. Or $a(x - v) \in \mathrm{Im}\,(a)$ et $a(a \circ b(y) - y) = a(b \circ a(y) - y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $ABA = A$ donc $a \circ b(y) - y \in \mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Im}\,(a)^{\perp}$ par hypothèse. Par la relation de PYTHAGORE, $||a(x) - y||^2 = ||a(x - v)||^2 + ||a(v) - y||^2 \geqslant ||a(v) - y||^2$ ce qui prouve que $f : x \mapsto ||a(x) - y||$ est minimale en v.
De plus, si $w \neq v \in \mathbb{R}^n$ vérifie $f(w) = f(v)$, d'après le calcul précédent, $||a(w-v)||^2 = 0$ donc $w - v \in \mathrm{Ker}(a)$. Or $a = b \circ a^2$ et $b = a \circ b^2$ donc $\mathrm{Im}\,(a) \subset \mathrm{Im}\,(b)$ et $\mathrm{Im}\,(b) \subset \mathrm{Im}\,(a)$ d'où $\mathrm{Im}\,(a) = \mathrm{Im}\,(b)$. Ainsi, il vient $v = b(y) \in \mathrm{Im}\,(a) = \mathrm{Ker}(a)^{\perp}$ donc, toujours d'après PYTHAGORE, on peut conclure que $||w|| > ||v||$ car $||w||^2 = ||w - v + v||^2 = ||w - v||^2 + ||v||^2 > ||v||^2$ car $||w - v|| > 0$.

12.91 **a.** Comme A est symétrique réelle, par le théorème spectral matriciel, il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ (contenant les valeur propres de A) et une matrice orthogonale U telles que $A = UDU^T$. Comme $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$, posons $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1} \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ et $R = P\Delta P^T$ de sorte que R est bien inversible par produit et, comme $R^T = R$, on a $R^TR = R^2 = P\Delta P^T P\Delta P^T = P\Delta^2 P^T = PDP^T = A$.

b. <u>Analyse</u> : supposons que de telles matrices P et D existent, alors $P^TP = R^TR$ d'après la question **b.** donc $(R^T)^{-1}P^TPR^{-1} = (PR^{-1})^T(PR^{-1}) = I_n$ ce qui montre que $Q = PR^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Comme $P = QR$, on a

$B = P^TDP = R^TQ^TDQR$ d'où $Q^TDQ = (R^T)^{-1}BR^{-1}$.

<u>Synthèse</u> : Soit $S = (R^T)^{-1}BR^{-1}$, comme B est symétrique, $S^T = (R^T)^{-1}B^TR^{-1} = S$ donc S est symétrique réelle ce qui montre, par le théorème spectral version matricielle, qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D (dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de S) telles que $S = Q^TDQ$. Posons $P = QR$, alors P est inversible car Q et R le sont et, comme $R = Q^{-1}P = Q^TP$, on a $A = R^TR = P^TQQ^TP = P^TP$ car Q est orthogonale. Comme $S = Q^TDQ = (R^T)^{-1}BR^{-1}$, on a $B = R^TQ^TDQR$ donc $B = P^TDP$ car $P = QR$. Il existe donc bien $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = P^TP$ et $B = P^TDP$.

c. Puisque $S = Q^TDQ$, si on pose $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots \mu_n)$, les μ_k sont les valeurs propres de la matrice symétrique S. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^TSX = X^T(R^T)^{-1}BR^{-1}X = Y^TBY$ en posant $Y = R^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme B est symétrique positive, on a $Y^TBY \geqslant 0$ donc $X^TSX \geqslant 0$ ce qui montre, d'après le cours, que S est symétrique positive. Par conséquent, les μ_k sont tous positifs.

Comme $\det(A+B) = \det(P^TP + P^TDP) = \det(P^T)\det(I_n + D)\det(P)$ par multiplicativité du déterminant, on a $\det(A+B) = \det(P)^2\det(I_n + D)$. De même, $\det(A) = \det(P)^2$ et $\det(B) = \det(P)^2\det(D)$ donc l'inégalité à établir se ramène à $\det(I_n + D) \geqslant 1 + \det(D)$ car $\det(P)^2 > 0$. En développant ces déterminants diagonaux, $\det(D) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mu_k$ et $\det(I_n + D) = \prod\limits_{k=1}^{n}(1+\mu_k) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\mu_i\mu_j + \cdots + \prod\limits_{k=1}^{n}\mu_k$. Comme tous les termes intermédiaires sont positifs, on a bien $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\mu_k) \geqslant 1 + \prod\limits_{k=1}^{n}\mu_k$ donc $\det(I_n + D) \geqslant 1 + \det(D)$, ce qui permet de conclure à l'inégalité attendue, $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

12.92 **a.** Soit $(x, y) \in E^2$ et X, Y les vecteurs colonnes associés des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}_0$. Comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale, on a $\big(p(x)|y\big) = (AX)^TY = X^TA^TY = X^T(A^TY) = \big(x|q(y)\big)$.

b. Par définition, $\mathrm{Tr}\,(q \circ p)$ est la trace de la matrice de $q \circ p$ dans n'importe quelle base, choisissons la base $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q \circ p) = \big((v_i|q \circ p(v_j))\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ce qui montre que $\mathrm{Tr}\,(q \circ p) = \mathrm{Tr}\,(B) = \sum\limits_{k=1}^{n}(v_k|q \circ p(v_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n}||p(v_k)||^2$ avec la question **a.** avec $x = v_k$ et $y = p(v_k)$.

c. Si p est un projecteur orthogonal, $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E donc il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ de E telle que $(v_1, \cdots, v_r)$ (resp. $(v_{r+1}, \cdots, v_n)$) soit une base orthonormée de $\mathrm{Im}\,(p)$ (resp. $\mathrm{Ker}(p)$). Si on applique **b.** avec $\mathcal{B}$, on a $\mathrm{Tr}\,(q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n}||p(v_k)||^2 = r$ car $\forall k \in [\![1; r]\!],\ p(v_k) = v_k$ car $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $\forall k \in [\![r+1; n]\!],\ p(v_k) = 0_E$. Or, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Tr}\,(p) = \mathrm{rang}\,(p) = r$ et on a bien $\mathrm{Tr}\,(q \circ p) = \mathrm{Tr}\,(p)$.

d. Dans le cas général, on prend une base orthonormée $(v_1, \cdots, v_r)$ de $\mathrm{Im}\,(p)$ qu'on complète en une base orthonormale $(v_1, \cdots, v_n)$ de E (c'est-à-dire que $(v_{r++1}, \cdots, v_n)$ est une base orthonormale de $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$). D'après **b.**, $\mathrm{Tr}\,(q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n}||p(v_k)||^2 = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n}||p(v_k)||^2$ car, comme avant, $\forall k \in [\![1; r]\!],\ p(v_k) = v_k$. Comme $\sum\limits_{k=r+1}^{n}||p(v_k)||^2 \geqslant 0$ et qu'on a encore $\mathrm{Tr}\,(p) = r$, on a bien $\mathrm{Tr}\,(q \circ p) = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n}||p(v_k)||^2 \geqslant r = \mathrm{Tr}\,(p)$.

Avec une base orthonormée $\mathcal{B}$ choisie comme dans **d.**, comme $\mathrm{Tr}\,(q \circ p) = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n}||p(v_k)||^2$, on a l'équivalence $\mathrm{Tr}\,(q \circ p) = \mathrm{Tr}\,(p) \Longleftrightarrow \sum_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 = 0 \Longleftrightarrow (\forall k \in [\![r+1;n]\!],\ p(v_k) = 0_E)$. Cette condition revient à $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}\mathrm{Vect}(v_{r+1}, \cdots, v_n) \subset \mathrm{Ker}(p)$ ou encore, par égalité des dimensions car $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des supplémentaires de $\mathrm{Im}\,(p)$, à $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp} = \mathrm{Ker}(p)$.

Ainsi, on a bien l'équivalence $\mathrm{Tr}\,(q \circ p) = \mathrm{Tr}\,(p) \Longleftrightarrow p$ est orthogonal.

12.93 **a.** D'après le théorème spectral version matricielle, si M est symétrique réelle, elle est ODZ. Réciproquement, s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O(n)$ telles que $M = PDP^T$, alors $M^T = PD^TP^T = PDP^T = M$ donc M est symétrique et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a M est ODZ si et seulement si M est symétrique.

b. Si $N(\theta)$ est OTZ, alors $N(\theta)$ est semblable à une matrice triangulaire T donc, comme T, $N(\theta)$ admet deux valeurs propres réelles. Or $\chi_{N(\theta)} = \begin{vmatrix} X - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & X - \cos(\theta) \end{vmatrix} = (X - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ donc $\chi_{N(\theta)} = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ donc $e^{\pm i\theta} \in \mathbb{R}$ ce qui impose $\theta \equiv 0\ [\pi]$.

Réciproquement, si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ (resp. $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$) alors $N(\theta) = I_2$ (resp. $N(\theta) = -I_2$) qui est OTZ.

Ainsi, $N(\theta)$ est OTZ si et seulement si $\theta \equiv 0\ [\pi]$ si et seulement si $N = \pm I_2$.

c. Si M est OTZ, alors M est semblable à une matrice triangulaire T donc $\chi_M = \chi_T$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Réciproquement, si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, on sait d'après le cours que M est trigonalisable donc il existe une matrice inversible U et une matrice triangulaire supérieure T' telles que $M = UT'U^{-1}$. Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à M et si U est la matrice de passage entre la base canonique $\mathcal{B}_0$ et une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$, la formule $M = UT'U^{-1}$ montre que $T' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ car $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$. Par orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormale (dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique) $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ telle que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k)$. Si on note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la condition précédente montre que Q est triangulaire supérieure. La formule de changement de base montre que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = Q^{-1}T'Q$. Comme Q est triangulaire supérieure et inversible, Q^{-1} est aussi triangulaire supérieure donc, par produit de trois telles matrices, $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire supérieure. Si on note P la matrice de passage entre les deux bases orthonormales $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'$, on sait d'après le cours que $P \in O(n)$ et on a aussi $M = PTP^{-1} = PTP^T$ ce qui clôt la preuve.

Ainsi, M est OTZ si et seulement si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

12.94 **a.** Comme $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $B = A^TA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $BX = 0$, alors $A^TAX = 0$ donc, en multipliant par X^T à gauche, $X^TA^TAX = 0$ donc $||AX||^2 = 0$ donc $AX = 0$. En notant f l'application linéaire canoniquement associée à A, on a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{rang}\,(f) = \mathrm{rang}\,(A) = p$ donc f est injective car son rang vaut la dimension de son espace de départ. Par conséquent, $AX = 0$ implique $X = 0$ et on a montré que $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$ donc B est "injective". Comme B est une matrice carrée, B inversible.

b. On calcule aisément $P^2 = AB^{-1}A^TAB^{-1}A^T = AB^{-1}BB^{-1}A^T = AB^{-1}A^T = P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc P est une matrice de projection de l'espace $\mathbb{R}^n$.

- Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comme A est "injective" et B^{-1} est inversible, on a l'équivalence suivante $PY = 0 \Longleftrightarrow AB^{-1}A^TY = 0 \Longleftrightarrow A^TY = 0$ qui prouve que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(A^T)$.
- Comme $P = AB^{-1}A^T$, on a clairement $\mathrm{Im}\,(P) \subset \mathrm{Im}\,(A)$. Or, avec la formule du rang, on trouve que

rang $(P) = n - \dim(\mathrm{Ker}(P)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A^T))$ mais rang $(A) =$ rang $(A^T) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A^T))$ donc rang $(P) =$ rang $(A) = p$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc Im $(P) =$ Im (A).

Précisément, P est la projection de $\mathbb{R}^n$ sur Im (A) parallèlement à $\mathrm{Ker}(A^T)$. Soit $(Y, Z) \in$ Im $(A) \times \mathrm{Ker}(A^T)$, alors $A^T Z = 0$ et il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = AX$ et $(Y|Z) = (AX|Z) = (AX)^T Z = X^T A^T Z = X^T 0 = 0$ donc Im (A) et $\mathrm{Ker}(A^T)$ sont orthogonaux. Ainsi, P est la projection orthogonale sur Im (A).

On pouvait aussi le prouver en constatant que $P^T = (AB^{-1}A^T)^T = A(B^T)^{-1}A^T$ or B est symétrique (matrice de Gram) donc $P^T = AB^{-1}A^T = P$ ce qui montre aussi que P est une projection orthogonale car la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale.

12.95 **a.** Soit a un vecteur unitaire de D, on complète (a) en une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ avec (b, c) une base orthonormée directe de P (pour l'orientation de P induite par celle de D par a). Ainsi, $\mathcal{B} = (a, b, c)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle on sait que $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si θ est l'angle de la rotation r autour de D orientée par a. Par définition de la réflexion s, comme $a \in P^\perp$ et $(b, c) \in P^2$, on a $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $RS = SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ donc $s \circ r = r \circ s$ et les isométries r et s commutent et $r \circ s = s \circ r$ est la rotation-miroir autour de D, d'angle θ.

b. Analyse : supposons que $s \circ r = r \circ s$. Comme r et s commutent les sous-espaces propres de s sont stables par r et vice-versa. Or $E_1(r) = D$, $E_1(s) = P$ et $E_{-1}(s) = P^\perp$. En évaluant en a, $s(a) = s(r(a)) = r(s(a))$ donc $s(a) \in E_1(r) = D$ car r n'est pas l'identité. Comme s est une isométrie, $||s(a)|| = ||a|| = 1$ or $s(a) \in D = \mathrm{Vect}(a)$ qui ne contient que deux vecteurs unitaires : a et $-a$. Traitons les deux cas :

- Si $s(a) = -a$, alors $a \in E_{-1}(s) = P^\perp$ donc $D \perp P$ et on est dans le cas de la question **a.**.
- Si $s(a) = a$, alors $a \in E_1(s) = P$ donc $D \subset P$. Soit n un vecteur unitaire normal à P, alors $s(n) = -n$ donc, comme $r(s(n)) = s(r(n))$, on a $s(r(n)) = -r(n)$ donc $r(n) \in E_{-1}(s) = P^\perp$ et, comme r est une isométrie, $r(b) = \pm b$. Traitons à nouveau les deux cas :
  - Si $r(n) = n$, alors $n \in E_1(r) = D = \mathrm{Vect}(a)$ ce qui est absurde car $a \perp n$.
  - Si $r(n) = -n$, alors $n \in E_{-1}(r)$. Or $\det(r + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 1+\cos\theta \end{vmatrix} = 4(1+\cos\theta)$. Comme $n \neq 0 \in E_{-1}(r) = \mathrm{Ker}(r + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $r + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \notin GL(\mathbb{R}^3)$ donc $\det(r + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$ ce qui montre que $\theta = \pi$ et r est un demi-tour.

Synthèse : traitons les deux cas trouvés dans l'analyse :

- si $D \perp P$, on a vu en question **a.** que $s \circ r = r \circ s$ quelle que soit la valeur de l'angle θ.
- si $D \subset P$ et $\theta = \pi$, en prenant a unitaire dans D et n unitaire normal à P (comme dans l'analyse), $\mathcal{B} = (a, n, a \wedge n)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ car a et n sont orthogonaux et unitaires et on a $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $RS = SR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $r \circ s = s \circ r$ est la réflexion de plan $P' = \mathrm{Vect}(a, n) = P^\perp \oplus D$.

Il existe deux façons pour qu'une rotation r autour de D d'angle θ et une réflexion de plan P commutent :

- Soit $D \perp P$ alors $s \circ r = r \circ s$ est une rotation-miroir pour tout θ.
- Soit $D \subset P$ et r est un demi-tour alors $s \circ r = r \circ s$ est une réflexion.

$\boxed{\textbf{12.96}}$ **a.** Comme u est un vecteur unitaire de E euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E (et même une infinité). On obtient $f(u) = (u|u)u = u$, $f(v) = v \wedge u = -w$ et $f(w) = w \wedge u = v$ donc l'image de la base orthonormée $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}' = (u, -w, v)$ qui est aussi une base orthonormée directe (on l'obtient à partir de $\mathcal{B}$ en échangeant deux vecteurs et en changeant le signe de l'un d'entre eux) donc f est une isométrie directe de E d'après le cours. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{-\pi/2} \end{pmatrix}$, on peut donc conclure que f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de la droite orientée par le vecteur u.

b. <u>Analyse</u> : soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Alors $f \circ g = g^3 = g \circ f$ donc, la droite $\text{Vect}(u) = E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et le plan $\text{Vect}(v, w) = \text{Vect}(u)^\perp = \text{Ker}(f^2 + \text{id}_E)$ (car $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$) sont stables par g car $f - \text{id}_E$ et g commutent et que $f^2 + \text{id}_E$ et g commutent. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \alpha u$ et il existe $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(v) = \beta v + \gamma w$. Comme $f(v) = -w$, on a $g(w) = -g(f(v)) = -f(g(v)) = -\beta f(v) - \gamma f(w) = -\gamma v + \beta w$.
Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & \beta \end{pmatrix}$ et, comme $g^2 = f$, $B^2 = A$ d'où $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 - \gamma^2 = 0$ et $2\beta\gamma = -1$ donc $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = -\gamma$.

<u>Synthèse</u> : les matrices $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,
$B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ vérifient $B_k^2 = A$ et ces matrices sont des matrices orthogonales.

En conclusion, il y a quatre endomorphismes g (en fait des isométries) de E tels que $g^2 = f$. Les deux isométries directes (associées à B_1 et B_2) sont les rotations autour de la droite orientée par le vecteur u et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Les deux autres isométries sont des rotations-miroirs.

$\boxed{\textbf{12.97}}$ **a.** $\det(M(M^TM)^2) = \det(M)\det(M^T)\det(M)\det(M^T)\det(M) = \det(M)^2 = \det(I_n) = 1$ par multiplicativité du déterminant et par hypothèse sur M donc, comme $t \mapsto t^5$ est injective sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\det(M) = 1$ donc $\det(M) \neq 0$ et M est bien inversible.

b. Comme $(M^TM)^T = M^T(M^T)^T = M^TM$, la matrice M^TM est symétrique (matrice de Gram associée à la matrice M) et elle est inversible d'après **a.** donc son carré est aussi symétrique et l'inverse de son carré est aussi symétrique. Ainsi, comme $M = ((M^TM)^2)^{-1}$ est symétrique.

c. La relation $M(M^TM)^2 = I_n$ devient donc, puisque M est symétrique, $M^5 = I_n$. Le polynôme $P = X^5 - 1$ est donc annulateur de M donc les valeurs propres de M font partie des racines de P. Or on sait avec le théorème spectral que les valeurs propres de M sont toutes réelles. Les racines de P sont les racines cinquièmes de l'unité dont une seule est réelle, 1. Ainsi, 1 est la seule valeur propre de M et, M étant diagonalisable par le théorème spectral, M est semblable (et même orthosemblable) à la matrice I_n, donc $M = I_n$.

12.98 **a.** Les matrices appartenant à $D_n(\mathbb{R})$ s'appellent les matrices à diagonale propre.
La matrice A étant triangulaire supérieure, on a $\chi_A = (X-1)^n$ donc $Sp(A) = \{1, \cdots, 1\}$ (1 répété n fois) donc $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Plus généralement, toute matrice triangulaire est dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Comme B est symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral et, comme rang $(B) = 1$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = n-1$ par la formule du rang donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$. La dernière valeur propre λ vérifie donc $\mathrm{Tr}\,(B) = 0 + \cdots + 0 + \lambda = \lambda$ donc $\lambda = n$ et $B \notin \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ car la diagonale de B ne contient pas $0, \cdots, 0, n$.

b. $\mathcal{D}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Dès que $n \geqslant 2$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par somme. En effet, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ alors que $A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ car $\chi_{A_2-B_2} = X^2+1$ donc ses valeurs propres sont $\pm i$ alors que les deux termes diagonaux de $A_2 - B_2$ sont 0 et 0. On peut généraliser pour un entier $n \geqslant 3$ en prenant $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec les mêmes justifications.

c. Si A est symétrique, pour le produit scalaire canonique sur les matrices défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$, on a $||A||^2 = \mathrm{Tr}\,({}^tAA) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$. Or, d'après le théorème spectral, on a $A = PD{}^tP$ avec P orthogonale et D diagonale contenant les valeurs propres de A (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Ainsi, il vient $||A||^2 = \mathrm{Tr}\,({}^tAA) = \mathrm{Tr}\,(PD^2{}^tP) = \mathrm{Tr}\,(D^2)$ car deux matrices semblables ont même trace. Or $\mathrm{Tr}\,(D^2) = \sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ ce qui donne bien la relation $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ (1).
Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n$, on a donc $||A||^2 = \sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ mais, par hypothèse, les valeurs propres de A sont $a_{1,1}, \cdots, a_{n,n}$ donc $\sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$ (2). Ainsi, $\sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}^2 = 0$ (1) $-$ (2) ce qui montre que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$ et enfin A diagonale. Ainsi, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n = D_n$ (les matrices diagonales) car réciproquement, les matrices diagonales (donc triangulaires) sont symétriques et à diagonale propre.

d. Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$, alors par hypothèse $\chi_A = \prod\limits_{k=1}^{n} (X-0) = X^n$ car les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Par Cayley-Hamilton, $A^n = 0$ donc A est nilpotente. Comme A^2 est symétrique donc diagonalisable et qu'elle est aussi nilpotente, elle est forcément nulle car elle est semblable à une matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. Ainsi $A^2 = 0 = -{}^tAA$ donc ${}^tAA = 0$ ce qui donne $||A||^2 = \mathrm{Tr}\,({}^tAA) = 0$ donc $A = 0$. Par conséquent $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n = \{0\}$.

12.99 **a.** Par un calcul matriciel par blocs, on trouve $M^TM = \begin{pmatrix} 1+||C||^2 & 0 \\ 0 & CC^T + I_n \end{pmatrix}$ (matrice de Gram associée à M) donc $\det(M^TM) = (1+||C||^2)\det(I_n + CC^T)$. Or $C^TC = 0$ si $C = 0$ et C^TC est de rang 1 (toutes les colonnes de CC^T sont proportionnelles à C) sinon.

- Si $C = 0$, $M = I_{n+1}$ donc M est inversible.
- Si $C \neq 0$, CC^T est symétrique et de rang 1 donc, d'après le théorème spectral, CC^T est diagonalisable

avec 0 valeur propre de multiplicité $n-1$, l'autre valeur propre étant $\mathrm{Tr}\,(CC^T) = \mathrm{Tr}\,(C^TC) = ||C||^2$ donc CC^T est semblable à $\mathrm{diag}(0,\cdots,0,||C||^2)$ donc $I_n + CC^T$ est semblable à $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,1+||C||^2)$ d'où $\det(I_n + CC^T) = 1 + ||C||^2$. Par conséquent, $\det(M)^2 = \det(M^TM) = (1+||C||^2)^2 > 0$ donc $\det(M) \neq 0$ et la matrice M est bien inversible.

Dans les deux cas, que $C = 0$ ou $C \neq 0$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est inversible.

b. Comme $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$, on a $N^TN = M(M^{-1})^TM^{-1}M^T = M(MM^T)^{-1}M^T$. Mais on vérifie par calcul que $MM^T = M^TM = \begin{pmatrix} 1+||C||^2 & 0 \\ 0 & CC^T + I_n \end{pmatrix}$. Ainsi, $N^TN = M(M^TM)^{-1}M^T = MM^{-1}(M^T)^{-1}M^{-1}$ donc $N^TN = I_{n+1}I_{n+1}^T = I_{n+1}$ et la matrice N est bien orthogonale par définition. De plus, N est une matrice de rotation (isométrie directe) car $\det(N) = \det(M^{-1}) \times \det(M^T) = \dfrac{\det(M)}{\det(M)} = 1$: $N \in SO(n+1)$.

12.100 **a.** Comme id_E et $u_1,\cdots,u_n$ sont des endomorphismes symétriques de E, par somme, $v = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\Big) - \mathrm{id}_E$ en est aussi un donc, d'après le théorème spectral, $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\Big) - \mathrm{id}_E$ est diagonalisable.

b. Soit λ une valeur propre de v, alors il existe $x \neq 0_E \in E$ tel que $v(x) = \lambda x$. Or, par hypothèse, on a $(v(x)|x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(u_k(x)|x) - ||x||^2 = 0$ donc, comme $(v(x)|x) = \lambda||x||^2$, on a $\lambda = 0$ car $||x|| > 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(v) = \{0\}$ donc, comme $E = E_0(v)$ puisque v est diagonalisable, on a $v = 0$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \mathrm{id}_E$.

c. Soit $x \in E$, d'après la question précédente, on a $x = \mathrm{id}_E(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ donc $x \in \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(u_k)$. On a donc déjà $E = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(u_k)$. Comme, $\dim(E) = \dim\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,((u_k)\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dim(\mathrm{Im}\,(u_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{rang}\,(u_k)$ par hypothèse, un théorème du cours nous permet de conclure que cette somme est directe, $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(u_k)$.

d. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u_k)$, alors $y = u_k(y) + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq k}} u_i(y)$ d'après **b.**. Ainsi, par unicité de l'écriture vue en **c.**, on en déduit que $y = u_k(y)$ et $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $u_i(y) = 0_E$ si $i \neq k$. Par conséquent, pour $x \in E$, en notant $y = u_k(x)$, on a $u_k(y) = u_k^2(x) = u_k(x) = y$ et $\forall i \neq k$, $u_i \circ u_k(x) = u_i(y) = 0_E$. Les u_k sont donc des projecteurs et, comme les u_k ont été supposés symétriques, les u_k sont des projecteurs orthogonaux.

De plus, les sous-espaces $\mathrm{Im}\,(u_k)$ sont orthogonaux deux à deux car si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, alors $\mathrm{Im}\,(u_i) \subset \mathrm{Ker}(u_j)$ car $u_j \circ u_i = 0$ d'après ce qui précède, ainsi $\mathrm{Im}\,(u_i) \subset \mathrm{Im}\,(u_j)^{\perp}$ puisqu u_j est un projecteur orthogonal. On a donc bien établi que $\mathrm{Im}\,(u_i) \perp \mathrm{Im}\,(u_j)$ dès que $i \neq j$.

12.101 **a.** Par hypothèse, $P = X^3 + 9X$ est annulateur de A. Or $X^3 + 9X = X(X-3i)(X+3i)$ et on sait que les valeurs propres de A font partie des racines de tout polynôme annulateur de A, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.

b. Comme le polynôme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ et annulateur de A, on sait d'après le cours que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors elle n'admet que des valeurs propres réelles donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Elle est donc semblable à la matrice nulle puisque diagonalisable donc $A = 0$. Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est nulle.

d. Si n est impair, comme $A^3 = -9A$, en passant au déterminant, $\det(A)^3 = (-1)^n 9^n \det(A)$. Si on avait

$\det(A) \neq 0$, on aurait $\det(A)^2 = (-1)^n 9^n < 0$ NON ! Si n est impair, $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.

e. Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral donc elle est nulle avec la question **b.**. Ainsi, il n'existe aucune matrice symétrique réelle non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

12.102 **a.** Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et les vecteurs colonnes associés X et Y, alors, avec l'identification classique entre matrice $(1, 1)$ et réels, on a $(x|f(y)) = X^T(AY) = -X^T A^T Y = -(A^T X)Y = -(f(x)|y)$ car A est antisymétrique.

b. Par définition, $\det(f) = \det(A) = \det(-A^T) = (-1)^n \det(A^T) = (-1)^n \det(A) = (-1)^n \det(f)$ toujours car A est antisymétrique et parce que $\det(A) = \det(A^T)$.

On en déduit que si n est impair, on a $\det(f) = -\det(f)$ donc $\det(f) = 0$ et f n'est pas un automorphisme.

c. Soit $y \in \text{Im}(f)$, alors $f(y) \in \text{Im}(f)$ par définition donc $\text{Im}(f)$ est stable par f. Il est donc licite de considérer l'endomorphisme g induit par f sur $\text{Im}(f)$, il s'agit de $g : \text{Im}(f) \to \text{Im}(f)$ définie par $g(x) = f(x)$. Soit $x \in \text{Ker}(g)$, on a donc $x \in \text{Im}(f)$ par définition de g et $g(x) = f(x) = 0$ par définition du noyau donc $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi, il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(z)$ et on a donc $||x||^2 = (x|x) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = -(0|z) = 0$ ce qui prouve que x est le vecteur nul. Ainsi, $\text{Ker}(g) = \{0\}$ donc g est un automorphisme de $\text{Im}(f)$.

Pour $(a, b) \in \big(\text{Im}(f)\big)^2$, on a aussi $(a|g(b)) = (a|f(b)) = -(f(a)|b) = -(g(a)|b)$. Soit une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r)$ de $\text{Im}(f)$, alors $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \big((g(v_j)|v_i)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ donc B est aussi antisymétrique car $B^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \big((g(v_i)|v_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} = \big(-(v_j|g(v_i))\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} = -B$. Ainsi, d'après **b.**, comme g est inversible, on a forcément r pair donc, d'après la formule du rang, $\det(\text{Ker}(f)) = n - r$ est de la même parité que n.

d. Comme $n = 3$, on ne peut avoir d'après **c.** que $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ ou $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$.

- Si $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$, alors $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$ donc $f = 0$, la matrice de f dans n'importe quelle base est la matrice nulle qui est de la forme annoncée avec $a = 0$.
- Si $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, soit v_1 un vecteur unitaire de $\text{Ker}(f)$. Comme en **c.**, si $(x, y) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f)$, il existe $z \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(z)$ et on a $(x|y) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = -(0|z) = 0$ donc $\text{Ker}(f) \perp \text{Im}(f)$. Soit v_2 un vecteur unitaire de $\text{Im}(f)$ ($\text{Im}(f)$ est un plan), alors comme $(f(v_2)|v_2) = -(v_2|f(v_2))$, on a $f(v_2) \in \text{Im}(f)$, $v_2 \perp f(v_2)$, $f(v_2) \neq 0$ car $v_2 \notin \text{Ker}(f)$. Posons donc $v_3 = \dfrac{f(v_2)}{||f(v_2)||}$ de sorte que $||v_3|| = 1$. Par construction, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et $f(v_2) = av_3$ avec $a = ||f(v_2)||$. On a vu précédemment que la matrice de l'application g induite par f dans $\text{Im}(f)$ était antisymétrique dans une base orthonormale de $\text{Im}(f)$ et justement (v_2, v_3) en est une, on a forcément $f(v_3) = -av_2$. Ainsi, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ donc $\chi_A = X(X^2 + a^2) = X(X + ia)(X - ia)$ avec $a \neq 0$.

Comme $ia \notin \mathbb{R}$, f (ou A) n'est diagonalisable que si f est nulle.

12.103 **a.** ($\Longleftarrow$) Il est clair que si $M = 0$, on a bien $\big(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T MY = 0\big)$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $\big(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T MY = 0\big)$. Pour $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, avec $X = E_i$ et $Y = E_j$ (vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), alors $0 = E_i^T ME_j = m_{i,j}$ (case (i, j) de la matrice M) : $M = 0$.

Par double implication, on a l'équivalence $\big(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T MY = 0\big) \Longleftrightarrow (M = 0)$.

b. Il est logique d'après l'énoncé d'utiliser la question précédente même si c'est du cours car P étant une projection orthogonale et la base canonique étant orthonormée, on sait que P est symétrique.

Pour $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, décomposons $X = X_1 + X_2$ et $Y_1 + Y_2$ avec $(X_1,Y_1) \in (\mathrm{Ker}(P))^2$ et $(X_2,Y_2) \in (\mathrm{Im}\,(P))^2$. On a $X^T(P^T - P)Y = X^TP^TY - X^TPY = (PX)^TY - X^T(PY) = (PX|Y) - (X|PY) = (X_2|Y_1+Y_2) - (X_1+X_2|Y_2)$ car $PX = X_2$, $PY = Y_2$ par définition de cette projection orthogonale P qui vérifie $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}(P) = (\mathrm{Im}\,(A))^\perp$. Comme $X_1 \perp Y_2$ et $X_2 \perp Y_1$, il ne reste que $X^T(P^T - P)Y = (X_2|Y_2) - (X_2|Y_2) = 0$. D'après la question précédente, $P^T - P = 0$ donc P est symétrique.

c. Comme $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$ par définition et que $\mathrm{Ker}(I_n - P) = \mathrm{Im}\,(P)$ car P est la matrice d'une projection, on a $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}(I_n - P)$ donc $(I_n - P)A = 0$ ce qui se traduit par $PA = A$.

d. L'application $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{Tr}\,(M^TN)$ est le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le cours. On applique CAUCHY-SCHWARZ au couple (P,A) et $|(P|A)| = |\mathrm{Tr}\,(P^TA)| \leqslant ||P||\,.\,||A||$ ou, en élevant au carré, $\mathrm{Tr}\,(P^TA)^2 \leqslant ||P||^2||A||^2$. Or $P^T = P$ et $PA = A$ donc $P^TA = A$ et $||A||^2 = \mathrm{Tr}\,(A^TA)$. De plus, P étant la matrice dans la base canonique d'une projection p, dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$ où r est la dimension de $\mathrm{Im}\,(p)$, donc le rang de p. D et P représente le même endomorphisme p dans deux bases différentes, donc D et P sont semblables. Comme la trace est un invariant de similitude, $\mathrm{Tr}\,(P^TP) = \mathrm{Tr}\,(P^2) = \mathrm{Tr}\,(P) = \mathrm{Tr}\,(D) = r = \mathrm{rang}\,(p) = \mathrm{rang}\,(A)$ car $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \times \mathrm{Tr}\,(A^TA)$.

e. Il y a égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.

Analyse : supposons (A,P) liée, alors $P = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ A = \lambda P$. Or $P = 0$ si et seulement si $A = 0$ car $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$. Dans les deux cas, $A = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et P une projection orthogonale.

Synthèse : si $A = \lambda Q$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et Q une projection orthogonale, traitons deux cas. Si $\lambda = 0$, alors $A = 0$ donc $P = 0$ et (A,P) liée. Si $\lambda \neq 0$, on a $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(Q)$ donc P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(Q)$, comme Q. Ainsi, $P = Q$ et $A = \lambda P$ donc (A,P) liée.

Par double implication, il y a égalité dans $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \times \mathrm{Tr}\,(A^TA)$ si et seulement si A est le multiple d'une projection orthogonale, c'est-à-dire la composée d'une projection orthogonale et d'une homothétie.

12.104 **a.** Clairement, $I_n \in V_1$ car $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), I_nX = X$ donc tout vecteur non nul est propre pour I_n associé à la valeur propre 1 et on a bien $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(I_n) = \{1\}$.

b. Comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$ et que χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$, on a $\chi_M = (X-1)^n$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a donc $(M - I_n)^n = 0$.

c. Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (réduction de JORDAN), alors on a clairement $\chi_M = (X-1)^4$ donc $M \in V_1$.

Comme $M - I_4 = E_{2,3} + E_{3,4}$, on a $(M - I_4)^2 = E_{2,4} \neq 0$ et $(M - I_4)^3 = (E_{2,3} + E_{3,4})E_{2,4} = 0$.

d. Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap V_1$ symétrique réelle et vérifiant $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$, alors comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ d'après le théorème spectral, 1 est la seule valeur propre de M. Mais comme M est orthosemblable à une matrice diagonale contenant sur sa diagonale les valeurs propres de M toujours d'après le théorème spectral, on en déduit que $M = PI_nP^T$ avec $P \in O(n)$ donc $M = I_n$.

e. Soit $M \in O(3)$ telle que $M \in V_1$. Si on avait $\det(M) = -1$, alors $\det(M + I_n) = \det(M + M^TM)$ donc

$\det(M+I_n) = \det((I_n+M^T)M) = \det(I_n+M^T)\det(M) = -\det(I_n+M)$ car $(I_n+M^T) = (I_n+M)^T$ donc $\det(M+I_n) = 0$. Ainsi, -1 serait valeur propre de M ce qui contredit l'hypothèse $M \in V_1$. Ainsi, $M \in SO(3)$ mais on sait alors d'après le cours que $M = I_3$ ou que M est une vraie rotation d'angle $\theta \in]0;2\pi[$ dont la matrice dans une base orthonormée directe adaptée est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = M_\theta$. Si $M = M_\theta$, alors $\chi_M = (X-1)(X^2 - 2\cos(\theta)X + 1) = (X-1)(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$ (après calculs) donc $Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ ce qui contredit encore $M \in V_1$. Ainsi, $M = I_3$.

12.105 **a.** Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, alors $||AX||_2^2 = (AX)^T(AX) = X^T(A^TA)X = X^TX$ car $A^TA = I_2$ donc $||AX||_2^2 = ||X||_2^2$ et, en passant à la racine comme tout est positif, on a $||AX||_2 = ||X||_2 \leqslant ||X||_2$ donc $A \in C$. On conclut à l'inclusion $O_2(\mathbb{R}) \subset C$.

b. D'après le cours, les seules matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de rotation $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in C$. Traitons deux cas :

- Si A est déjà symétrique, alors il suffit de prendre $R = I_2 \in SO_2(\mathbb{R})$ et on a $AR = A$ symétrique.
- Si A n'est pas symétrique, comme $AR_\theta = \begin{pmatrix} a_{1,1}\cos(\theta) + a_{1,2}\sin(\theta) & -a_{1,1}\sin(\theta) + a_{1,2}\cos(\theta) \\ a_{2,1}\cos(\theta) + a_{2,2}\sin(\theta) & -a_{2,1}\sin(\theta) + a_{2,2}\cos(\theta) \end{pmatrix}$, il s'agit donc de trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $-a_{1,1}\sin(\theta) + a_{1,2}\cos(\theta) = a_{2,1}\cos(\theta) + a_{2,2}\sin(\theta)$. Or cette condition équivaut, comme $a_{1,2} \neq a_{2,1}$, à $\cos(\theta) = \dfrac{a_{1,1}+a_{2,2}}{a_{1,2}-a_{2,1}}\sin(\theta)$. Comme la fonction $\text{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$ est surjective de $]0;\pi[$ dans $\mathbb{R}$, il existe un réel $\theta \in]0;\pi[$ tel que $\text{cotan}\,(\theta) = \dfrac{a_{1,1}+a_{2,2}}{a_{1,2}-a_{2,1}}$ et, d'après ce qui précède, en prenant $R = R_\theta$, on a bien AR symétrique.

Comme AR est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, il existe $P \in O_2(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que $AR = PDP^T$. Comme P est inversible et que $P^{-1} = P^T$, on a $P^TARP = D$ donc il suffit de poser $\Omega_1 = P^T \in O_2(\mathbb{R})$ et $\Omega_2 = RP \in O_2(\mathbb{R})$ (car $O_2(\mathbb{R})$ est stable par produit) et on a bien $\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $(\Omega_1, \Omega_2) \in O_2(\mathbb{R})^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

c. Pour $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, comme $A = \Omega_1^T D \Omega_2^T$, $||\Omega_1^T D \Omega_2^T Y||_2 \leqslant ||Y||_2$ puisque $A \in C$. Pour $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en posant $Y = \Omega_2 X$, on a donc $||\Omega_1^T DX||_2 \leqslant ||\Omega_2 X||_2$ car $\Omega^T\Omega = I_2$. Mais puisque Ω_1 et Ω_2 sont orthogonales, elles conservent la norme donc $||\Omega_1^T DX||_2 = ||DX||_2$ et $||\Omega_2 X||_2 = ||X||_2$ donc $||DX||_2 \leqslant ||X||_2$. Il suffit maintenant de prendre $X = E_1$ pour avoir $||X||_2 = 1$ et $DX = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $||DX||_2 = |a|$ d'où $|a| \leqslant 1$. De même, avec $X = E_2$, on a $|b| \leqslant 1$.

d. Supposons par exemple $|a| \leqslant |b|$, d'après ce qui précède, pour $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a $\dfrac{||AX||_2}{||X||_2} = \dfrac{||MX||_2}{||X||_2}$

12.106 **a.** On a $P_0 = 2$, $P_1 = X$, $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$ et $P_3 = XP_2 - P_1 = X^3 - 3X$. Posons, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n =$ "$P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P_n) = n$, P_n est de la parité de n et $\text{dom}(P_n) = 1$". D'après ce qui précède, les assertions $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont vraies. Soit $n \geqslant 3$ tel que $\mathcal{P}_{n-2}$ et $\mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies. Comme $\mathbb{R}[X]$ est un anneau, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2} \in \mathbb{R}[X]$. De plus, $\deg(XP_{n-1}) = 1 + \deg(P_{n-1}) = n > n-2 = \deg(P_{n-2})$ donc $\deg(P_n) = \text{Max}(\deg(XP_{n-1}, P_{n-2}) = n$ et le coefficient dominant de P_n ne vient que de XP_{n-1} qui est unitaire car P_{n-1} l'est donc P_n est aussi unitaire. Comme P_{n-1} a la parité de $n-1$, XP_{n-1} a la parité de n et P_{n-2} a la parité de $n-2$, donc aussi celle de n et, par somme, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$ a la parité de n.

Par principe de récurrence double, $\forall n \geqslant 1,\ P_n \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P_n) = n,\ P_n$ est de la parité de n et $\text{dom}(P_n) = 1$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{Q}_n =$ "$P_n\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$". Les assertions $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$ sont vraies car $P_0\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = 2 = 1+\dfrac{1}{1} = z^0 + \dfrac{1}{z^0}$ et $P_1\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = z+\dfrac{1}{z} = z^1 + \dfrac{1}{z^1}$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{Q}_{n-2}$ et $\mathcal{Q}_{n-1}$ sont vraies. Alors $P_n\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = \Big(z+\dfrac{1}{z}\Big)P_{n-1}\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) - P_{n-2}\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big)$ donc, par hypothèse de récurrence, $P_n\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = \Big(z+\dfrac{1}{z}\Big)\Big(z^{n-1}+\dfrac{1}{z^{n-1}}\Big) - \Big(z^{n-2}+\dfrac{1}{z^{n-2}}\Big) = z^n + \dfrac{1}{z^n} + z^{n-2} + \dfrac{1}{z^{n-2}} - z^{n-2} - \dfrac{1}{z^{n-2}} = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

Par principe de récurrence double, on a bien établi que $\forall n \geqslant 0,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on prend $z = e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $\theta \in [0;2\pi[$, comme $z + \dfrac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ et $z^n + \dfrac{1}{z^n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$, on a $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$. Ainsi, en prenant $\theta = \theta_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} \in]0;\pi[$ pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a $P_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = \cos(k\pi + (\pi/2)) = 0$. Comme $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \pi$ et que la fonction $\cos$ est injective et strictement décroissante sur $]0;\text{pi}[$, les n valeurs $\cos(\theta_{n-1}) < \cdots < \cos(\theta_0)$ sont distinctes et toutes racines du polynôme P_n qui est unitaire de degré n donc on a $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(X - \cos(\theta_k))$. Le polynôme P_n admet donc n racines réelles distinctes, toutes dans $]-1;1[$.

d. On sait que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'unique décomposition $A = \dfrac{A+A^T}{2} + \dfrac{A-A^T}{2}$ avec $\dfrac{A+A^T}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{A-A^T}{2} \in A_n(\mathbb{R})$. Soit $U \in O(n)$, comme $O(n)$ est un groupe, $U^k \in O(n)$ donc $S_{U^k} = \dfrac{U^k + (U^k)^T}{2} = \dfrac{U^k + U^{-k}}{2}$ car $U^T = U^{-1}$. Comme $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_k\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = z^k + \dfrac{1}{z^k}$, on a $z^k P_k\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big) = z^{2k} + 1$ donc les polynômes $X^k P_k\Big(X+\dfrac{1}{X}\Big)$ et $X^{2k}+1$ coïncident en une infinité de valeurs d'où $X^k P_k\Big(X+\dfrac{1}{X}\Big) = X^{2k}+1$. En notant $P_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i X^i$, on a $X^k P_k\Big(X+\dfrac{1}{X}\Big) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i (X^2+1)^i X^{k-i} = X^{2k}+1$. En évaluant ceci en la matrice U, on a donc $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i (U^2 + I_n)^i U^{k-i} = U^{2k} + I_n$. On multiplie par U^{-k} pour obtenir $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i (U^2+I_n)^i U^{-i} = U^k + U^{-k} = 2S_{U^k} = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i (U+U^{-1})^i = P_k(U+U^{-1}) = P_k(2S_U)$. Ainsi, en posant $Q_k = \dfrac{P_k(2X)}{2}$, on a bien $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ (avec $\deg(Q_k) = k$ et $\text{dom}(Q_k) = 2^{k-1}$) et $S_{U^k} = Q_k(S_U)$.

12.107 **a.** D'après le cours, l'application $(A,B) \mapsto (A|B) = \text{Tr}\ (A^TB)$ définit un produit scalaire (le produit scalaire canonique) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $n : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifie $n(A) = \text{Tr}\ (A^TA) = \text{Tr}\ (AA^T) = ||A||^2$.

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $n(AB) = \text{Tr}\ ((AB)^T(AB)) = \text{Tr}\ (B^TA^TAB) = \text{Tr}\ (BB^TA^TA)$ par propriété de la trace donc $n(AB) = \text{Tr}\ (S'S)$ avec $S' = BB^T \in S_n(\mathbb{R})$ et $S = A^TA \in S_n(\mathbb{R})$. Or, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^TSX = X^TA^TAX = ||AX||^2 \geqslant 0$ et $X^TS'X = X^TBB^TX = ||B^TX||^2 \geqslant 0$, donc les matrices S et S' sont symétriques positives (donc dans $S_n^+(\mathbb{R})$). D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ telle que $S = PDP^T$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres positives de S (répétées avec leurs ordres de multiplicité). Posons $C = P^TS'P$, donc $S' = PCP^T$ et $\text{Tr}\ (S'S) = \text{Tr}\ (PCP^TPDP^T) = \text{Tr}\ (PCDP^T) = \text{Tr}\ (CD)$ car $PCDP^T$ et CD sont semblables. Comme $n(A) = \text{Tr}\ (AA^T) = \text{Tr}\ (A^TA) = \text{Tr}\ (S)$ et $n(B) = \text{Tr}\ (BB^T) = \text{Tr}\ (S')$, il s'agit donc d'établir que $n(AB) = \text{Tr }(S'S) \leqslant \text{Tr }(S)\text{Tr }(S') = n(A)n(B)$. Comme $\text{Tr }(S) = \text{Tr }(D)$ (resp. $\text{Tr }(C) = \text{Tr }(S')$) car S et D (resp. S' et C) sont semblables, on veut montrer que $\text{Tr }(CD) \leqslant \text{Tr }(C)\text{Tr }(D)$.

La matrice C est symétrique car $C^T = (P^TS'P)^T = P^TS'^T(P^T)^T = P^TS'P = C$ car S' est elle-même symétrique. De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^TCX = X^TP^TS'PX = Y^TS'Y = ||B^TY||^2 \geqslant 0$ en posant $Y = PX$. Ainsi, $C \in S_n^+(\mathbb{R})$. En notant $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on sait que $c_{i,j} = E_i^TCE_j$ donc $c_{k,k} = E_k^TCE_k \geqslant 0$ donc les termes diagonaux de C sont positifs. Ainsi, comme on a $CD = (c_{i,j}\lambda_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ par calcul matriciel, on obtient $\text{Tr }(CD) = \sum_{k=1}^{n} c_{k,k}\lambda_k \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} c_{i,i}\Big) \times \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\Big) = \text{Tr }(C)\text{Tr }(D)$ car $\text{Tr }(C)\text{Tr }(D) = \sum_{k=1}^{n} c_{k,k}\lambda_k + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} c_{i,i}\lambda_j$ et $c_{i,i} \geqslant 0$ et $\lambda_j \geqslant 0$. Ainsi, $\text{Tr }(CD) \leqslant \text{Tr }(C)\text{Tr }(D)$ donc $\text{Tr }(S'S) \leqslant \text{Tr }(S)\text{Tr }(S')$ et $n(AB) \leqslant n(A)n(B)$.

b. $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^T$. Ainsi, $AA^T = PDP^TPD^TP^T = PD^2P^T$ donc $n(A) = \text{Tr }(AA^T) = \text{Tr }(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a donc $2n(A) = \sum_{k=1}^{n}(2\lambda_k^2)$ donc $2n(A) \geqslant 2\lambda_i^2 + 2\lambda_j^2 \geqslant (\lambda_i - \lambda_j)^2$ car $2\lambda_i^2 + 2\lambda_j^2 \geqslant (\lambda_i - \lambda_j)^2 \iff 2\lambda_i^2 + 2\lambda_j^2 \geqslant \lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2 \iff \lambda_i^2 + 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2 \iff (\lambda_i + \lambda_j)^2 \geqslant 0$ ce qui est clairement vrai. Ainsi, comme on a aussi $2n(A) = 2||A||^2 \geqslant 0 = (\lambda_i - \lambda_i)^2$, on peut affirmer que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ 2n(A) \geqslant (\lambda_i - \lambda_j)^2$. Mais comme les valeurs propres de A sont classées dans l'ordre croissant, la plus grande valeur de $(\lambda_i - \lambda_j)^2$ quand $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ est $(\lambda_n - \lambda_1)^2$ de sorte que la meilleure minoration de $n(A)$ obtenue par ce procédé est $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leqslant 2n(A)$ (I).

On a $2n(A) = 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 2\lambda_1^2 + 2\lambda_n^2 + \sum_{k=2}^{n-1}(2\lambda_k^2) = (\lambda_n - \lambda_1)^2 + (\lambda_1 + \lambda_n)^2 + \sum_{k=2}^{n-1}(2\lambda_k^2)$ donc on a égalité dans (I) si et seulement si $(\lambda_1 + \lambda_n)^2 + \sum_{k=2}^{n-1}(2\lambda_k^2) = 0$. Traitons plusieurs cas :

- Si $n = 1$, $A = (a) \in S_1(\mathbb{R})$ et $n(A) = \text{Tr }(AA^T) = a^2$ donc, comme $\lambda_n - \lambda_1 = a - a = 0$ car la seule valeur propre de A est a, on a égalité dans (I) si et seulement A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
- Si $n = 2$, $2n(A) = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ donc on a égalité dans (I) si et seulement si $\lambda_2 = -\lambda_1$ donc si et seulement si $\text{Tr }(A) = 0$ puisque $\text{Tr }(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.
- Si $n \geqslant 3$, de même, on a égalité dans (I) si et seulement si $(\lambda_n + \lambda_1)^2 + \sum_{k=2}^{n-1}(2\lambda_k^2) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda_n + \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ qui équivaut à $A = 0$ ou ($\text{rang}\,(A) = 2$ et $\text{Tr }(A) = 0$).

Il y a égalité dans (I) si et seulement $A = 0$ ou ($n = 2$ et $\text{Tr }(A) = 0$) ou ($n \geqslant 3$ et $\text{Tr }(A) = 0$ et $\text{rang}\,(A) = 2$).

12.108 **a.** En reconnaît, pour $(M, M') \in E^2$, $(M|M') = \text{Tr }(M^TM')$ et on sait d'après le cours que cette application $(M, M') \mapsto (M|M')$ est bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si $M \in E$ et qu'on suppose que $(M|M) = 0$, alors $a^2 + 2b^2 + c^2 = 0$ donc $a = b = c = 0$ donc $M = 0$ et $(.|.)$ est bien un produit scalaire sur E. C'est le produit scalaire induit par le produit scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans E.

b. Soit $f \in G$, alors pour tout matrice $M \in E$, on a $||M||^2 = \text{Tr }(M^TM) = \text{Tr }(M^2)$ car M symétrique or $\chi_M(M) = M^2 - \text{Tr }(M)M + \det(M)I_2 = 0$ par Cayley-Hamilton donc $||M||^2 = \text{Tr }(\text{Tr }(M)M - \det(M)I_2)$ et $||M||^2 = \text{Tr }(M)^2 - 2\det(M) = \text{Tr }(f(M))^2 - 2\det(f(M)) = ||f(M)||^2$ avec le même calcul appliqué à $f(M)$. Ainsi, f conserve la norme dans E donc $f \in O(E)$ d'après le cours. On a donc déjà $G \subset O(E)$.

• Si $(f, g) \in G^2$ et $M \in E$, comme $f \in G$ et $g \in G$, on a $\text{Tr}\ (f \circ g(M)) = \text{Tr}\ (f(g(M)) = \text{Tr}\ (g(M)) = \text{Tr}\ (M)$ cet $\det(f \circ g(M)) = \det(f(g(M)) = \det(g(M)) = \det(M)$ donc $f \circ g \in G$: G est stable par composition.

• Si $f \in G$ et $M \in E$ il vient $\text{Tr}\ (M) = \text{Tr}\ (f(f^{-1}(M)) = \text{Tr}\ (f^{-1}(M))$ car $f \in G$ et on a aussi $\det(M) = \det(f(f^{-1}(M)) = \det(f^{-1}(M))$ car $f \in G$ donc $f^{-1} \in G$: G est stable par passage à l'inverse.

Comme $G \neq \emptyset$ car $\text{id}_E \in G$, ce qui précède montre que G est bien un sous-groupe de $O(E)$ pour la composition.

c. ($\Longrightarrow$) Si $f \in G$, on pose $F = \{M \in E \mid \text{Tr}\ (M) = 0\}$. Comme $F = \text{Ker}(\text{Tr}\ )$ et que Tr est une forme linéaire non nulle sur E, F est un hyperplan de E et $F^{\perp} = \text{Vect}(I_2)$ car $F = \{M \in E \mid (M|I_2) = 0\}$. Comme $f \in O(E)$ et F stable par f, $F^{\perp}$ l'est aussi donc $f(I_2) = \lambda I_2$. Or $\text{Tr}\ (f(I_2)) = \text{Tr}\ (I_2) = 2 = 2\lambda$ donc $\lambda = 1$ et $f(I_2) = I_2$.

($\Longleftarrow$) La réciproque est fausse en prenant l'unique $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, puisque $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1})$ est une base de E, $f(E_{1,1}) = I_2$, $f(E_{2,2}) = 0$ et $f(E_{1,2} + E_{2,1}) = 0$. f vérifie bien $f(I_2) = f(E_{1,1} + E_{2,2}) = I_2 + 0 = I_2$ et qui n'appartient pas à G car, par exemple, $\text{Tr}\ (f(E_{2,2})) = 0 \neq 1 = \text{Tr}\ (E_{2,2})$. L'énoncé est donc incomplet !

12.109 **a.** L'application f va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même et sa linéarité provient de celle de la transposition ; on vérifie que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(\lambda A + B) = \lambda f(A) + f(B)$. Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. <u>Méthode 1</u> : pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f^2(M) = f(f(M)) = M + M^T + (M + M^T)^T = 2f(M)$ car $(M^T)^T = M$. Par conséquent, $X^2 - 2X = X(X-2)$ est annulateur de f et scindé à racines simples donc f est diagonalisable.

<u>Méthode 2</u> : munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(A|B) = \text{Tr}\ (A^TB) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, alors $(f(A)|B) = (A + A^T|B) = (A|B) + (A^T|B) = (A|B) + \text{Tr}\ (AB) = (B|A) + \text{Tr}\ (BA)$ par bilinéarité et symétrie du produit scalaire et car on sait qu $\text{Tr}\ (AB) = \text{Tr}\ (BA)$. Ainsi, on a la relation $(f(A)|B) = (B|A) + (B^T|A) = (f(B)|A) = (A|f(B))$. Ceci prouve que f est autoadjoint donc, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable.

c. Si on a utilisé la méthode 1 ci-dessus, on sait que $\text{Sp}(f) \subset \{0, 2\}$.

Si M est symétrique, $f(M) = 2M$. De plus, $f(M) = 2M \Longleftrightarrow M + M^T = 2M \Longleftrightarrow M = M^T \Longleftrightarrow M \in S_n(\mathbb{R})$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $E_2(f) = S_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Si M est antisymétrique, $f(M) = 0$. De plus, $f(M) = 0 \Longleftrightarrow M + M^T = 0 \Longleftrightarrow M = -M^T \Longleftrightarrow M \in A_n(\mathbb{R})$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $E_0(f) = A_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Comme $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires (même orthogonaux pour le produit scalaire choisi) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il n'y a pas d'autres valeurs propres de f. Ainsi, on a $\text{Sp}(f) = \{0, 2\}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_0(f) \oplus E_2(f)$, $\text{Tr}\ (f) = n(n+1)$ et $\det(f) = 2$ si $n = 1$ et $\det(f) = 0$ si $n \geqslant 2$.

12.110 La matrice A^TA est symétrique réelle donc, par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A^TA) telles que $A^TA = PDP^T$. Comme A^TA est inversible car A (et donc A^T) l'est, les λ_j sont non nulles (et même strictement positives). Pour $j \in [\![1; n]\!]$, notons X_j la j-ième colonne de P. On sait que les colonnes de P constituent une base orthonormale de E donc $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base orthonormale de E. Par formule de changement de base, on a $AX_j = \lambda_j X_j$ et $||AX_j||^2 = (AX_j|AX_j) = X_j^TA^TAX_j = X_j^T\lambda_jX_j = \lambda_j||X_j||^2 = \lambda_j$ pour $j \in [\![1; n]\!]$ donc $||AX_j|| \neq 0$ d'où $AX_j \neq 0$ et on a comme attendu $\lambda_j = ||AX_j||^2 > 0$.

De plus, si $(j,j') \in [\![1;n]\!]^2$ avec $j \neq j'$, on a $(AX_j|AX_{j'}) = X_j^T A^T A X_{j'} = X_j \lambda_{j'} X_j = \lambda_{j'}(X_j|X_{j'}) = 0$ car $X_j \perp X_{j'}$. La famille $(AX_1, \cdots, AX_n)$ est donc constituée de vecteurs non nuls et orthogonaux, on sait d'après le cours qu'elle est libre donc que c'est une base orthogonale de E car $\dim(E) = n$.

12.111 **a.** Si $A^2 = A^T$, alors $A^4 = (A^2)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T = (A^T)^T = A$ donc $X^4 - X = X(X^3 - 1)$ est annulateur de A. Comme A est inversible, $A^4 = A$ se simplifie en $A^3 = I_2$ donc $P = X^3 - 1$ est aussi annulateur de A.

b. Mais comme les racines de $X^3 - 1$ sont les trois racines cubiques de l'unité, $P = (X-1)(X-j)(X-j^2)$. Les valeurs propres de A étant forcément racines de tout polynôme annulateur de A, $Sp(A) \subset \{1, j, j^2\}$. De plus, comme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

c. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, $\det(A) = \prod\limits_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$. On sait aussi que les ordres de multiplicité de j et j^2 dans $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ sont les mêmes et $j^2 = \bar{j}$. Ainsi, $\det(A) = 1^{m_1(A)}(j \times j^2)^{m_j(A)} = 1$ car $j^3 = 1$.
On peut aussi écrire $\det(A^2) = \det(A^T) = \det(A)$ donc $\det(A) \in \{0, 1\}$. Comme A est inversible, $\det(A) = 1$.

d. Comme on sait que $Sp(A) \subset \{1, j, j^2\}$, traitons deux cas :

- Si j (resp. j^2) est valeur propre de A, alors $\bar{j} = j^2$ (resp. j) l'est aussi car A est une matrice réelle et on a alors $\chi_A = (X-j)(X-j^2) = X^2 + X + 1$.
- Si j n'est pas valeur propre de A, alors j^2 non plus et on a $\chi_A = (X-1)^2$.

e. Comme $A^3 = I_2$ et $A^2 = A^T$, on a $AA^T = I_2$ donc $A \in O(2)$. Comme $\det(A^3) = \det(A)^3 = \det(I_2) = 1$, on a $\det(A) = 1$ et A est l'une des matrices R_θ du cours. Or $(R_\theta)^3 = R_{3\theta} = I_2$ implique alors $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$. Traitons les trois cas :

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $A = I_2$.
- Si $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, on a $A = R_{2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.
- Si $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$, on a $A = R_{-2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, ces trois matrices sont bien inversibles et vérifient $AA^T = I_2$ avec $A^3 = I_2$ donc $A^2 = A^T$.

12.112 **a.** Posons $P = \chi_{M(a,b,c)} = \begin{vmatrix} X-a & 0 & -c \\ 0 & X-b & 0 \\ -c & 0 & X-a \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la deuxième colonne, $P = (X-b)\begin{vmatrix} X-a & -c \\ -c & X-a \end{vmatrix} = (X-b)\big((X-a)^2 - c^2\big)$ donc $Sp(M(a,b,c)) = \{a-c, a+c, b\}$.

b. Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$ (on le savait déjà car $M(a,b,c)$ est symétrique réelle), on sait d'après le cours que $d = \det(M(a,b,c)) = -P(0) = b(a^2 - c^2)$ (ou avec SARRUS). On sait déjà que $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c))$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b,c))$ sont orthogonaux car $M(a,b,c)$ est symétrique. Traitons quelques cas :

- Si $a = b = c = 0$, alors $M(a,b,c) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \{0\}$.
- Si $b = 0$ et $a = c \neq 0$, alors $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 1$ et on a $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$.
- Si $b = 0$ et $a = -c \neq 0$, alors $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 1$ et on a $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$.

• Si $b = 0$ et $a^2 \neq c^2$, les colonnes 1 et 3 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc rang $(M(a,b,c)) = 2$ et $\mathsf{Ker}(M(a,b,c)) = \mathsf{Vect}((0,1,0))$ et Im $(M(a,b,c)) = \mathsf{Vect}((1,0,1),(1,0,-1))$.

• Si $b \neq 0$ et $a = c = 0$, alors $M = bE_{2,2}$ donc rang $(M(a,b,c)) = 1$ et on trouve comme avant $\mathsf{Ker}(M(a,b,c)) = \mathsf{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$ et Im $(M(a,b,c)) = \mathsf{Vect}((0,1,0))$.

• Si $b \neq 0$ et $a = c \neq 0$, les colonnes 1 et 2 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc rang $(M(a,b,c)) = 2$ et $\mathsf{Ker}(M(a,b,c)) = \mathsf{Vect}((1,0,-1))$ et Im $(M(a,b,c)) = \mathsf{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$.

• Si $b \neq 0$ et $a = -c \neq 0$, les colonnes 1 et 2 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc rang $(M(a,b,c)) = 2$ et $\mathsf{Ker}(M(a,b,c)) = \mathsf{Vect}((1,0,1))$ et Im $(M(a,b,c)) = \mathsf{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$.

c. $M(a,b,c)$ est symétrique réelle donc diagonalisable, et même orthodiagonalisable par le théorème spectral.

d. Les conditions imposées à a,b,c montrent que $a-c \neq a+c$, que $a+c \neq b$ et que $a-c \neq b$. La matrice $M(a,b,c)$ admet donc trois valeurs propres distinctes donc les sous-espaces propres associés sont des droites. Comme $M(a,a,c) - (a+c)I_3 = \begin{pmatrix} -c & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}$, on constate que $(M(a,a,c)-(a+c)I_3)v_1 = 0$ donc que $M(a,a,c)v_1 = (a+c)v_1$ avec $v_1 = (1,0,1)$. Il est clair que $M(a,a,c)v_2 = bv_2$ pour $v_2 = (0,1,0)$. De même, on $M(a,a,c)v_3 = (a-c)v_3$ avec $v_3 = (1,0,-1)$. La famille $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ est libre car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de cette famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique est donc inversible. Par formule de changement de base, on a $M(a,a,c) = PDP^{-1}$ avec $D = \mathsf{diag}(a+c,a,a-c)$.

En général, pour a,b,c quelconques, avec les mêmes vecteurs v_1, v_2 et v_3 et la même matrice P, on a $M(a,b,c)v_1 = (a+c)v_1$, $M(a,b,c)v_2 = bv_2$ et $M(a,b,c)v_3 = (a-c)v_3$ donc, par la formule de changement de base, on a $M(a,b,c) = PDP^{-1}$ en notant $D = \mathsf{diag}(a+c,b,a-c)$. On pourrait imposer P orthogonale grâce au théorème spectral en prenant plutôt $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ mais ce n'est pas demandé.

12.113 **a.** Soit $(x,y) \in E^2$, en associant à x et à y les vecteurs colonnes contenant leurs coordonnées dans la base canonique X et Y, puisque cette base canonique est orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, on a $(u(x)|y) = (AX|Y) = (AX)^TY = (X^TA^T)Y = X^T(A^TY) = (X|A^TY) = (x|w(y))$.

b. Soit F est un sous-espace stable par u et $y \in F^\perp$. Pour tout vecteur $x \in E$, on a $(x|w(y)) = (u(x)|y)$ d'après **a.** donc $(x|w(y)) = 0$ car $y \in F^\perp$ et $u(x) \in F$ par stabilité de F par u. Ainsi, par définition, $u(y) \in F^\perp$. On vient d'établir que $F^\perp$ est stable par w.

c. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -X \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ en effectuant $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ et par linéarité par rapport à la dernière colonne. On effectue maintenant l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 + L_3$ et on obtient $\chi_A = X \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = X^2(X-1) = \chi_{A^T}$ donc $\mathsf{Sp}(A) = \mathsf{Sp}(A^T) = \{0,1\}$.

Comme rang(A) = rang(A^T) = 2 car les deux premières colonnes de A forment une famille libre, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A^T)) = 2$ par la formule du rang donc les ordres de multiplicité géométrique et algébrique de 0 ne sont pas égaux pour A et A^T qui ne sont donc pas diagonalisables.

d. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Traitons quatre cas :

$\underline{\dim(F) = 0}$ on a clairement $F = \{0\}$.

$\underline{\dim(F) = 1}$ F est une droite stable par u donc, d'après le cours, elle est engendrée par un vecteur propre de u. On résout $AX = 0$ et on trouve $\mathrm{Ker}(u) = E_0(u) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 0, -1)$. On résout $AX = X$ et on a $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = E_1(u) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (0, 1, 1)$.

$\underline{\dim(F) = 2}$ F est un plan stable par u donc, avec **b.**, $F^\perp$ et une droite stable par w, engendrée par un vecteur propre de w. On résout $A^TX = 0$ et on trouve $\mathrm{Ker}(w) = E_0(w) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1, -1, 1)$. On résout $A^TX = X$ et $\mathrm{Ker}(w - \mathrm{id}_E) = E_1(w) = \mathrm{Vect}(v_4)$ avec $v_4 = (1, 0, 1)$.

$\underline{\dim(F) = 3}$ on a clairement $F = E = \mathbb{R}^3$.

En conclusion, les seuls sous-espaces de E stables par u sont $\{0\}$, les droites $D_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $D_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$, les plans $P_1 = (\mathrm{Vect}(v_3))^\perp$ et $P_2 = (\mathrm{Vect}(v_4))^\perp$ et $\mathbb{R}^3$.

12.114 **a.** Soit $X \in \mathbb{R}^n$, en se rappelant que si $U = (u) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $MU = uM$, on a l'équivalence $X \in \mathrm{Ker}(M) \iff (AB^T + BA^T)X = 0 \iff AB^TX + BA^TX = 0 \iff (B|X)A + (A|X)B = 0 \iff (A|X) = (B|X) = 0$ car $A^TX = (A|X)$, $B^TX = (B|X)$ (il est implicite que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique) et que (A, B) est libre. Ainsi, $\mathrm{Ker}(M) = (\mathrm{Vect}(A))^\perp \cap (\mathrm{Vect}(B))^\perp = \mathrm{Vect}(A, B)^\perp$.

b. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = n - \dim(\mathrm{Vect}(A, B)) = n - 2$ car (A, B) est libre. Par la formule du rang, rang$(M) = n - \dim(\mathrm{Ker}(M)) = 2$. Soit $Y \in \mathrm{Im}(M)$, $\exists X \in \mathbb{R}^n$, $Y = MX$ et $Y = (B|X)A + (A|X)B \in \mathrm{Vect}(A, B)$ donc $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Vect}(A, B)$. Par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(A, B)$.

c. Comme $M^T = (AB^T + BA^T)^T = BA^T + AB^T = M$ donc M est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Mieux, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M = PDP^T$.

d. Comme $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(A, B)^\perp \oplus \mathrm{Vect}(A, B)$, en prenant $(V_1, \cdots, V_{n-2})$ une base de $\mathrm{Ker}(M)$, la famille $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_{n-2}, A, B)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, comme $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$ sont stables par M, on a $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 0_{n-2,n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & N \end{pmatrix} = M'$ (par blocs) qui représente la matrice de l'endomorphisme f canoniquement associé à M dans la base $\mathcal{B}$. Comme on a $MA = (AB^T + BA^T)A = (A|B)A + ||A||^2B$ et $MB = (AB^T + BA^T)B = ||B||^2A + (A|B)B$, on connaît $N = \begin{pmatrix} (A|B) & ||A||^2 \\ ||B||^2 & (A|B) \end{pmatrix}$ qui représente la matrice dans (A, B) de l'application induite par f dans $\mathrm{Im}(M)$. Ainsi, $\chi_M = \chi_{M'} = X^{n-2}\chi_N = X^{n-2}(X^2 - 2(A|B)X + (A|B)^2 - ||A||^2\,||B||^2) = X^{n-2}\big((X - (A|B))^2 - (||A||\,||B||)^2\big)$. Par identité remarquable, on trouve donc $\chi_M = X^{n-2}(X - (A|B) + ||A||\,||B||)(X - (A|B) - ||A||\,||B||)$ ce qui montre que $\mathrm{Sp}(M) = \{0, (A|B) + ||A||\,||B||, (A|B) - ||A||\,||B||\}$. Ces deux dernières valeurs propres vérifient $(A|B) + ||A||\,||B|| > 0$ et $(A|B) - ||A||\,||B|| < 0$ par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et son cas d'égalité.

12.115 **a.** Soit $(x, y) \in E^2$ et X, Y les vecteurs colonnes associés des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}_0$. Comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale, on a $\big(p(x)|y\big) = (AX)^TY = X^TA^TY = X^T(A^TY) = \big(x|q(y)\big)$.

b. Par définition, $\mathrm{Tr}\ (q \circ p)$ est la trace de la matrice de $q \circ p$ dans n'importe quelle base, choisissons la base $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q \circ p) = \big((v_i|q \circ p(v_j))\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ce qui montre que $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (B) = \sum\limits_{k=1}^{n} (v_k|q \circ p(v_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2$ avec la question **a.** avec $x = v_k$ et $y = p(v_k)$.

c. Si p est un projecteur orthogonal, Im (p) et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E donc il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ de E telle que $(v_1, \cdots, v_r)$ (resp. $(v_{r+1}, \cdots, v_n)$) soit une base orthonormée de Im (p) (resp. $\mathrm{Ker}(p)$). Si on applique **b.** avec $\mathcal{B}$, on a $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2 = r$ car $\forall k \in [\![1; r]\!],\ p(v_k) = v_k$ car Im $(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $\forall k \in [\![r+1; n]\!],\ p(v_k) = 0_E$. Or, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Tr}\ (p) = \mathrm{rang}\,(p) = r$ et on a bien $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p)$.

d. Dans le cas général, on prend une base orthonormée $(v_1, \cdots, v_r)$ de Im (p) qu'on complète en une base orthonormale $(v_1, \cdots, v_n)$ de E (c'est-à-dire que $(v_{r++1}, \cdots, v_n)$ est une base orthonormale de $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$). D'après **b.**, $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2 = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2$ car, comme avant, $\forall k \in [\![1; r]\!],\ p(v_k) = v_k$. Comme $\sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 \geqslant 0$ et qu'on a encore $\mathrm{Tr}\ (p) = r$, on a bien $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 \geqslant r = \mathrm{Tr}\ (p)$.

e. Avec une base orthonormée $\mathcal{B}$ choisie comme dans **d.**, comme $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2$, on a l'équivalence $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p) \iff \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 = 0 \iff (\forall k \in [\![r+1; n]\!],\ p(v_k) = 0_E)$. Cette condition revient à $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}\mathrm{Vect}(v_{r+1}, \cdots, v_n) \subset \mathrm{Ker}(p)$ ou encore, par égalité des dimensions car $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des supplémentaires de Im (p), à $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp} = \mathrm{Ker}(p)$.

Ainsi, on a bien l'équivalence $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p) \iff p$ est orthogonal.

12.116 On vérifie rapidement que l'application $(A, B) \mapsto \int_0^1 A(t)B(t)dt$ définit bien un produit scalaire sur E. Déjà AB est continue sur le segment $[0; 1]$ donc l'intégrale est bien définie. La symétrie, la positivité et la bilinéarité sont claires. Soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$, alors $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$ et la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue sur $[0; 1]$ donc $\forall t \in [0; 1],\ P(t)^2 = 0$ donc $P(t) = 0$ et P admet une infinité de racines donc $P = 0$. $(\,.\,|\,.\,)$ est donc bien un produit scalaire sur E.

a. Soit $P \in E$, comme $t \mapsto (x+t)^n P(t)$ est continue sur le segment $[0; 1]$, $u(P)(x)$ est bien défini et, avec le binôme de Newton, $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \int_0^1 \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k t^{n-k} \Big) P(t)dt$ donc, par linéarité de l'intégrale, avec les mêmes arguments, $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(\binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} P(t)dt \Big) x^k$, d'où $u(P) \in E$. De plus, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u(\lambda P + Q) = \int_0^1 (x+t)^n (\lambda P(t) + Q(t))dt = \lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt + \int_0^1 (x+t)^n Q(t)dt = \lambda u(P) + u(Q)$ par linéarité de l'intégrale donc u est linéaire : u est donc un endomorphisme de E.

b. Pour $(P, Q) \in E^2$, avec l'expression de **b.**, $(u(P)|Q) = \int_0^1 \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \Big(\binom{n}{k} \int_0^1 u^{n-k} P(u)du \Big) t^k \Big) Q(t)dt$ donc, par linéarité de l'intégrale, on a $(u(P)|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X^{n-k}|P) \int_0^1 t^k Q(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X^{n-k}|P)(X^k|Q)$. En effectuant le changement d'indice $j = n - k$, on a $(u(P)|Q) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (X^j|P)(X^{n-j}|Q) = (u(Q)|P)$ avec le calcul précédent car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ainsi, $(u(P)|Q) = (P|u(Q))$ par symétrie donc u est autoadjoint.

c. Comme u est un endomorphisme en dimension finie, u est bijectif si et seulement si u est injectif. Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 (x+t)^n P(t)dt = 0$. Soit $x_0, \cdots, x_n$ des réels distincts, considérons la famille $\mathcal{B} = ((X+x_0)^n, \cdots, (X+x_n)^n)$. La famille $\mathcal{B}$ est de cardinal $n+1$, soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique inversée $\mathcal{B}_0 = (X^n, X^{n-1}, \cdots, X, 1)$, comme $(X+x_j)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_j^i X^{n-i}$, on a $M = \left(\binom{n}{i} x_j^i\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui est quasiment une matrice de VANDERMONDE. Plus précisément, en utilisant la multilinéarité du déterminant sur les $n+1$ lignes, on a $\det(M) = \left(\prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\right) \times \prod_{0 \leqslant j < j' \leqslant n} (x_{j'} - x_j) \neq 0$ car on a choisi les $x_0, \cdots, x_n$ distincts. Ainsi, comme M est inversible, $\mathcal{B}$ est une base de E et il existe donc des scalaires $a_0, \cdots, a_n$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+x_k)^n$. Alors, $P^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+x_k)^n P$ donc, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 \big(P(t)\big)^2 dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 (x_k+t)^n P(t) dt = \sum_{k=0}^{n} a_k u(P)(x_k) = 0$. Mais comme P^2 est continue et positive sur $[0;1]$, d'après le cours, $\forall t \in [0;1]$, $P(t)^2 = 0$ donc $P(t) = 0$. Le polynôme P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Comme $\mathrm{Ker}(P) = \{0\}$, on a u injectif donc u bijectif.

12.117 D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^T$. Ainsi, $S^2 = PD^2P^T$ donc, comme S^2 et D^2 sont semblables (et même orthosemblables), on a $\mathrm{Tr}\,(S^2) = \mathrm{Tr}\,(D^2)$. En notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité, ces valeurs propres se trouvent sur la diagonale de D donc $\mathrm{Tr}\,(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.
Comme S est symétrique, $S^2 = S^TS$ et on a classiquement $\mathrm{Tr}\,(S^2) = \mathrm{Tr}\,(S^TS) = ||S||^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j}^2$ en notant $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On isole les termes diagonaux pour avoir $||S||^2 = \sum_{k=1}^{n} s_{k,k}^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} s_{i,j}^2$ (car S est symétrique). Par hypothèse, les valeurs propres se trouvent sur la diagonale de S donc $\sum_{k=1}^{n} s_{k,k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ et il ne reste dans $\mathrm{Tr}\,(S^2) = \mathrm{Tr}\,(D^2)$, après simplification, que $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} s_{i,j}^2$. Or une somme de termes positifs nest nulle que si tous ses termes sont nuls donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i < j \Longrightarrow s_{i,j} = 0$ et S est bien diagonale.

12.118 **a.** Soit p la projection orthogonale sur le sous-espace $F \subset E$. Soit $(x,y) \in E^2$, on décompose ces deux vecteurs en $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F^2$ et $(x_2, y_2) \in (F^\perp)^2$. Alors p est symétrique car on a $(p(x)|y) = (x_1|y_1+y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) = (x_1|y_1) = (x_1|y_1) + (x_2|y_1) = (x_1+x_2|y_1) = (x|p(y))$.

b. p et q étant des projecteurs orthogonaux, ils sont symétriques d'après **a.** donc par, par composition, $p \circ q \circ p$ est symétrique. En effet, si $(x,y) \in E^2$, $(p \circ q \circ p(x)|y) = (q \circ p(x)|p(y)) = (p(x)|q \circ p(y)) = (x|p \circ q \circ p(y))$ car, successivement, p est symétrique, q est symétrique, p est symétrique.

c. Comme $\mathrm{Im}\,(q)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des sous-espaces E, on sait que $(\mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Ker}(q))^\perp = (\mathrm{Im}\,(p))^\perp \cap (\mathrm{Ker}(q))^\perp$. Or p (même chose pour q) est un projecteur orthogonal donc $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = E_1(p) \perp E_0(p) = \mathrm{Ker}(p)$. On conclut par égalité des dimensions que $\big(\mathrm{Im}\,(p)\big)^\perp = \mathrm{Ker}(p)$. De même $(\mathrm{Ker}(q))^\perp = \mathrm{Im}\,(q)$.
Ainsi : $(\mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Ker}(q))^\perp = \mathrm{Im}\,(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.

d. D'après la question précédente, $E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(q) + (\text{Im}(q) \cap \text{Ker}(p))$, ces sous-espaces ne sont pas forcément supplémentaires car on ne sait pas si $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0_E\}$. L'endomorphisme $u = p \circ q \circ p$ est symétrique donc diagonalisable d'après le théorème spectral. On va étudier $p \circ q$ sur chacun des trois sous-espaces précédents.

- Comme $\text{Im}(p)$ est stable par $u = p \circ (q \circ p)$, l'endomorphisme induit par u dans $\text{Im}(p)$ est aussi symétrique donc diagonalisable et il existe donc une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_r)$ de $\text{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de u (associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$). Or $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $p(e_k) = e_k$ donc $p \circ q \circ p(e_k) = \lambda_k e_k$ devient $p \circ q(e_k) = \lambda_k e_k$ et e_k est aussi un vecteur propre de $p \circ q$.
- On complète la famille libre $(e_1, \cdots, e_r)$ de $\text{Im}(p) + \text{Ker}(q)$ en une base $(e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_m)$ de $\text{Im}(p) + \text{Ker}(q)$ avec des vecteurs $e_{r+1}, \cdots, e_m$ de $\text{Ker}(q)$ (théorème de la base extraite). Or $\forall k \in [\![r + 1; m]\!]$, $q(e_k) = 0_E$ donc $p \circ q(e_k) = 0_E$ et e_k est aussi un vecteur propre de $p \circ q$.
- Enfin, on complète la famille libre $(e_1, \cdots, e_m)$ de E en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$ de E en la complétant avec une base de $(\text{Im}(p) + \text{Ker}(q))^{\perp} = \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(q)$. Or $\forall k \in [\![m + 1; n]\!]$, on a $p \circ q(e_k) = p(q(e_k)) = p(e_k) = 0_E$ donc e_k est à nouveau un vecteur propre de $p \circ q$.

Au final on obtient une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de $p \circ q$ donc $p \circ q$ est diagonalisable.

En général, si v est un projecteur orthogonal sur F de E, on a $\forall x \in E$, $0 \leqslant (u(x)|x) \leqslant ||x||^2$. En effet, avec $x \in E$ qu'on écrit $x = y+z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, on a $(u(x)|x) = (y|y+z) = ||y||^2+(y|z) = ||y||^2 = ||x||^2-||z||^2$ avec PYTHAGORE. Ainsi $0 \leqslant ||y||^2 = (u(x)|x) = ||x||^2 - ||z||^2 \leqslant ||x||^2$ donc $0 \leqslant (u(x)|x) \leqslant ||x||^2$.

Traitons maintenant deux cas :

- Soit $k \in [\![r + 1; n]\!]$, alors $p \circ q(e_k) = 0_E$ donc e_k est associé à la valeur propre 0.
- Soit $k \in [\![1; r]\!]$, $p \circ q(e_k) = \lambda_k e_k$ donc $(p \circ q(e_k)|e_k) = \lambda_k ||e_k||^2$. Mais, avec l'inégalité précédente, comme p est symétrique et que $p(e_k) = e_k$, on a $0 \leqslant (p \circ q(e_k)|e_k) = (q(e_k)|p(e_k)) = (q(e_k)|e_k) \leqslant ||e_k||^2$. Comme $||e_k||^2 > 0$ car $e_k \neq 0_E$, on en déduit que $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$.

Par conséquent, toutes les valeurs propres de $p \circ q$ sont dans l'intervalle $[0; 1]$.

12.119 **a.** Après calculs, on a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -3 & 0 \\ -3 & X+2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3)(X+4)$ donc $\text{Sp}(A) = \{-4, 1, 3\}$.

Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\mathbb{K}^3 = E_1(A) \oplus E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$. On peut aussi dire que A est symétrique et réelle donc, d'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc a fortiori dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toujours avec le théorème spectral, les sous-espaces propres de A sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

On résout les trois systèmes $AX = X$, $AX = 3X$ et $AX = -4X$ avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ pour trouver les trois droites propres $E_1(A) = \text{Vect}(v_1)$, $E_3(A) = \text{Vect}(v_2)$ et $E_{-4}(A) = \text{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (3, 2, -1)$ et $v_3 = (3, -5, -1)$ (on constate que ces vecteurs sont bien orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$). On a donc diagonalisé A en $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ par formule de changement de base.

Méthode 1: $F = \{0\}$ et $F = \mathbb{K}^3$ sont clairement des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A et il n'y a pas d'autres sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ de dimension 0 ou 3. On sait que les droites stables sont celles qui sont engendrées par des vecteurs donc il y a trois droites stables : $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Comme, A est symétrique, les orthogonaux des sous-espaces stables par A le sont aussi. Ainsi, il existe exactement trois plans stables qui sont $F = E_1(A_F)^{\perp}$ ou $F = E_3(A_F)^{\perp}$ ou $F = E_{-4}(A_F)^{\perp}$, c'est-à-dire $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$, $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ ou $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$.

Méthode 2: Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}^3$ stable par A, alors A induit sur F un endomorphisme qu'on sait être diagonalisable d'après le cours. On sait aussi que χ_{A_F} divise χ_A. Traitons alors plusieurs cas :

- si $\underline{\dim(F) = 0}$, alors $F = \{0\}$.
- si $\underline{\dim(F) = 1}$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = X-1$ ou $\chi_{A_F} = X-3$ ou $\chi_{A_F} = X+4$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 1$. Comme A_F est diagonalisable, F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Mais, par exemple si $\chi_{A_F} = X - 1$, 1 est valeur propre de A_F donc $v_1 \in F$ et on a $F = \mathrm{Vect}(v_1) = E_1(A)$. Ainsi, on a $F = E_1(A)$ ou $F = E_3(A)$ ou $F = E_{-4}(A)$.
- si $\underline{\dim(F) = 2}$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = (X-1)(X-3)$ ou $\chi_{A_F} = (X-1)(X+4)$ ou $\chi_{A_F} = (X-3)(X+4)$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 2$. A_F est diagonalisable donc F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$ (car v_1 et v_2 sont forcément dans F puisque 1 et 3 sont valeurs propres de A_F) ou $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ (idem v_1 et v_3 sont dans F) ou $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$.
- si $\underline{\dim(F) = 3}$, alors $F = \mathbb{K}^3$.

La méthode 1 utilise la propriété de symétrie de A (mais seulement dans $\mathbb{R}^3$) alors que la méthode 2 est plus générale pour trouver les sous-espaces stables par un endomorphisme (ou une matrice).

Réciproquement, ces huit sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ sont stables par A car ils possèdent tous une base de vecteurs propres de A. Il existe donc exactement 8 sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ stables par A.

b. La matrice 0 appartient à $C(A)$ donc $C(A) \neq \emptyset$ et $C(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $(M, N) \in C(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$ donc $\lambda M + N \in C(A)$. Ainsi, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel.

De plus, $A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$ par associativité du produit matriciel donc $C(A)$ est aussi stable par produit. Comme $I_3 \in C(A)$, $C(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Méthode 1 : Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $N = P^{-1}MP$, alors $M \in C(A) \Longleftrightarrow AM = MA$ ce qui donne en remplaçant $M \in C(A) \Longleftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \Longleftrightarrow DN = ND$. Si on effectue les calculs ND et DN et qu'on identifie, on trouve sans peine que $M \in C(A) \Longleftrightarrow N$ est diagonale.

Méthode 2 : Si $M \in C(A)$, les sous-espaces propres de A sont stables par M, ce qui prouve que l'on a $Mv_1 \in \mathrm{Vect}(v_1)$, $Mv_2 \in \mathrm{Vect}(v_2)$ et $Mv_3 \in \mathrm{Vect}(v_3)$ donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $Mv_1 = \alpha_1 v_1$, $Mv_2 = \alpha_2 v_2$ et $Mv_3 = \alpha_3 v_3$. Ainsi, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M et que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, comme $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$, on a $M = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Comme $\varphi : U \mapsto PUP^{-1}$ est clairement un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et que la dimension du sous-espace des matrices diagonales vaut 3, alors $\dim(C(A)) = 3$.

c. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ ce qui est impossible car $-4 < 0$ ne peut être le carré d'un réel. Par contre, pour le cas complexe, si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ et, en écrivant $D' = \mathrm{diag}(\alpha\ \beta\ \gamma)$, $D'^2 = D$ implique $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 3$ et $\gamma^2 = -4$ et on a donc 8 matrices D' qui conviennent, ce sont les $D' = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm 2i)$. , il existe exactement huit matrices complexes qui vérifient $M^2 = A$, ce sont les matrices $M = P\mathrm{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm 2i)P^{-1}$.

12.120 **a.** ($\Longrightarrow$) Si A est positive, soit λ une valeur propre réelle de A, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$. Ainsi, $X^TAX = \lambda X^TX = \lambda||X||^2$ donc $\lambda = \dfrac{X^TAX}{||X||^2} \geqslant 0$ car A est positive. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^T$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A comptées avec leur ordre de multiplicité. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, on a $\Delta^2 = D$ donc $A = P\Delta^2P^T = (P\Delta)(\Delta P^T) = B^TB$ si $B = \Delta P^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

($\Longleftarrow$) S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^TB$, alors $X^TAX = X^TB^TBX = (BX)^T(BX) = ||BX||^2 \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc A est symétrique positive.

Par double implication, on a montré que A positive $\Longleftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = B^TB$.

b. ($\Longrightarrow$) Si A est définie positive, soit λ une valeur propre réelle de A, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$. Ainsi, $X^TAX = \lambda X^TX = \lambda||X||^2$ donc $\lambda = \dfrac{X^TAX}{||X||^2} > 0$ car A est définie positive. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^T$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres strictement positives de A comptées avec leur ordre de multiplicité. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, on a $\Delta^2 = D$ donc $A = P\Delta^2P^T = (P\Delta)(\Delta P^T) = B^TB$ si $B = \Delta P^T \in GL_n(\mathbb{R})$ car P et Δ sont des matrices inversibles.

($\Longleftarrow$) S'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^TB$, alors $X^TAX = X^TB^TBX = (BX)^T(BX) = ||BX||^2 > 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car $BX \neq 0$ puisque $X \neq 0$ et B inversible donc A est symétrique définie positive.

Par double implication, on a montré que A définie positive $\Longleftrightarrow \exists B \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = B^TB$.

c. Si A est définie positive, avec une matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^TB$ d'après la question **b.**, on a $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ N(X) = \sqrt{X^TB^TBX} = \sqrt{||BX||^2} = ||BX||$.

<u>Séparation</u> : Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $N(X) = 0$, alors $||BX|| = 0$ donc $BX = 0$ car $||\,.\,||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et on en déduit que $X = 0$ car B est inversible.

<u>Homogénéité</u> : Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $N(\lambda X) = ||B \times (\lambda X)|| = ||\lambda BX|| = |\lambda|\,||BX|| = |\lambda|\,N(X)$ car $||\,.\,||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Inégalité triangulaire</u> : Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, alors $N(X+Y) = ||B \times (X+Y)|| = ||BX + BY|| \leqslant ||BX|| + ||BY||$ donc $N(X+Y) \leqslant N(X) + N(Y)$ car $||\,.\,||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, N est une norme sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Plus précisément, cette norme N est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\varphi : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X, Y) = X^TAY = X^TB^TBY = (BX)^T(BY) = (BX|BY)$ (vérification classique).

12.121 **a.** Analyse : supposons qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $M \sim S$ alors, par définition, il existe $Q \in O(n)$ telle que $M = QS$. Ainsi, $M^T = S^T Q^T = SQ^T$ donc $M^T M = SQ^T QS = SI_n S = S^2$ car $Q^T Q = I_n$. De plus, $Q = MS^{-1}$ car S est inversible puisque M et Q le sont.

Synthèse : la matrice $M^T M$ est symétrique car $(M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M$ donc, d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M^T M = PDP^T$. D contient sur sa diagonale les valeurs propres de $M^T M$ comptées avec leur ordre de multiplicité. Or, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $M^T M$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^T MX = \lambda X$ donc $X^T M^T MX = \lambda X^T X$ d'où $||MX||^2 = \lambda ||X||^2$ ce qui montre que $\lambda = \dfrac{||MX||^2}{||X||^2} > 0$ car $MX \neq 0$ puisque M est inversible et $X \neq 0$. Ainsi, $Sp(M^T M) \subset \mathbb{R}_+^*$ et, si on note $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, on peut définir $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ qui vérifie $\Delta^2 = D$. Posons $S = P\Delta P^T$, alors $S^T = (P^T)^T \Delta^T P^T = P\Delta P^T = S$ donc S est symétrique et ses valeurs propres sont $\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$ qui sont strictement positives donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et on a bien $S^2 = P\Delta^2 P^T = PDP^T = M^T M$. Si on pose $Q = MS^{-1}$, on a $Q^T Q = (S^{-1})^T M^T M S^{-1} = (S^T)^{-1}(M^T M)S^{-1} = S^{-1}S^2 S^{-1} = I_n$ donc $Q \in O(n)$ et on a bien construit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Q \in O(n)$ telles que $M = QS$. Voilà pour l'existence !

b. Soit S et S' des matrices symétriques définies positives telles que $M \sim S$ et $M \sim S'$, alors il existe $(Q, Q') \in (O(n))^2$ tel que $M = QS = Q'S'$. Alors $M^T M = S^T Q^T QS = S^2$ et $M^T M = S'^T Q'^T Q'S' = S'^2$.

Méthode 1 : S et S' commutent avec $M^T M$ car $S(M^T M) = S \times S^2 = S^3 = S^2 \times S = (M^T M)S$ donc les sous-espaces propres de $M^T M$ sont stables par S et S'. Comme S et S' sont diagonalisables d'après le théorème spectral car symétriques réelles, leurs restrictions aux $E_{\lambda_k}(M^T M)$ le sont aussi. Mais toutes les valeurs propres δ de ces endomorphismes induits vérifient $\delta^2 = \lambda_k$ donc valent $\sqrt{\lambda_k}$ car $\delta > 0$ puisque $(S, S') \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$. Ceci montre que la restriction de S et de S' à $E_{\lambda_k}(M^T M)$ est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_k}$. Ainsi, les "endomorphismes" S, S' coïncident sur les sous-espaces $E_{\lambda_k}(M^T M)$. Comme $\mathbb{R}^n$ est la somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_k}(M^T M)$ car $M^T M$ est diagonalisable, on a $S = S'$.

Méthode 2 : on note ici $\mu_1, \cdots, \mu_r$ les valeurs propres distinctes et strictement positives de $M^T M$. Pour $k \in [\![1; r]\!]$, comme $M^T M - \mu_k I_n = S^2 - \mu_k I_n = (S - \sqrt{\mu_k}\, I_n)(S + \sqrt{\mu_k}\, I_n)$ et que $S + \sqrt{\mu_k}\, I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ car les valeurs propres de $S + \sqrt{\mu_k}\, I_n$ sont celles de S auxquelles on ajoute $\sqrt{\mu_k}$ donc elles sont strictement positives, on a $E_{\mu_k}(M^T M) = \mathrm{Ker}(M^T M - \mu_k I_n) = \mathrm{Ker}(S - \sqrt{\mu_k}\, I_n) = E_{\sqrt{\mu_k}}(S)$. Bien sûr, de même, on a $\forall k \in [\![1; r]\!],\ E_{\mu_k}(M^T M) = E_{\sqrt{\mu_k}}(S')$. La matrice $M^T M$ est diagonalisable d'après le théorème spectral et on a même $\mathbb{R}^n = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1 \leqslant k \leqslant r}} E_{\mu_k}(M^T M)$. Ainsi, pour un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ qu'on décompose $X = \sum\limits_{k=1}^{r} X_k$ avec $X_k \in E_{\mu_k}(M^T M)$, on a $SX = \sum\limits_{k=1}^{r} SX_k = \sum\limits_{k=1}^{r} \sqrt{\mu_k} X_k = \sum\limits_{k=1}^{r} S'X_k = S'X$ d'où $S = S'$. Voilà pour l'unicité !

Ainsi, si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists!(Q, S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}),\ M = QS$: c'est la décomposition polaire de M.

12.122 **a.** On a $f(v) - f(w) = (1 - y, 2 + x) - (1 - y', 2 + x') = (y' - y, x - x')$ pour $v = (x, y)$ et $w = (x', y')$ donc $||f(v) - f(w)|| = \sqrt{(y' - y)^2 + (x - x')^2} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = ||v - w||$.

Analyse : s'il existe $(u, g) \in \mathbb{R}^2 \times O(R^2)$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ f(v) = u + g(v)$, en prenant $v = (0, 0)$, on a $f(0, 0) = (1, 3) = u + g(0, 0) = u$ car g est linéaire donc $u = (1, 3)$. De plus, pour tout $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient $g(v) = g(x,y) = f(x,y) - (1,3) = (-y,x)$.

Synthèse : prenons $u = (1,2)$ et $g : (x,y) \mapsto (-y,x)$, alors $g \in O(\mathbb{R}^2)$ car la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vaut $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2)$. Comme $\det(A) = 1$, on a même $A \in SO(\mathbb{R}^2)$ et g est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ car $A = R_{\pi/2}$.

Ainsi, il existe un unique couple $(u,g) \in \mathbb{R}^2 \times O(\mathbb{R}^2)$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ f(v) = u + g(v)$, il s'agit du vecteur $u = (1,2)$ et de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $g : (x,y) \mapsto (-y,x)$.

Pour aller plus loin dans la description de f, cherchons un vecteur $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(v) = v$. Or $(1-y, 3+x) = (x,y) \iff (x = -1, y = 2)$ donc le point $v_0 = (-1,2)$ est l'unique point fixe de f. Et on a $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ f(v_0+v) = u + g(v_0+v) = u + g(v_0) + g(v) = f(v_0) + g(v) = v_0 + g(v)$ donc f est la rotation affine d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du point $v_0 = (-1,2)$.

b. Avec ces conditions, en prenant $x = 0_E$, on a $f(0_E) = u + g(0_E) = u$ car g est linéaire donc $u = f(0_E)$ et $\forall x \in E,\ g(x) = f(x) - u = f(x) - f(0_E)$.

c. (i) : soit $x \in E$, comme $u = f(0_E)$ et $g(x) = f(x) - f(0_E)$ d'après **a.**, on $f(x) = f(0_E) + f(x) - f(0_E) = u + g(x)$.
(ii) : pour un couple $(x,y) \in E^2$, d'après l'une des trois identités de polarisation, on a la relation suivante : $(g(x)|g(y)) = \frac{1}{2}\Big(||g(x)||^2 + ||g(y)||^2 - ||g(x)-g(y)||^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(||f(x)-f(0_E)||^2 + ||f(y)-f(0_E)||^2 - ||f(x)-f(y)||^2\Big)$.
Ainsi, $(g(x)|g(y)) = \frac{1}{2}\Big(||x-0_E||^2 + ||y-0_E||^2 - ||x-y||^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(||x||^2 + ||y||^2 - ||x-y||^2\Big) = (x|y)$ par hypothèse sur f et avec la même identité de polarisation.
(iii) Comme g conserve le produit scalaire, en prenant $x = y$ dans (ii), on obtient la relation $||g(x)||^2 = ||x||^2$ donc g conserve la norme ce qui, par définition, signifie que $g \in O(E)$.

12.123 **a.** Les matrices appartenant à $D_n(\mathbb{R})$ s'appellent les matrices à diagonale propre.
La matrice A étant triangulaire supérieure, on a $\chi_A = (X-1)^n$ donc $Sp(A) = \{1, \cdots, 1\}$ (1 répété n fois) donc $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Plus généralement, toute matrice triangulaire est dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Comme B est symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral et, comme rang $(B) = 1$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = n-1$ par la formule du rang donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$. La dernière valeur propre λ vérifie donc $\mathrm{Tr}\ (B) = 0 + \cdots + 0 + \lambda = \lambda$ donc $\lambda = n$ et $B \notin \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ car la diagonale de B ne contient pas $0, \cdots, 0, n$.

b. $\mathcal{D}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Dès que $n \geqslant 2$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par somme. En effet, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ alors que $A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ car $\chi_{A_2 - B_2} = X^2 + 1$ donc ses valeurs propres sont $\pm i$ alors que les deux termes diagonaux de $A_2 - B_2$ sont 0 et 0. On peut généraliser pour un entier $n \geqslant 3$ en prenant $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec les mêmes justifications.

c. Si M est symétrique, pour le produit scalaire canonique sur les matrices défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}\ (A^T B)$, on a $||M||^2 = \mathrm{Tr}\ (M^T M) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2$. Or, d'après le théorème spectral, on a $M = PDP^T$ avec P orthogonale et D diagonale contenant les valeurs propres de M (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Ainsi, il vient $||M||^2 = \text{Tr}(M^TM) = \text{Tr}(PD^2P^T) = \text{Tr}(D^2)$ car deux matrices semblables ont même trace. Or $\text{Tr}(D^2) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}^2$ puisque $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ce qui donne la relation $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}^2$ (1).

En simplifiant les termes dans (1), on obtient $\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} m_{i,j}^2 = 0$ et comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow m_{i,j} = 0$ et enfin M diagonale.

Ainsi, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n = D_n$ (les matrices diagonales) car réciproquement, les matrices diagonales (qui sont donc triangulaires) sont symétriques et à diagonale propre.

d. Si $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$, alors par hypothèse $\chi_M = \prod_{k=1}^{n}(X-0) = X^n$ car les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Par Cayley-Hamilton, $M^n = 0$ donc M est nilpotente. Comme M^2 est symétrique donc diagonalisable et qu'elle est aussi nilpotente car $(M^2)^n = M^{2n} = 0$, elle est forcément nulle car elle est semblable à une matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. Ainsi $M^2 = 0 = -M^TM$ donc $M^TM = 0$ ce qui donne $||M||^2 = \text{Tr}(M^TM) = 0$ donc $M = 0$. Par conséquent $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n = \{0\}$.

12.124 **a.** La matrice J_n est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

b. On a clairement $\text{rang}(J_n) = 1$ donc, avec la formule du rang, on a $\dim(\text{Ker}(J_n)) = n-1 > 0$ et 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$ d'après le cours ce qui montre que $\chi_{J_n} = X^{n-1}(X-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme on sait qu'on a aussi $\chi_{J_n} = X^n - \text{Tr}(J_n)X^{n-1} + \cdots$, on a $\lambda = \text{Tr}(J_n) = n$ en identifiant. Ainsi, $E_0(J_n)$ est de dimension $n-1$ et $E_n(J_n)$ de dimension 1.

En notant $(e_1,\cdots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, il est clair que les vecteurs $v_k = e_k - e_n$ sont des vecteurs du noyau de J_n pour $k \in [\![1;n-1]\!]$ car $C_k = C_n$ dans J_n et que la famille $(v_1,\cdots,v_{n-1})$ est libre donc $E_0(J_n) = \text{Ker}(J_n) = \text{Vect}(v_1,\cdots,v_{n-1})$. De plus, le vecteur $w = e_1 + \cdots, e_n$ vérifie $J_nv_n = nv_n$ donc $E_n(J_n) = \text{Vect}(v_n)$. Ainsi, $\mathcal{B} = (v_1,\cdots,v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ car $\mathbb{R}^n = E_0(J_n) \oplus E_n(J_n)$ et, en notant P la matrice passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a $J_n = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0,\cdots,0,n)$. En version développée, la matrice P vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

12.6 Officiel de la Taupe

12.125 Calcul classique avec les coordonnées des vecteurs dans une base orthonormée directe.

Par la formule du double produit vectoriel que l'on vient d'établir et par la définition du produit mixte, on transforme : $M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}) \wedge (\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{DM}) = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{DM}]\,\overrightarrow{CM} - [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}]\,\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{0}$.

- Si $M \in (AB) \cup (CD)$: $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{0}$ donc $M \in \mathcal{P}$.
- Réciproquement, si $M \in \mathcal{P}$:

Méthode 1 : si $M \notin (AB) \cup (CD)$, les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{DM}$ sont colinéaires or ce sont des vecteurs normaux aux plans (ABM) et (CDM) donc ces plans sont égaux (car ils contiennent M donc ils ne sont pas uniquement parallèles) ce qui contredit l'hypothèse.

Méthode 2 : en notant $\alpha = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{DM}]$ et $\beta = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}]$, on a $\alpha\overrightarrow{CM} + \beta\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{0}$ d'après ce qui précède et on distingue 4 cas :

• Si $\alpha = \beta = 0$ donc $M \in (ABD) \cap (ABC) = (AB)$ par hypothèse (car le fait que les 4 points A, B, C, D sont non coplanaires implique que les plans (ABD) et (ABC) sont non confondus).
• Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ alors $\alpha\overrightarrow{CM} + \beta\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{0}$ donc $M \in (CD)$ car $\overrightarrow{CM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$ $(\alpha + \beta \neq 1)$.
• Si $\alpha = 0 \neq \beta$ alors $\beta\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{0}$ donc $M = D \in (CD)$.
• Si $\beta = 0 \neq \alpha$ alors $\alpha\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ et $M = C \in (CD)$.

12.126 M est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral.

• Si rang $(M) = 0$, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (0, \cdots, 0)$.
• Si rang $(M) = 1$, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$, $\alpha_n \neq 0$: $E_0(M) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})$, $E_{\alpha_n}(M) = \mathrm{Vect}(e_n)$.
• Sinon, rang $(M) = 2$, notons λ_1 et λ_2 ses deux valeurs propres réelles non nulles. $\mathrm{Tr}\ (M) = \alpha_n = \lambda_1 + \lambda_2$.

Comme la diagonale de M^2 contient dans l'ordre $\alpha_1^2, \cdots, \alpha_{n-1}^2, \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2$, on a $\mathrm{Tr}\ (M^2) = \alpha_n^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2$.

Ainsi $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{2} = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2$. λ_1 et λ_2 sont les racines de $P = X^2 - \alpha_n X - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2$.

De toutes façons, pour avoir les sous-espaces propres, on aurait pu directement résoudre le système matriciel $MX = \lambda X$ où ${}^tX = (x_1\ \cdots\ x_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On trouve que $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $\lambda x_k = \alpha_k x_n$ et en remplaçant dans la dernière équation, on trouve $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2\right) + \alpha_n\lambda - \lambda^2\right)x_n = 0$ ce qui nous donne les valeurs propres.

En effet, si le terme dans la parenthèse est non nul alors $x_n = 0$ donc tous les x_k sont nuls d'après la relation $\lambda x_k = \alpha_k x_n$ car $\lambda \neq 0$. Si par contre, ce terme est nul (ce qui donne les deux valeurs l_1 et λ_2 par les formules usuelles, on a x_n quelconque et les $x_1, \cdots, x_{n-1}$ qui dépendent de x_n ; ceci est donc une droite propre associée à la valeur propre λ_j ($j = 1$ ou $j = 2$) et cette droite est engendrée par $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \lambda_1)$ en prenant $x_n = \lambda_1$ donc $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $\lambda x_k = \alpha_k x_n \Longrightarrow \forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $x_k = \alpha_k$ (idem pour λ_2).

12.127 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A qui est symétrique réelle donc diagonalisable.

$a_{i,j} = \cos(i\theta)\cos(j\theta) - \sin(i\theta)\sin(j\theta)$, le vecteur v_j dans la j-ième colonne de A s'écrit $v_j = \cos(j\theta)c - \sin(j\theta)s$ avec $c = \sum\limits_{i=1}^{n} \cos(i\theta)e_i$ et $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \sin(i\theta)e_i$. Par conséquent, rang $(A) \leqslant 2$ car Im $(f) \subset \mathrm{Vect}(c, s)$.
0 est donc racine d'ordre au moins $n - 2$ de χ_A et on cherche juste les deux dernières valeurs propres λ_1 et λ_2 réelles. On pourrait calculer $\mathrm{Tr}\ (A) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\mathrm{Tr}\ (A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ pour avoir λ_1 et λ_2.
Comme $\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}\,(f)^\perp$ car f est autoadjoint, il vaut mieux déterminer entièrement Im (f). Or $f(e_n) = c$ et $f(e_1) = \cos(\theta)c - \sin(\theta)s$ non colinéaire à c car $\sin(\theta) \neq 0$ car $n \geqslant 3$. Ainsi Im $(f) = \mathrm{Vect}(c, s) = P$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(c, s)^\perp$. Dans une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_{n-2}, c, s)$, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est la matrice de $f||_P$. D'où λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de B. Or :

$$f(c) = \sum_{j=1}^{n} \cos(j\theta)v_j = \Big(\sum_{j=1}^{n} \cos(j\theta)^2\Big)c + \Big(\sum_{j=1}^{n} \cos(j\theta)\sin(j\theta)\Big)s$$

et $\sum\limits_{j=1}^{n} \cos(j\theta)^2 = \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}(1 + \cos(2j\theta)) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} e^{2ij\theta}\Big)$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} \cos(j\theta)\sin(j\theta) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} e^{2ij\theta}\Big)$.
Or $e^{2i\theta} \neq 1$ et $e^{2in\theta} = 1$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} e^{2ij\theta} = e^{2i\theta}\dfrac{1 - e^{2in\theta}}{1 - e^{2it}}$ donc $\sum\limits_{j=1}^{n} \cos(j\theta)^2 = \frac{n}{2}$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} \cos(j\theta)\sin(j\theta) = 0$.
Ainsi $f(c) = \frac{n}{2}c$ et, de même, $f(s) = -\frac{n}{2}s$: les valeurs propres de A sont 0 ($n - 2$ fois) et $\frac{n}{2}$ et $-\frac{n}{2}$.
A est donc semblable à la matrice $\mathrm{diag}(0, \cdots, 0, \frac{n}{2}, -\frac{n}{2})$ donc $\det(A) = \Big(1 + \frac{n}{2}\Big)\Big(1 - \frac{n}{2}\Big) = 1 - \frac{n^2}{4}$.

12.128 **a.** Il est sous-entendu dans l'énoncé qu'on prend dans $\mathbb{R}^3$ la structure euclidienne orientée canonique, et que s est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice A est orthogonale en vérifiant calculatoirement que ${}^tAA = I_3$ ou parce les trois vecteurs colonnes sont unitaires étant donné que $2^2 + 2^2 + 1^1 = 4 + 4 + 1 = 9 = 3^2$ et que les colonnes sont orthogonales deux à deux puisque $-2-2+4=-2+4-2=4-2-2=0$. A est symétrique donc u est une symétrie car ${}^tAA = A^2 = I_3$ puisque $A = {}^tA$. Mais comme s est une isométrie car sa matrice A dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est orthogonale, s est une symétrie orthogonale. De plus, $\mathrm{Tr}\ (s) = \mathrm{Tr}\ (A)$ donc s est un demi-tour. On résout $AX=-X$ et on trouve que $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est le plan d'équation $x+y+z=0$. Comme l'axe $D = \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ de s est orthogonal à ce plan, le demi-tour s a pour axe la droite D engendrée le vecteur unitaire $n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ (pas besoin d'orienter l'axe d'un demi-tour car $-\pi \equiv \pi\ [2\pi]$).

b. Analyse : supposons que $r\circ s = s\circ r$. Comme on a $s\big(r(n)\big) = r(n)$ puisque $s(n)=n$, on en déduit que $r(n)\in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(n)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ r(n)=\lambda n$. Or $||r(n)|| = 1 = |\lambda|\,||n|| = |\lambda|$ car r conserve la norme d'où $\lambda=\pm 1$. De même $r\big(s(k)\big) = s(k)$ donc $s(k)\in \mathrm{Ker}(r-\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(k)$ d'où $s(k)=\pm k$.

• si $s(k)=k$, $k\in\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(n)$ donc, comme k et n sont colinéaires et unitaires, on a $k=\pm n$. On peut changer n en $-n$ sans rien changer aux conditions imposées (s est un demi-tour) et on a donc $k=n$.

• si $s(k)=-k$, $k\in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = D^{\perp}$ donc k et n sont orthogonaux. Deux arguments pour conclure :

- Comme $k\perp n$, on a $r(n)=-n$ car on ne peut pas avoir $r(n)=n$ donc $n\in\mathrm{Ker}(r+\mathrm{id}_E)$. Or si une base orthonormale directe $\mathcal{B}=(i,j,k)$, on a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ donc $\chi_u(r) = (X-1)(X^2-2\cos(\theta)X+1) = (X-1)(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$. Comme $-1\in\mathrm{Sp}(r)$, $\theta=\pi$.

- De plus, $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ si on pose $\mathcal{B}' = (k, n, k\wedge n)$ qui est aussi orthonormale directe, donc, après calculs, $RS = SR \iff \sin(\theta)=0$ ce qui impose, comme $\theta\in]0;2\pi[$, que $\theta=\pi$.

Synthèse : étudions les deux conditions nécessaires trouvées.

• Si $k=n$, alors dans la base $\mathcal{B}$ ci-dessus, on a $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ donc on a clairement $AB = BA = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ d'où $r' = r\circ s = s\circ r$ quelle que soit la valeur de θ et r' est la rotation autour de $\mathrm{Vect}(k)$ orienté par k et d'angle $\theta+\pi$.

• Si $k\perp n$ et $\theta=\pi$, alors $r\circ s$ est le demi-tour autour de l'axe engendré par $k\wedge n$. En effet, on peut le montrer matriciellement en écrivant comme ci-dessus les matrices de r et s dans la base $\mathcal{B}'$; ou on peut vérifier que

$$\begin{array}{rcccl} r\circ s(k) & = & r(s(k)) = r(-k) = -k = s(k) = s(r(k)) & = & s\circ r(k)\\ r\circ s(n) & = & r(s(n)) = r(n) = -n = -s(n) = s(-n) = s(r(n)) & = & s\circ r(n)\\ r\circ s(k\wedge n) & = & r(s(k\wedge n)) = r(-k\wedge n) = k\wedge n = -s(k\wedge n) = s(-k\wedge n) = s(r(k\wedge n)) & = & s\circ r(k\wedge n)\end{array}$$

donc les deux endomorphismes $r\circ s$ et $s\circ r$ sont égaux car ils coïncident sur la base $\mathcal{B}'$.

c. Si on impose $\mathrm{Tr}\ (r)=0$, r ne peut pas être un demi-tour dont la trace est toujours -1. Ainsi, si $\mathrm{Tr}\ (r)=0$, r est forcément une rotation (d'après la question **.**) autour de l'axe $\mathrm{Vect}(n)$ orienté par n et d'angle $\pm\dfrac{2\pi}{3}$ car $\mathrm{Tr}\ (r) = 1+2\cos(\theta)$ donc $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}$. Il y a donc deux solutions sachant que la réciproque d'une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est celle autour du même axe orienté d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$. Soit r la première d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. La matrice de r dans la base canonique est donc $M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ (par exemple) est la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et une base orthonormée directe dont le premier vecteur est n. Après calculs, on trouve $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est solution. La rotation $r' = r^{-1}$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ a pour matrice $M' = M^{-1} = {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique car $M \in SO(3)$.

12.129 Comme M est symétrique définie positive, ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (éventuellement répétées) sont toutes strictement positives et, d'après le théorème spectral, M est orthosemblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ d'où l'existence de $P \in O(n)$ telle que $M = PD{}^tP$.

Alors $f_n(x_1, \cdots, x_n) = {}^tXPD{}^tPX + 2{}^tCX = {}^tYDY + 2{}^tUY$ en posant $Y = {}^tPX$ et $U = {}^tPC$: cela revient à exprimer les vecteurs dans une base orthonormale de vecteurs propres de M.

En écrivant ${}^tY = (y_1 \ \cdots \ y_n)$ et ${}^tU = (u_1 \ \cdots \ u_n)$, $f_n(x_1, \cdots, x_n) = g_n(y_1, \cdots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} u_k y_k$. Le minimum de f_n sur $\mathbb{R}^n$ est aussi celui de g_n sur $\mathbb{R}^n$ car $X \mapsto {}^tPX$ est une isométrie (donc un automorphisme) de $\mathbb{R}^n$ car $P \in O(n)$. On peut écrire $g_n(y_1, \cdots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big(y_k + \frac{u_k}{\lambda_k}\Big)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k^2}{\lambda_k}$. Il est donc clair que $g_n(y_1, \cdots, y_n) \geqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k^2}{\lambda_k} = m$ et que cette valeur m de g_n n'est atteinte que si on impose $(y_1, \cdots, y_n) = \Big(-\frac{u_1}{\lambda_1}, \cdots, -\frac{u_n}{\lambda_n}\Big)$, c'est-à-dire $Y = -D^{-1}U$. Par conséquent, $\underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}}(f_n) = \underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}}(g_n) = m$ avec $m = -\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k^2}{\lambda_k} = g_n(-D^{-1}U) = f_n(-PD^{-1}{}^tPC) = f_n(-M^{-1}C) = {}^tC{}^t(M^{-1})MM^{-1}C - 2{}^tCM^{-1}C$ ce qui se simplifie car M est symétrique en $\underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}}(f_n) = m = -{}^tCM^{-1}C$.

• Soit $X \in \mathrm{Ker}(A+B)$, alors $(A+B)X = 0$ donc ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX = 0$ or on sait que ${}^tXAX \geqslant 0$ et ${}^tXBX \geqslant 0$ car A et B sont positives. Ceci impose ${}^tXAX = 0$ et ${}^tXBX = 0$ mais comme A et B sont définies positives, on $X = 0$ donc $\mathrm{Ker}(A+B) = \{0\}$ d'où l'inversibilité de $A+B$. Comme $A+B$ est symétrique et que ${}^tX(A+B)X > 0$ si $X \neq 0$, on peut conclure que $A+B$ est symétrique définie positive.

• Si $X+Y = Z$, on a ${}^tXAX + {}^tYBY = {}^tXAX + {}^t(Z-X)B(Z-X) = {}^tX(A+B)X - 2{}^tZBX + {}^tZBZ$. Comme $A+B$ est symétrique définie positive, en posant $M = A+B$ et $C = -BZ$, on a ${}^tXAX + {}^tYBY = {}^tXMX + 2{}^tCX + {}^tZBZ$ et on peut appliquer la première partie de l'exercice sur le minimum de la fonction f_n.

La borne inférieure cherchée est un minimum qui vaut $-{}^t(BZ)(A+B)^{-1}(BZ) + {}^tZBZ = {}^tZ(-B(A+B)^{-1}B+B)Z$.

12.130 Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ dans cette base $\mathcal{B}$ de sorte que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Posons G la matrice de Gram de $(x_1, \cdots, x_p)$ qui vaut classiquement $G = {}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}$ est orthonormale. On sait que $\mathrm{rang}\,(A) \leqslant \mathrm{Min}(n,p) = n$ donc la matrice G n'est pas inversible car $\mathrm{rang}\,(G) = \mathrm{rang}\,({}^tAA) \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \leqslant n < p$.

Si $i \neq j$, $||x_i - x_j||^2 = d^2 = ||x_i||^2 - 2(x_i|x_j) + ||x_j||^2 = 2 - 2(x_i|x_j)$ donc $(x_i|x_j) = 1 - \frac{d^2}{2}$. Par conséquent, comme les x_i sont unitaires, on a $G = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ avec $g_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $g_{i,j} = 1 - \dfrac{d^2}{2}$ si $i \neq j$.

• On peut commencer, en calculant $\det(G)$, par sommer toutes les colonnes dans la première et factoriser $p + (p-1)\Big(1 - \dfrac{d^2}{2}\Big)$. Ensuite, on effectue les opérations $\forall k \in [\![2;p]\!]$, $C_k \leftarrow C_k - \Big(1 - \dfrac{d^2}{2}\Big)C_1$ pour avoir une matrice triangulaire inférieure avec des $\dfrac{d^2}{2}$ sur la diagonale à partie de la seconde colonne, on obtient donc la relation $\det(G) = \Big(p + (p-1)\Big(1 - \dfrac{d^2}{2}\Big)\Big)\Big(\dfrac{d^2}{2}\Big)^{p-1}$. Une autre méthode :

• En décomposant chaque colonne C_j de G comme la colonne ne contenant que des $1 - \dfrac{d^2}{2}$ et la colonne contenant $\dfrac{d^2}{2}$ à la ligne j et des 0 ailleurs, par multilinéarité et alternance du déterminant, on obtient une autre relation équivalente à la première : $\det(G) = \Big(\dfrac{d^2}{2}\Big)^p + p\Big(\dfrac{d^2}{2}\Big)^{p-1}\Big(1 - \dfrac{d^2}{2}\Big)$.

Or $\det(G) = 0$ et $d \neq 0$: $\dfrac{d^2}{2} + p\Big(1 - \dfrac{d^2}{2}\Big) = 0$ donc $d = \sqrt{\dfrac{2p}{p-1}}$.

• Ou alors, on se sert de la matrice J ne contenant que des 1, alors $G = \Big(1 - \dfrac{d^2}{2}\Big)J + \dfrac{d^2}{2}I_p$. On ne peut pas avoir $1 - \dfrac{d^2}{2} = 0$ car alors G serait inversible donc $\det(G) = \Big(1 - \dfrac{d^2}{2}\Big)^p \det(J - \alpha I_p)$ avec $\alpha = \dfrac{d^2}{d^2 - 2} \neq 0$. Alors $\det(J - \alpha I_p) = \chi_J(\alpha) = 0$ or J admet 0 comme valeur propre d'ordre $p - 1$ (car $\text{rang}\,(J) = 1$) et, par la trace, p comme dernière valeur propre : $\chi_J = (-1)^p X^{p-1}(X - p)$. Ainsi $\alpha = p$ et à nouveau $d = \sqrt{\dfrac{2p}{p-1}}$.

Reprenons le même calcul mais avec la matrice A' obtenue en ne gardant que les $p-1$ premières colonnes de A ce qui correspond à la matrice de la faille $(x_1, \cdots, x_{p-1})$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $G' = {}^tA'A' = (g'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p-1}$ avec $g_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $g_{i,j} = 1 - \dfrac{d^2}{2} = \dfrac{-1}{p-1}$ si $i \neq j$. La même méthode nous permet d'obtenir $\det(G') = \Big(\dfrac{p}{p-1}\Big)^{p-1} + (p-1)\Big(\dfrac{p}{p-1}\Big)^{p-2}\Big(\dfrac{-1}{p-1}\Big) = \dfrac{p^{p-2}}{(p-1)^{p-1}} \neq 0$. Comme G' est inversible donc de rang $p-1$, on a A' qui ne peut être que de rang $p-1$ car $p - 1 = \text{rang}\,(G') = \text{rang}\,({}^tA'A') \leqslant \text{rang}\,(A') \leqslant p-1$. Or $\text{rang}\,(A') \leqslant n$ donc $p - 1 \leqslant n$ alors que $n < p$: cela donne $p = n + 1$.

Cette famille de vecteurs est un système obtusangle particulier.

12.131 Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et que $a_{i,j}$ est la composante de $f(e_j)$ selon e_i, on a $a_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$. Ainsi : $\text{Tr}\,(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} (f(e_k)|e_k)$.
Le théorème spectral nous dit qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres positives $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, en décomposant $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k$, on a $(f(x)|x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant 0$.
Soit $\mathcal{B}'' = (w_1, \cdots, w_n)$ une base de vecteurs propres de g associés aux valeurs propres positives $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$, alors $\text{Tr}\,(f \circ g) = \sum\limits_{k=1}^{n} (f \circ g(w_k)|w_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k (f(w_k)|w_k) \geqslant 0$ car $\mu_k \geqslant 0$ et $(f(w_k)|w_k) \geqslant 0$.

12.132 **a.** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in E^2$, par linéarité du produit scalaire à gauche et à droite, on a bien la linéarité de f car $f(\lambda x + y) = (a|\lambda x + y)b - (b|\lambda x + y)a = \lambda(a|x)b + (a|y)b - \lambda(b|x)a - (b|y)a$ qui permet d'avoir la relation attendue, $f(\lambda x + y) = \lambda\big((a|x)b - (b|x)a\big) + \big((a|y)b - (b|y)a\big) = \lambda f(x) + f(y)$. Comme f va de E dans E puisque a et b sont deux vecteurs de E, f est un endomorphisme de E.

b. • Il est clair que $\text{Im}\,(f) \subset \text{Vect}(a, b)$ puisque si $y \in \text{Im}\,(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = (a|x)b - (b|x)a$.

- Si $n \geqslant 3$, on a donc $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rang}\,(f) \leqslant 2 = \dim\big(\mathrm{Vect}(a,b)\big) < 3$ (car (a,b) est libre donc une base du plan $\mathrm{Vect}(a,b)$). Ainsi, f n'est pas un automorphisme de E.

- Si $n = 2$ et $x \in E$, comme (a,b) est libre par hypothèse, on a $f(x) = 0_E \iff (a|x) = (b|x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \iff x \in (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp} = E^{\perp} = \{0_E\}$. Ainsi f est injective donc $f \in GL(E)$ (dimension finie).

Par conséquent, on a l'équivalence $f \in GL(E) \iff n = 2$.

• Pour $n \geqslant 2$, puisque (a,b) est libre, comme ci-dessus, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a,b)^{\perp}$ et $\mathrm{Vect}(a,b)$ sont stables par f donc dans une base $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_{n-2},a,b)$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Vect}(a,b)$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} -(a|b) & -||b||^2 \\ ||a||^2 & (a|b) \end{pmatrix}$ car $f(a) = -(a|b)a + ||a||^2 b$ et $f(b) = -||b||^2 a + (a|b)b$. Ainsi, $\chi_f = \chi_M = X^{n-2}\chi_A = X^{n-2}\big(X^2 + ||a||^2||b||^2 - (a|b)^2\big)$. Or, comme les vecteurs a et b ne sont pas colinéaires, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $||a||^2||b||^2 - (a|b)^2 > 0$. Il existe donc deux valeurs propres imaginaires pures non réelles de A et f n'est pas diagonalisable car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

C'était prévisible ! En effet, si $(x,y) \in E^2$, il vient $(f(x)|y) = \big((a|x)b - (b|x)a\big|y\big) = (a|x)(b|y) - (b|x)(a|y)$ alors que $(x|f(y)) = \big(x\big|(a|y)b - (b|y)a\big) = (a|y)(x|b) - (b|y)(x|a)$ donc on a bien $(f(x)|y) = -(x|f(y))$. Ainsi, f est antisymétrique donc son spectre complexe dans inclus dans $i\mathbb{R}$ ce qui montre que f ne peut être diagonalisable que si son spectre vaut $\{0\}$, c'est-à-dire si f est nilpotent.

On a donc l'équivalence, pour f antisymétrique, entre "f diagonalisable" et "$f = 0$".

12.133 **a.** Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ avec des réels strictement positifs $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ par hypothèse et d'après le théorème spectral.

Alors $\det(u) = \det(A) = \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k > 0$ donc $u \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1})$ qui est symétrique donc u^{-1} est symétrique car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale. De plus ses valeurs propres sont strictement positives donc $u^{-1} \in S_n^{++}$ et la base $\mathcal{B}$ est une base commune de vecteurs propres pour u et u^{-1}.

b. • Soit $<.|.>: E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $<x|y>=(x|u(y))$: ceci définit bien un nouveau produit scalaire sur E auquel on peut appliquer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ au couple de vecteurs $(x,u^{-1}(y))$ si $(x,y) \in E^2$: $<x,u^{-1}(y)>^2 \leqslant <x,x><u^{-1}(y),u^{-1}(y)>$ ce qui donne $(x|y)^2 \leqslant (x|u(x))(u^{-1}(y)|y) = (u(x)|x)(u^{-1}(y)|y)$.

• Ou considérer $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = (x + tu^{-1}(y)|u(x + tu^{-1}(y))) = (x + tu^{-1}(y)|u(x) + ty)$ car alors $\varphi(t) = t^2(u(x)|x) + 2t(x|y) + (u^{-1}(y)|y)$ en affirmant classiquement (φ de degré 2 qui reste positive sur $\mathbb{R}$) que son discriminant $\Delta = 4\big((x|y)^2 - (u(x)|x)(u^{-1}(y)|y)\big)$ est négatif.

c. Soit $x \in H_i$, on a $((u+v)(x)|x) = (u(x)|x) + (v(x)|x) \geqslant \delta_i(u) + \delta_i(v)$ et on passe à la borne inférieure : $\delta_i(u+v) \geqslant \delta_i(u) + \delta_i(v)$.

Soit $x \in H_i$, alors $1 = (x|e_i)^2 \leqslant (u(x)|x)(u^{-1}(e_i)|e_i)$ d'après la question **b.** donc $(u(x)|x) \geqslant \dfrac{1}{(u^{-1}(e_i)|e_i)}$.

Ainsi $\delta_i(u) \geqslant \dfrac{1}{(u^{-1}(e_i)|e_i)}$. De plus, en prenant $y_i = \dfrac{1}{(u^{-1}(e_i)|e_i)}u^{-1}(e_i)$, on a $y_i \in H_i$ et comme $(y_i,u^{-1}(e_i))$ est une famille liée, par le cas d'égalité dans CAUCHY-SCHWARZ appliqué à $<.|.>$: $(y_i|e_i)^2 = 1 = (u(y_i)|y_i)(u^{-1}(e_i)|e_i)$ donc $u(y_i)|y_i) = \dfrac{1}{(u^{-1}(e_i)|e_i)}$. Par conséquent : $\delta_i(u) = \dfrac{1}{(u^{-1}(e_i)|e_i)}$.

d. Comme $(e_1,\cdots,e_n)$ est une base orthonormale et A la matrice de u dans la base canonique, le coefficient $(u^{-1}(e_i)|e_i)$ est celui en case (i,i) dans A^{-1}. Or on sait que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t\mathrm{Com}(A)$ et $\det(A_i)$ est le coefficient en case (i,i) de $\mathrm{Com}(A)$. Ainsi $(u^{-1}(e_i)|e_i) = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$. Il suffit alors de reprendre l'inégalité et l'égalité du **c.** pour avoir $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{\det(A_i+B_i)}{\det(A+B)} \geqslant \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)} + \dfrac{\det(B_i)}{\det(B)}$.

12.134 **a.** Si $A = 0$, il est clair que $N(A) = 0$. Ainsi si $\lambda = 0$, on a $N(\lambda A) = |\lambda| N(A) = 0$.

• Si $A \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, on a $\forall X \in S_2(0,1)$ (sphère unité pour la norme 2), $||\lambda AX||_2 = |\lambda|||AX||_2 \leqslant |\lambda|\, N(A)$ donc, en passant à la borne supérieure : $N(\lambda A) \leqslant |\lambda|\, N(A)$. Mais on a donc aussi $N(A) = N\Big(\dfrac{1}{\lambda}(\lambda A)\Big) \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$ donc $N(\lambda A) \geqslant |\lambda|\, N(A)$ et on a enfin $N(\lambda A) = |\lambda|\, N(A)$ d'où l'homogénéité.

• $N(A) = 0 \iff \forall X \in S_2(0,1),\ AX = 0$ donc tous les vecteurs unitaires sont de ans le noyau de A, et par linéarité de A, tous les vecteurs sont dans $\mathrm{Ker}(A)$ donc $A = 0$: voilà pour la séparation !

• Si $X \in S_2(0,1)$, $||(A+B)X||_2 \leqslant ||AX||_2 + ||BX||_2 \leqslant N(A) + N(B)$ et en passant à la borne supérieure : $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$: c'est l'inégalité triangulaire ! Par conséquent N est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. ${}^tAA$ est symétrique réelle et positive (car ${}^tX{}^tAAX = ||AX||^2 \geqslant 0$), toutes ses valeurs propres $\mu_1, \cdots, \mu_n$ sont des réels positifs et on aurait pu enlever la valeur absolue dans la définition du rayon spectral $\rho(A)$.

Soit X tel que $||X||_2 = 1$, soit $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^tAA$, alors en décomposant $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k V_k$, on a ${}^AAX = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k x_k V_k$ ce qui donne :

$||AX||_2^2 = {}^tX{}^AAX = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k x_k^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(A) x_k^2 = \rho(A) \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \rho(A)||X||_2^2 = \rho(A)$. Ainsi $N(A) \leqslant \sqrt{\rho(A)}$.

Avec $X = V_j$ tel que $\mu_j = \rho(A)$, $||X||_2 = 1$ et $||AX||_2^2 = {}^tX{}^AAX = {}^tV_j\mu_jV_j = \mu_j = \rho(A)$ donc $N(A) = \rho(A)$.

12.135 Pour tout produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, si $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$, on a la relation suivante : $(x|y) = x_1y_1(e_1|e_1) + (x_1y_2 + x_2y_1)(e_1|e_2) + x_2y_2(e_2|e_2)$ ce qui se traduit matriciellement par $(X|Y) = {}^tXSY$ avec $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ symétrique où $a = (e_1|e_1)$, $b = (e_1|e_2)$ et $c = (e_2|e_2)$. Si u est orthogonal pour le produit scalaire associé à S, on a donc $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $(u(x)|u(y)) = (x|y) \iff {}^t(MX)S(MY) = {}^tXSY$ et comme ceci est vrai pour toutes matrices colonnes X et Y, on a donc ${}^tMSM = S \iff SM = {}^tM^{-1}S$ or ${}^tM^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc cela revient à chercher les matrices symétriques définies positives $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ qui vérifient $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

On calcule, on résout le système et on trouve : $a - 3c = 2b + 3c = 0$ donc on peut prendre par exemple $S = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont strictement positives donc qui convient.

12.136 **a.** Soit une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, on sait d'après le cours que $f \in O(E) \iff M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O(n)$. Ainsi, si on suppose $f \in O(E)$, on a $M^TM = I_n$ donc, en passant au déterminant : $\det(M)^2 = 1$ donc $\det(M) = \pm 1$. Or, par définition, $\det(f) = \det(M)$ donc $\det(f) = \pm 1$.

b. Si $\det(f) = -1$ et $\dim(E) = 2$, on sait d'après le cours que f est une réflexion (f est autoadjoint).

c. Si $\det(f) = 1$ et $\dim(E) = 3$, on sait que $f = \mathrm{id}_E$ ou que f est une “vraie” rotation de l'espace.

d. Le centre d'un groupe G est l'ensemble des éléments du groupe G qui commutent avec tous les autres, on le note traditionnellement $Z(G)$ (Z pour zentrum , centre en allemand).

Cas $n = 1$ Dans ce cas, $\mathcal{L}(E)$ ne contient que des homothéties, $O(E) = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ et $SO(E) = \{\mathrm{id}_E\}$. Comme les homothéties commutent entre elles, deux isométries commutent aussi entre elles ce qui donne $Z(O(E)) = O(E) = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ et $Z(SO(E)) = SO(E) = \{\mathrm{id}_E\}$.

Cas $n \geqslant 2$ pour $Z(O(E))$ Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $u \in Z(O(E))$ une isométrie de E qui commute avec toutes les autres. Soit un vecteur unitaire a de E et s_a la réflexion d'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$ dont l'expression vectorielle est classiquement $s_a(x) = x - 2(x|a)a$. Comme $s_a \in O(E)$, on a donc $s_a \circ u = u \circ s_a$ et, en prenant la valeur en a, on trouve que $s_a(u(a)) = u(-a) = -u(a)$ par linéarité de u et car $s_a(a) = -a$ donc $u(a) \in \mathrm{Ker}(s_a + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(a)$. Comme u conserve la norme, implique que $u(a) = \pm a$. La matrice de u dans n'importe quelle base est donc diagonale avec des ± 1 sur la diagonale.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ (avec $\lambda_k = \pm 1$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$). Soit $s_{i,j}$ la réflexion qui échange e_i et e_j (pour $i \neq j$ et $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$), c'est-à-dire la réflexion d'hyperplan $H_{i,j} = \mathrm{Vect}(e_i - e_j)$ donnée par $s_{i,j}(x) = x - (x|e_i - e_j)(e_i - e_j)$ car $||e_i - e_j|| = \sqrt{2}$. Il vient $\lambda_j e_j = u(e_j) = u(s_{i,j}(e_i)) = s_{i,j}(u(e_i)) = s_{i,j}(\lambda_i e_i) = \lambda_i e_j$ donc $\lambda_i = \lambda_j$ car $e_j \neq 0_E$. On en déduit que la matrice D est une matrice de la forme λI_n avec $\lambda = \pm 1$ donc que $A = \pm I_n$ ce qui montre que $u = \pm \mathrm{id}_E$.

Réciproquement, $\pm \mathrm{id}_E$ commute avec tout endomorphisme de E donc $Z(O(E)) = \{-\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E\}$.

Cas $n = 2$ pour $Z(SO(E))$ Soit E un plan euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Comme $SO(2)$ est commutatif d'après le cours, en représentant toute isométrie par sa matrice dans $\mathcal{B}$, on constate que toutes les rotations ($u \in SO(E)$) du plan E commutent entre elles, ce qui donne $Z(SO(E)) = SO(E)$.

Cas $n \geqslant 3$ pour $Z(SO(E))$ Soit E euclidien de dimension $n \geqslant 3$ et $u \in Z(SO(E))$. On se donne une base orthonormée de E noté $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n)$. Posons $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si $n = 2p+1$ est impair, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = A = \mathrm{diag}(1, R, \cdots, R)$ par blocs (avec p blocs R). Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et que $\det(A) = 1$ (par blocs), on sait que $v \in SO(E)$. De plus, $\chi_A = (X-1)(X^2+1)^p$ donc 1 est valeur propre simple de v et $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(a)$ (car v envoie e_2 sur e_3 et e_3 sur $-e_2$, etc...). Alors $v \circ u(e_1) = u \circ v(e_1)$ donc $v(u(e_1)) = u(e_1)$ ce qui montre que $u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1)$ puis que $u(e_1) = \pm e_1$. De même, $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $u(e_j) = \pm e_j$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i = \pm 1$. Si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, soit $v_{i,j} \in \mathcal{L}(E)$ telle $v_{i,j}(e_i) = e_j$, $v_{i,j}(e_j) = -e_i$ et $\forall k \notin \{i,j\}$, $v_{i,j}(e_k) = e_k$, alors $v \in SO(E)$ car elle transforme la base orthonormale directe $\mathcal{B}$ en une autre base orthonormale, ainsi $u(v_{i,j}(e_i)) = v_{i,j}(u(e_i))$ donne $u(e_j) = \lambda_j e_j = \lambda_i e_j = v_{i,j}(e_i)$ donc $\lambda_i = \lambda_j$. Ainsi, u est une homothétie et comme elle appartient à $SO(E)$ et que n est impair, on a forcément $g = \mathrm{id}_E$ (car $-\mathrm{id}_E$ est de déterminant -1).
- Si $n = 2p$ est pair, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = A = \mathrm{diag}(1, 1, R, \cdots, R)$ par blocs (avec $p-1$ blocs R). Alors comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et que $\det(A) = 1$ (par blocs), on sait que $v \in SO(E)$. De plus, $\chi_A = (X-1)^2(X^2+1)^{p-1}$ donc 1 est valeur propre double de v et $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ ($v(e_3) = e_4$, $v(e_4) = -e_3$, etc...). Comme $u(v(e_1) = v(u(e_1))$, on a $v(u(e_1)) = u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Par symétrie des rôles joués les vecteurs de $\mathcal{B}$, on a aussi $u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$. Par conséquent $u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \cap \mathrm{Vect}(e_1, e_3) = \mathrm{Vect}(e_1)$ donc $u(e_1) = \pm e_1$ car u est une isométrie. Comme pour le cas précédent, on montre que u est une homothétie donc que $u = \pm \mathrm{id}_E$ (cette fois-ci $-\mathrm{id}_E \in SO(E)$).

En conclusion :

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $Z(O(E)) = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ si E euclidien de dimension n.
- Pour $n = 2$, $Z(SO(E)) = SO(E)$ si E euclidien de dimension 2.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ impair, on a $Z(SO(E)) = \{\mathrm{id}_E\}$ si E euclidien de dimension n.
- Pour tout entier $n \geqslant 4$ pair, on a $Z(SO(E)) = \{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ si E euclidien de dimension n.

12.137 Comme A est nilpotente, il existe un entier p tel que $A^p = 0$ (on sait qu'on peut prendre $p \leqslant n$). Ainsi, comme A et ${}^tA$ commutent, on a $({}^tAA)^p = ({}^tA)^p A^p$ donc, $({}^tAA)^p = 0$ et ${}^tAA$ est nilpotente. De plus, ${}^tAA$ est symétrique donc, d'après le théorème spectral, ${}^tAA$ est orthosemblable à une matrice diagonale : il existe donc une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(R)$ (avec sur la diagonale les valeurs propres de ${}^tAA$) telles que ${}^tAA = PD{}^tP$. On en déduit que que $({}^tAA)^p = PD^p{}^tP = 0$ qui donne $D^p = 0$ en simplifiant pr les matrices inversibles P et ${}^tP = P^{-1}$, et ceci implique $D = 0$ donc $A = 0$.

Par conséquent, $A = 0$ est la seule matrice vérifiant ces hypothèses.

12.138 On passe au déterminant : $\det(X{}^tXX)\det(X)^3 = \det(I_n) = 1$ donc $\det(X) = 1 \neq 0$ et $X \in GL_n(\mathbb{R})$.

De plus, en multipliant par ${}^tX$, on a ${}^tXX{}^tXX = {}^tX = ({}^tXX)^2$ or ${}^tXX$ est symétrique et le carré d'une matrice symétrique l'est aussi (même si l'ensemble des matrices symétriques n'est pas stable par produit). On obtient bien ${}^tX$ symétrique donc X l'est aussi.

Ainsi $X^3 = I_n$ or, d'après le théorème spectral, on a $X = PD{}^tP$ donc $X^3 = PD^3{}^tP = I_n$ d'où $D^3 = I_n$ et comme les coefficients de D sont réels, cela donne $D = I_n$ donc $X = I_n$ qui convient bien.

12.139 $S = {}^tAA$ est clairement symétrique et elle est aussi nilpotente car si $A^p = 0$, on a $S^p = ({}^tA)^pA^p$ (car A et ${}^tA$ commutent) donc $S^p = 0$.

Clairement $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(S)$. De plus, si $X \in \mathrm{Ker}(S)$, ${}^tAAX = 0$ donc ${}^tX{}^tAAX = ||AX||^2 = 0$ donc $AX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{Ker}(A)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, valeur propre de S, a $SX = \lambda X$ pour un vecteur propre X non nul donc $S^pX = \lambda^pX = 0$ ce qui implique $\lambda^p = 0$ donc $\lambda = 0$. Ainsi, 0 est la seule valeur propre de S et comme S est diagonalisable, cela donne $S = 0$. On a donc aussi $A = 0$.

12.140 **a.** Si $M \in S_n^{++}$, comme M est en particulier symétrique réelle, il existe d'après le théorème spectral une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PD{}^tP$. On peut classer les λ_k qui sont les valeurs propres de M en imposant (quitte à renuméroter celles-ci) que $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. En effet, les valeurs propres de M sont strictement positives par hypothèse. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ et $S = P\Delta{}^tP$, on vérifie bien que S est symétrique (car Δ l'est) et que ses valeurs propres, qui sont les $\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$, sont strictement positives donc que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il est alors clair que $S^2 = P\Delta^2{}^tP = PD{}^tP = M$. On a même vu en cours l'unicité de S mais on n'en a pas besoin ici !

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, la matrice $M = {}^tAA$ est clairement symétrique. De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$, alors ${}^tX{}^tAAX = ||AX||^2 > 0$ car A est inversible donc $AX \neq 0$. Ainsi, M est symétrique définie positive donc, avec ce qui précède, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tAA = S^2$. Comme S est inversible, on poser alors poser $O = AS^{-1}$. Ainsi, ${}^tOO = {}^t(S^{-1}){}^tAAS^{-1} = ({}^tS)^{-1}MS^{-1} = S^{-1}SSS^{-1} = I_n$ donc O est orthogonale. On a donc $A = OS$ avec $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et on bien démontré la propriété $(*)$.

b. On vérifie que si la famille $(x_1, \cdots, x_d)$ est libre, la valeur de $|\det_B(x_1, \cdots, x_d)|$ ne dépend pas de la base orthonormale $\mathcal{B}$ choisie dans $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_d)$. En effet, soit $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormale de F, alors en notant M (resp. M') la matrice de la famille $(x_1, \cdots, x_d)$ dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\det(P) = \pm 1$ et $M = PM'$ (car pour chaque vecteur de la famille $X = PX'$)

donc $\det(M) = \det(P)\det(M') \Longrightarrow |\det(M)| = |\det(M')|$: m est bien définie.

Soit $d \in [\![1;n]\!]$ et $f \in X_d$, alors soit $x \neq 0_E$ un vecteur de E, on pose $x_1 = x$ et on complète (x_1) en une base $(x_1, \cdots, x_n)$ de E. Alors $(x_1, \cdots, x_d)$ est libre, c'est une base de $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_d)$ donc $m(x_1, \cdots, x_d) \neq 0$. Comme $f \in X_d$, $m(f(x_1), \cdots, f(x_d)) \neq 0$ ce qui fait que $(f(x_1), \cdots, f(x_d))$ est libre donc $f(x_1) = f(x) \neq 0_E$ et f est injective. Comme on est en dimension finie : f est un automorphisme de E.

c. Soit $f \in O(E)$, alors soit $(x_1, \cdots, x_d)$ une famille de vecteurs :

• si elle est liée alors $(f(x_1), \cdots, f(x_d))$ l'est aussi et on a bien $m(f(x_1), \cdots, f(x_d)) = m(x_1, \cdots, x_d) = 0$.

• si elle est libre, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_d)$ une base orthonormale de $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_d)$. Comme f est un automorphisme, $G = \mathrm{Vect}(f(x_1), \cdots, f(x_d))$ est aussi de dimension d. Comme f conserve le produit scalaire, la famille $\mathcal{B}' = (f(e_1), \cdots, f(e_d))$ est encore une base orthonormale de G. La matrice de $(x_1, \cdots, x_d)$ dans $\mathcal{B}$ est $M = ((e_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant d} = ((f(e_i)|f(x_j)))_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ qui est la matrice de $(f(x_1), \cdots, f(x_d))$ dans la base $\mathcal{B}'$. Ainsi $\det_{\mathcal{B}'}(f(x_1), \cdots, f(x_d)) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_d)$ et $m(f(x_1), \cdots, f(x_d)) = m(x_1, \cdots, x_d) = |\det(M)|$: $f \in X_d$.

d. Soit f un endomorphisme symétrique de X_d.

• Si $d = 1$ et $y \neq 0_E$ un vecteur de E, posons $e_1 = \dfrac{y}{||y||}$, (e_1) est une base orthonormale de $F = \mathrm{Vect}(y)$ et la matrice de (y) dans (e_1) est $(||y||)$ donc $m(y) = ||y||$. Ainsi, si $x \neq 0_E$, $f(x) \neq 0_E$ aussi et il vient $m(f(x)) = m(x) \Longleftrightarrow ||f(x)|| = ||x||$. f conserve la norme donc $f \in O(E)$. Or on a vu qu'un isométrie vectorielle qui était autoadjointe, donc diagonalisable, était forcément une symétrie orthogonale.

• Si $d \in [\![2;n-1]\!]$, par le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On va montrer que f est une symétrie.

Par exemple $m(f(e_1), \cdots, f(e_d)) = m(\lambda_1 e_1, \cdots, \lambda_d e_d) = |\lambda_1 \cdots \lambda_d| = 1 = m(e_1, \cdots, e_d)$ (1). De même, il vient aussi $m(f(e_2), \cdots, f(e_{d+1})) = m(\lambda_2 e_2, \cdots, \lambda_{d+1} e_{d+1}) = |\lambda_2 \cdots \lambda_{d+1}| = 1 = m(e_2, \cdots, e_{d+1})$. En divisant (aucune valeur propre n'est nulle, on obtient $|\lambda_1| = |\lambda_{d+1}|$. En changeant de famille, on obtient de même $\forall i \in [\![2;n]\!]$, $|\lambda_1| = |\lambda_i|$. En reportant dans (1), on trouve $|\lambda_1|^d = 1$ donc $\lambda_1 = \pm 1$. De même, $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_i = \pm 1$. Ainsi les valeurs propres de f sont ± 1 et f est donc une symétrie puisque f est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$ donc $(X-1)(X+1)$ annule f. Or, on a vu qu'une symétrie autoadjointe est forcément une symétrie orthogonale.

Dans tous les cas, les endomorphismes symétriques de X_d sont les symétries orthogonales de E si $d < n$.

e. D'abord un peu de structure :

- On sait d'après la question **a.** que $X_d \subset GL(E)$.
- $\mathrm{id}_E \in X_d$ d'après la question **c.** car id_E est une isométrie de E.
- Soit $(f, g) \in X_d^2$ et $(x_1, \cdots, x_d) \in E^d$, alors $m(f(g(x_1)), \cdots, f(g(x_d)) = m(g(x_1), \cdots, g(x_d))$ car $f \in X_d$. Mais on a aussi $g \in X_d$, donc $m(g(x_1), \cdots, g(x_d)) = m(x_1, \cdots, x_d)$. Ainsi, on peut conclure que $m(f \circ g(x_1), \cdots, f \circ g(x_d)) = m(x_1, \cdots, x_d)$ ce qui prouve que $f \circ g \in X_d$ (X_d est stable par composition).
- Soit $f \in X_d$ et $(x_1, \cdots, x_d) \in E^d$, alors f étant un automorphisme de E, en appliquant la relation à la famille $(f^{-1}(x_1), \cdots, f^{-1}(x_d))$, il vient $m(f(f^{-1}(x_1)), \cdots, f(f^{-1}(x_d))) = m(f^{-1}(x_1), \cdots, f^{-1}(x_d))$ d'où $m(f^{-1}(x_1), \cdots, f^{-1}(x_d)) = m(x_1, \cdots, x_d)$ et on a $f^{-1} \in X_d$ (X_d est stable par passage à l'inverse).

Ainsi, X_d est un sous-groupe de $GL(E)$.

Soit $f \in X_d$, alors f est un automorphisme de E d'après la question **b.**, ainsi d'après la propriété $(*)$ (traduite ici sur les automorphismes de E), il existe $u \in O(E)$ et $s \in S^{++}(E)$ telles que $f = u \circ s$. Or $u^{-1} \in X_d$ car $u \in X_d$ (stabilité par inverse) et $s = u^{-1} \circ f \in X_d$ (stabilité par composition). D'après la question **d.**, s est un endomorphisme symétrique de X_d donc une symétrie orthogonale donc $Sp(s) \subset \{-1, 1\}$. Mais comme $s \in S^{++}(E)$, $Sp(s) \subset \mathbb{R}_+^*$ ce qui montre que $Sp(s) = \{1\}$. Ainsi, comme s est diagonalisable, on a $s = \mathrm{id}_E$. Par conséquent, $f = u \in O(E)$ ce qui montre que $X_d \subset O(E)$. L'autre inclusion a été vue à la question **c.**. On en déduit par double inclusion que $X_d = O(E)$.

f. La fonction m, dans le cas $d = n$, est la valeur absolue du produit mixte (puisque la valeur absolue du déterminant d'une famille de n vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale). Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormale et $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E, on considère deux cas :

- Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée, $m(f(x_1), \cdots, f(x_n)) = m(x_1, \cdots, x_n) = 0$ car $(f(x_1), \cdots, f(x_n))$ est liée.
- Si $\mathcal{B}' = (x_1, \cdots, x_n)$ est libre, c'est une base de E car $\dim(E) = n$ et, en notant $\mathcal{B}'' = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$, $\mathcal{B}''$ est une autre base de E car f est un automorphisme de E. Par définition, $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $m(x_1, \cdots, x_n) = |\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})|$ et $m(f(x_1), \cdots, f(x_n)) = \Big|\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \cdots, f(x_n))\Big| = |\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''})|$. Or la formule de transitivité sur les matrices de passage donne $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$. Ainsi, on a la relation $m(f(x_1), \cdots, f(x_n)) = |\det(f)| m(x_1, \cdots, x_n)$ pour toute famille libre $(x_1, \cdots, x_n)$.

Ainsi, pour toute famille $(x_1, \cdots, x_n)$ de E, on a $m(f(x_1), \cdots, f(x_n)) = |\det(f)| m(x_1, \cdots, x_n)$. On en déduit donc que $X_n = \{f \in GL(E) \mid \det(f) = \pm 1\}$ qui est bien un sous-groupe de $GL(E)$, mais plus gros que $O(E)$.

12.141 L'application Φ est bien définie car $\begin{pmatrix} A & X \\ {}^tY & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. De plus, comme ${}^t\begin{pmatrix} A & X \\ {}^tY & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & Y \\ {}^tX & 0 \end{pmatrix}$ car A est symétrique, et qu'une matrice a même déterminant que sa transposée, on a $\Phi(X, Y) = \Phi(Y, X)$. La linéarité à gauche s'obtient par linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne car $\Phi(X_1 + \lambda X_2, Y) = \begin{vmatrix} A & X_1 + \lambda X_2 \\ {}^tY & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & X_1 \\ {}^tY & 0 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} A & X_2 \\ {}^tY & 0 \end{vmatrix}$ donc $\Phi(X_1 + \lambda X_2, Y) = \Phi(X_1, Y) + \lambda \Phi(X_2, Y)$. La symétrie implique classiquement la bilinéarité de Φ.

Il existe par le théorème spectral deux matrices $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $A = PD{}^tP$, $Sp(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors, par blocs, on a $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & X \\ {}^tX & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & Y \\ {}^tY & 0 \end{pmatrix}$ avec $Y = {}^tPX$.

<u>Analyse</u> : On suppose que Φ est un produit scalaire, donc que Φ est définie positive.

- Si $n = 1$ et $A = (a)$, $X = (x)$, on a $\Phi(X, X) = -x^2$ donc $\Phi((1), (1)) = -1 < 0$, absurde !
- Si $n \geqslant 2$ et si une des valeurs propres de A est nulle, par exemple $\lambda_k = 0$ pour $k \in [\![1; n]\!]$, en prenant $X = PY$ avec $Y = {}^t(y_1 \ \cdots \ y_n)$ non nul et $y_k = 0$, la k-ième ligne de $\begin{pmatrix} D & Y \\ {}^tY & 0 \end{pmatrix}$ est alors nulle ce qui montre que $\Phi(X, X) = 0$ alors que que $X = PY \neq 0$ car $Y \neq 0$ et P inversible : c'est impossible. On en déduit donc que les λ_k sont tous non nuls. Comme $\begin{pmatrix} D & Y \\ {}^tY & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -D^{-1}Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ {}^tY & -{}^tYDY \end{pmatrix}$ par blocs, on a $\Phi(X, X) = -({}^tYDY)\det(D) = -\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\lambda_k}\Big)$; on aurait pu obtenir cette relation en effectuant la transvection $L_{n+1} \longleftarrow L_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{y_i}{\lambda_i} L_i$ dans $\begin{pmatrix} D & Y \\ {}^tY & 0 \end{pmatrix}$. En prenant $X_k = PE_k \neq 0$ où E_k est le k-

ième vecteur de la base canonique (donc X_k est la k-ième colonne de P), on a $\Phi(X_k,X_k) = -\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \lambda_i > 0$ donc $\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \lambda_i < 0$. Si $k \neq k'$, on a donc $\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \lambda_i \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k'}}^{n} \lambda_i = \lambda_k\lambda_{k'} \sum\limits_{\substack{i=1\\i\notin\{k,k'\}}}^{n} \lambda_i^2 > 0$ donc $\lambda_k\lambda_k' > 0$. Ainsi, toutes les valeurs propres de A sont de même signe. Les λ_k ne peuvent pas être strictement positifs car sinon $\Phi(X,X) = -\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{y_k^2}{\lambda_k}\Big) < 0$ dès que $Y \neq 0$. Ainsi, $Sp(A) \subset \mathbb{R}_-^*$. Si $Y \neq 0$ et $X = PY$, d'après la formule précédente, $\Phi(X,X)$ est du signe de $(-1)^{n+2} = (-1)^n$ ce qui montre que n est pair car $\Phi(X,X) > 0$.

On a donc comme condition nécessaire pour que Φ soit un produit scalaire : $n \in \mathbb{N}^*$ est pair et $Sp(A) \subset \mathbb{R}_-^*$.

Synthèse : supposons que n est pair et que A n'a que des valeurs propres strictement négatives. On a déjà prouvé la symétrie et la bilinéarité de Φ. De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X = PY \neq 0$, on a calculé précédemment $\Phi(X,X) = -\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{y_k^2}{\lambda_k}\Big) > 0$ car au moins l'un des y_k est non nul : Φ est bien définie positive.

Par conséquent, si A est symétrique, Φ est un produit scalaire si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives et si n est pair (donc $n \geqslant 2$).

12.142 • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X$, par une récurrence facile, $\forall k \in \mathbb{N},\ A^kX = \lambda^kX$, en particulier $A^{2p+1}X = \lambda^{2p+1}X$, ceci prouve que $Ker(A - \lambda I_n) \subset Ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$. Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable donc $\bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(A)} Ker(A - \lambda I_n) = \mathbb{R}^n$ donc $\sum\limits_{\lambda\in Sp(A)} \dim\big(Ker(A - \lambda I_n)\big) = n$. Puisque $f_p : t \mapsto t^{2p+1}$ est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si on écrit $Sp(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ distincts, alors $\lambda_1^{2p+1}, \cdots, \lambda_r^{2p+1}$ sont aussi distincts ce qui fait que la famille de sous-espaces $\Big(Ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\Big)_{\lambda\in Sp(A)}$ est en somme directe donc $\dim\Big(\bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(A)} Ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\Big) = \sum\limits_{\lambda\in Sp(A)} \dim\big(Ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\big) \leqslant n$.

On a donc $n = \sum\limits_{\lambda\in Sp(A)} \dim\big(Ker(A - \lambda I_n)\big) \leqslant \sum\limits_{\lambda\in Sp(A)} \dim\big(Ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)\big) \leqslant n$ d'après les inclusions précédentes donc les deux sommes précédentes valent n et toutes ces inclusions sont des égalités, ce qui justifie que $\forall \lambda \in Sp(A),\ Ker(A - \lambda I_n) = Ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$ et $Sp(A^{2p+1}) = \{\lambda^{2p+1} \mid \lambda \in Sp(A)\}$ car on vient de voir que $\mathbb{R}^n = \bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(A)} Ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$ (on a le plein de valeurs propres pour A^{2p+1}).

Comme B est aussi symétrique, par symétrie, $\forall \lambda \in Sp(B),\ Ker(B - \lambda I_n) = Ker(B^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$.

• Revenons à l'exercice, si $A^{2p+1} = B^{2p+1}$, alors $Sp(A^{2p+1}) = Sp(B^{2p+1})$ donc, d'après ce qui précède, $Sp(A) = Sp(B)$ avec la bijection f_p. Ainsi, pour toute valeur propre $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, on obtient l'égalité $Ker(A - \lambda I_n) = Ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n) = Ker(B^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n) = Ker(B - \lambda I_n)$. Comme A et B sont diagonalisables, il existe une base orthonormale de vecteurs propres de A, qui est donc aussi une base de vecteurs propres de B (avec les mêmes valeurs propres), par conséquent $A = B$.

C'est faux si on prend des puissances paires : $(-I_2)^2 = I_2^2$ alors que $-I_2 \neq I_2$.

C'est faux si on ne suppose pas A et B symétriques : $A^3 = I_3 = I_3^3$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors que $A \neq I_3$.

12.143 C'est du cours : $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2(x|y) + ||y||^2 \leqslant ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2$ d'après CAUCHY-SCHWARZ car $(x|y) \leqslant |(x|y)| \leqslant ||x||\,||y||$ donc $||x+y||^2 \leqslant \big(||x|| + ||y||\big)^2$ et on passe à la racine. Il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans C.S. et si $(x|y) \geqslant 0$. On en déduit qu'il y a égalité dans $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Formellement, si $UX + VX = 2X$, on a $||UX + VX|| = 2||X||$ mais par inégalité triangulaire, on a aussi $2||X|| = ||UX + VX|| \leqslant |UX|| + ||VX|| = 2||X||$ en notant $||Y|| = \sqrt{{}^t\overline{Y}Y}$ si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et en vérifiant que les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski sont encore vraies dans ce nouveau contexte. En effet $||UX||^2 = {}^t\overline{X}{}^t\overline{U}UX = {}^t\overline{X}X = ||X||^2$. Ainsi, il existe un réel positif λ tel que $UX = \lambda VX$ par le cas d'égalité de Minkowski mais comme $||UX|| = ||VX|| = ||X||$ et $UX + VX = 2X$, ceci impose $UX = VX = X$.

Il faut rendre tout ceci plus rigoureux en refaisant les démonstrations dans le cas complexe.

12.144 Si $\lambda > 0$ et $A^2 = \lambda I_n$, alors pour $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXA^2X = \lambda{}^tXX = \lambda||X||^2 > 0$ alors que, puisque ${}^tA = -A$, ${}^tXA^2X = -{}^tX{}^tAAX = -||AX||^2 \leqslant 0$: impossible. Ainsi, A antisymétrique, $\forall \lambda > 0,\ A^2 \neq \lambda I_n$.

On pouvait aussi dire que $||A||^2 = \mathrm{Tr}\ ({}^tAA) = \mathrm{Tr}\ (-A^2) = -\lambda \mathrm{Tr}\ (I_n) = -n\lambda < 0$ ce qui est impossible aussi.

Si A est antisymétrique et $A^2 = \lambda I_n$, on a $\lambda \leqslant 0$ d'après ce qui précède. Soit $\lambda = 0$ et $||A||^2 = -\mathrm{Tr}\ (A^2) = 0$ implique $A = 0$, soit $\lambda < 0$ et $\det(A^2) = \det(A)^2 = \det(\lambda I_n) = \lambda^n$ donc $\lambda^n \geqslant 0 \Longrightarrow n$ pair.

Réciproquement, si $\lambda = 0$, $A = 0$ convient ; si $\lambda < 0$ et n pair, posons $\mu = \sqrt{-\lambda}$, alors D diagonale par blocs, de blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ vérifie simplement $D^2 = -\mu^2 I_n = \lambda I_n$ et elle est clairement antisymétrique.

Conclusion : il existe une matrice antisymétrique telle que $A^2 = \lambda I_n$ ssi ($\lambda = 0$ ou ($\lambda \leqslant 0$ et n pair)).

Soit $\lambda < 0$ et A antisymétrique telle que $A^2 = \lambda I_n$, alors n est pair, on pose $n = 2p \geqslant 2$, considérons f l'endomorphisme canoniquement associé à A :

- il existe u_1 unitaire, on pose $v_1 = \dfrac{f(u_1)}{\mu}$, soit $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_1u_1 + b_1v_1 = 0$ (1), alors on compose par f et $\mu a_1v_1 - \mu b_1u_1 = 0(2)$. Avec $\mu a_1(1) - b_1(2)$: $\mu(a_1^2 + b_1^2)u_1 = 0 \Longrightarrow a_1^2 + b_1^2 = 0 \Longrightarrow a_1 = b_1 = 0$.

Ainsi (u_1, v_1) est libre. $(u_1|v_1) = 0$ car ${}^tU_1V_1 = \dfrac{1}{\mu}{}^tU_1AU_1 = 0$ car ${}^t({}^tU_1AU_1) = {}^tU_1{}^tAU_1 = -{}^tU_1AU_1 = 0$.

De plus $||f(u_1)||^2 = ||AU_1||^2 = {}^tU_1{}^tAAU_1 = -\lambda||U_1||^2 = -\lambda = \mu^2$ donc $||v_1|| = 1$.

Si $p = 1$ alors (u_1, v_1) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ sinon...on recommence en considérant un vecteur u_2 unitaire dans $\mathrm{Vect}(u_1, v_1)^\perp$ et en posant $v_2 = \dfrac{f(u_2)}{\mu}$... Par récurrence, on construit une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, v_1, \cdots, u_p, v_p)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $v_p = \dfrac{f(u_p)}{\mu}$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$. Comme la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la base $\mathcal{B}$ est orthogonale car ce sont toutes les deux des bases orthonormales, on a le résultat attendu.

12.145 Par hypothèse $A^p = 0$ et ${}^tAA = A{}^tA$ donc $(A{}^tA)^p = A^p({}^tA)^p = 0$. Ainsi, en notant $B = A{}^tA$, la matrice B est nilpotente et symétrique réelle, il est classique de montrer que $B = 0$. On en déduit que $||A||^2 = \mathrm{Tr}\ ({}^tAA) = \mathrm{Tr}\ (A{}^tA) = \mathrm{Tr}\ (B) = 0$ donc $A = 0$ car $(A|B) = \mathrm{Tr}\ ({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La seule matrice répondant au problème est donc la matrice nulle.

12.146 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique (${}^tA = -A$), alors pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, on a :

${}^tXAX = {}^t({}^tXAX)) = {}^tX{}^tAX = -{}^tXAX$ donc $2{}^tXAX = 0 \Longrightarrow {}^tXAX = 0$.

Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique réelle, alors on sait par le théorème spectral qu'il existe $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $P \in O(n)$ telle que $B = PD^P$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres strictement positives de B. Soit $X \in \mathbb{R}^n$

tel que $(A+B)X=0$, alors $AX=-BX$ donc ${}^tXAX=-{}^tXBX=0$. Mais en posant $Y={}^tPX$, on a $0={}^tXBX={}^tXPD{}^tPX={}^tYDY$ donc, par calculs, si ${}^tY=(y_1\ \cdots\ y_n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k y_k^2=0\Longrightarrow(\forall k\in[\![1;n]\!],\ y_k=0)$. Alors $Y=0$ d'où $X=PY=0$. On obtient donc $(A+B)X=0\Longrightarrow X=0$ donc $\mathrm{Ker}(A+B)=\{0\}$ ce qui montre (en dimension finie) que $A+B$ est inversible.

12.147 **a.** Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P=\sum\limits_{k=0}^{d}p_kX^k\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A. Par définition, il existe un vecteur non nul $V\in\mathbb{K}^n$ tel que $AV=\lambda V$. On montre alors classiquement par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N},\ A^kV=\lambda^kV$. Si $P(A)=0$, on a $P(A)V=\Big(\sum\limits_{k=0}^{d}p_kA^k\Big)V=\sum\limits_{k=0}^{d}p_kA^kV=0$. Ainsi, $P(A)V=\sum\limits_{k=0}^{d}p_k\lambda^kV=\Big(\sum\limits_{k=0}^{d}p_k\lambda^k\Big)V=P(\lambda)V=0$ ce qui donne $P(\lambda)=0$ car $V\neq 0$.

b. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^3+4A=I_n$; cette hypothèse se traduit par $P(A)=0$ avec $P=X^3+4X-1$. On étudie la fonction polynomiale $P:x\mapsto x^3+4x-1$. Comme $P'(x)=3x^2+4>0$ pour tout réel x, la fonction P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$ par le théorème des valeurs intermédiaires car $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$. Comme $P(0)=-1<0<4=P(1)$, P ne s'annule sur $\mathbb{R}$ qu'en $\alpha\in]0;1[$ et on trouve par dichotomie que $\alpha\sim 0.24$.

On sait d'après le théorème spectral que χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ donc que A n'admet que des valeurs propres réelles, mais comme ces valeurs propres sont forcément des racines de P, seule α peut être valeur propre de A. Comme A est diagonalisable, A est semblable à αI_3 ; donc $A=\alpha I_3$ est l'unique solution du problème.

12.148 Inégalité (1) : en posant les vecteurs colonnes $V=(1)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $U=\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}m_{i,j}\Big)_{1\leqslant i\leqslant n}=MV$, en identifiant classiquement $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, on obtient donc $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}=(V|U)=(V|MV)=V^TMV$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\Big|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}\Big|=|(V|U)|=|(V|MV)|\leqslant||V||\,||MV||=\sqrt{n}\sqrt{n}=n\quad(1)$ car $||MV||=||V||$ puisque $||MV||^2=(MV)^T(MV)=V^T(M^TM)V=V^TV=||V||^2$; normal car M représente canoniquement une isométrie de $\mathbb{R}^3$. On a égalité dans cette inégalité (1) si et seulement si U et V sont colinéaires d'après Cauchy-Schwarz, et comme ils sont de même norme $\sqrt{n}$, il y a égalité si et seulement si $MV=U=\pm V$, c'est-à-dire si et seulement V est un vecteur propre de M. Ceci se produit si par exemple $M=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$ ou $M=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ (matrice de permutation).

Inégalité (2) : les colonnes C_j de la matrice M forment une base orthonormale $\mathcal{B}=(C_1,\cdots,C_n)$ de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique car M est orthogonale ce qui se traduit, puisque $C_j=(m_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'après l'énoncé, par les relations suivantes : $\forall j\in[\![1;n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n}m_{i,j}^2=1$ et $\forall(j,j')\in[\![1;n]\!]^2,\ j\neq j'\Longrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}m_{i,j}m_{i,j'}=0$.

Ainsi, $|m_{i,j}|2\leqslant 1=\sum\limits_{k=1}^{n}m_{k,j}^2=m_{i,j}^2+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}m_{k,j}^2$ pour tout couple $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ d'où $|m_{i,j}|\leqslant 1$ ce qui implique $m_{i,j}^2\leqslant|m_{i,j}|$ et on a donc $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|m_{i,j}|\geqslant n=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|m_{i,j}|^2\quad(2)$. De plus, on a égalité dans cette inégalité (2) si et seulement si $\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j}\in\{-1,0,1\}$ car $|m_{i,j}|=m_{i,j}^2\Longleftrightarrow m_{i,j}\in\{-1,0,1\}$. Mais comme les colonnes (et les lignes) de la matrice M sont normées, il ne peut y avoir qu'un seul ±1 par ligne et

par colonne. Les matrices réalisant l'égalité sont donc les matrices ayant un ± 1 par ligne et par colonne et des 0 partout ailleurs : il y en a $2^n n!$ puisque dans chaque colonne on a deux choix ($+1$ ou -1) et qu'on doit permuter les vecteurs de la base canonique ($n!$ choix). Par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Pour $n = 3$, ces 48 matrices forment le groupe du cube : c'est-à-dire les 48 isométries de l'espace laissant globalement invariant le cube dont les sommets sont les 8 points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Inégalité (3) : on se rappelle du produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par $(A|B) = \mathrm{Tr}\ (A^T B)$ ce qui revient à $(A|B) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$. En notant les matrices $N = (|m_{i,j}|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}| = (N|J) \leqslant ||N||\,||J|| = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2} \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 1^2} = \sqrt{n}\, n = n^{3/2}$ (3) d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a égalité dans (3) si et seulement si N et J sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si tous les coefficients de la matrice sont égaux en valeur absolue. Les colonnes sont normées, cette valeur commune des $|m_{i,j}|$ est donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$: les cas d'égalité dans (3) sont donc les matrices de Hadamard comme par exemple $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La taille n d'une matrice de Hadamard est soit égale à 1, 2 ou un multiple de 4 et c'est encore une conjecture qu'il en existe pour tous les entiers n multiples de 4.

12.149 La bilinéarité du produit vectoriel assure la linéarité de f qui est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On sait que $u \wedge x = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(u)$ donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(u)$. Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$ et $\mathrm{rang}\,(f) = 2$ par la formule du rang. Or on sait aussi que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) \perp u$ donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Par inclusion et égalité des dimensions : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

En notant $u = (a, b, c)$, on a classiquement $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, la formule du double produit vectoriel donne $f \circ f(x) = u \wedge (u \wedge x) = (u|x)u - ||u||^2 x$. Ainsi $A^2 = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ab & ac \\ ab & -a^2 - c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^3$, $f^3(x) = (u|x)f(u) - ||u||^2 f(x) = -||u||^2 f(x)$ car $u \in \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi $f^3 = -||u||^2 f$ et on en déduit par une récurrence facile que $\forall n \geqslant 0,\ f^{2n+1} = (-1)^n ||u||^{2n} f$ et $\forall n \geqslant 1,\ f^{2n} = (-1)^{n-1} ||u||^{2n-2} f^2$. Par conséquent $\exp(f) = f^0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f^{2n}}{(2n)!} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{id}_E + \Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}||u||^{2n-2}}{(2n)!}\Big) f^2 + \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n ||u||^{2n}}{(2n+1)!}\Big) f$.
Ainsi $r = \exp(f) = \mathrm{id}_E - \dfrac{1 - \cos(||u||)}{||u||^2} f^2 + \dfrac{1}{||u||} \sin(||u||) f$.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, $g(x) = x + \dfrac{1 - \cos(||u||)}{||u||^2}\Big((u|x)u - ||u||^2 x\Big) + \dfrac{1}{||u||}\sin(||u||) u \wedge x$. Si on note $v = \dfrac{u}{||u||}$ et $\theta = ||u||$, v est unitaire et on a $r(x) = \cos\theta\ x + \sin\theta\ v \wedge x + (1 - \cos\theta)(v|x)v$ et on reconnaît la rotation autour de l'axe orienté par le vecteur v (donc le vecteur u) et d'angle $\theta = ||u||$.

12.150 En notant A la matrice colonne telle que ${}^t A = (a_1\ \cdots\ a_n)$, on a par définition $S = I_n - A\,{}^t A$. De plus S est symétrique réelle donc diagonalisable.

- Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, on a $S = I_n$: facile.

• Sinon, $A \neq 0$ et rang $(I_n - S) = 1$. On a $SA = A - A^tAA = 0$ car ${}^tAA = ||A||^2 = 1$ donc 0 est valeur propre de S. Si $n = 1$, alors $S = 0$: facile aussi. Si $n \geqslant 2$, par la formule du rang $\dim(\text{Ker}(I_n - S)) = n - 1$ donc 1 est aussi valeur propre de S et $\dim(E_1(S)) + \dim(E_0(S)) \geqslant n$ donc $\text{Sp}(S) = \{0, 1\}$ et $E_0(S)$ est la droite engendrée par A. Comme, si $X \perp A$, on a ${}^tAX = 0 \Longrightarrow SX = X - 0 = X$, on a $\text{Vect}(A)^\perp \subset E_1(S)$ et on conclut à $\text{Vect}(A)^\perp = E_1(S)$ par l'égalité des dimensions. On en déduit que S est la projection orthogonale sur l'hyperplan orthogonal à la droite engendrée par le vecteur A. On aurait pu voir matriciellement que S était un projecteur en calculant $S^2 = (I_n - A^tA)^2 = I_n - 2A^tA + A^tAA^tA = S$ car ${}^tAA = ||A||^2 = 1$.

12.151 Soit λ une valeur propre de $u \in O(E)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$. Or u conserve la norme, donc $||u(x)|| = ||x||$, ce qui se traduit par homogénéité de la norme euclidienne par $|\lambda|\,||x|| = ||x||$ donc par $|\lambda| = 1$ puisque $||x|| > 0$. On a donc forcément $\lambda = \pm 1$.

Notons $F = E_\lambda(u)$ et m l'ordre de multiplicité de λ dans χ_u. D'après le cours sur la réduction, l'ordre de multiplicité géométrique est inférieur à l'ordre de multiplicité algébrique : $\dim(F) = \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m$.

Comme F est stable par u en tant que sous-espace propre de u et que u est une isométrie vectorielle, on en déduit d'après le cours que $F^\perp$ est stable par u. On peut donc trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_{F^\perp})$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ dans laquelle $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $p = \dim(F)$.

Comme ${}^tAA = I_n$ car $\mathcal{B}$ est orthonormale, en effectuant le produit par blocs, on arrive à ${}^tBB = I_{n-p}$ donc B est aussi orthogonale. On pouvait aussi dire que $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{F^\perp}}(u_{F^\perp})$ (matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}_{F^\perp}$ de l'endomorphisme induit par u dans $F^\perp$ qu'on sait être aussi une isométrie).

<u>Méthode matricielle</u> : on a $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \det(XI_p - \lambda I_p)\det(XI_{n-p} - B) = (X - \lambda)^p \chi_B(X)$ en effectuant le déterminant par blocs. Si λ est une valeur propre de B, il existerait $Y \neq 0 \in \mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{R})$ tel que $BY = \lambda Y$, alors en posant $X = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} \neq 0$, on aurait $AX = \begin{pmatrix} \lambda I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ BY \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \lambda X$ donc le vecteur x dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ forment le vecteur colonne X serait un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ et on aurait $x \in F$ (car $F = E_\lambda(u)$) et $x \in F^\perp$ (à cause des p zéros qui débute le vecteur colonne X), ce qui est impossible puisque car $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ et que $x \neq 0_E$ car $Y \neq 0$. Ainsi, λ n'est pas racine de χ_B donc, par définition, comme $\chi_A = (X - \lambda)^p \chi_B$, l'ordre de multiplicité algébrique de λ dans le polynôme χ_u est donc $p = \dim(E_\lambda(u)) = m$.

<u>Méthode vectorielle</u> : si λ est valeur propre de $u_{F^\perp}$, alors il existe un vecteur $x \neq 0_E \in F^\perp$ tel que $u_{F^\perp}(x) = \lambda x$ mais on a alors $x \in F$ car x est aussi un vecteur propre de u donc $x \in F \cap F^\perp = \{0_E\}$ ce qui est absurde. Ainsi, λ n'est pas racine de $\chi_{u_{F^\perp}}$ et, comme $\chi_u = (X - \lambda)^p \chi_{u_{F^\perp}}$ puisque $\chi_A(X) = (X - \lambda)^p \chi_B(X)$, l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme χ_u vaut donc $p = \dim(E_\lambda(u))$.

12.152 La matrice $M(\theta)$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

Comme $\text{Tr}\,(M(\theta)) = 2$ et $\det(M(\theta)) = 1 - \theta^2$, on a $\chi_{M(\theta)} = X^2 - 2X + 1 - \theta^2 = (X - 1 - \theta)(X - 1 + \theta)$.

$M(\theta)$ possède donc deux valeurs propres distinctes $1 + \theta$ et $1 - \theta$. On résout le système $M(\theta)X = (1 - \theta)X$ et $E_{1-\theta}(M(\theta)) = \text{Vect}(v_1)$ où $v_1 = \left(\cos\frac{1}{\theta}, \sin\frac{1}{\theta}\right)$. De même $E_{1+\theta}(M(\theta)) = \text{Vect}(v_2)$ où $v_2 = \left(\cos\frac{1}{\theta}, -\sin\frac{1}{\theta}\right)$.

$\boxed{\mathbf{12.153}}$ La bilinéarité du produit vectoriel assure la linéarité de u qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

• Si $a = 0$, alors $u = 0$ et $\mathsf{Ker}\, u = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}\, u = \{0\}$.

• Si $a \neq 0$, on sait que $a \wedge x = 0 \iff x \in \mathsf{Vect}(a)$ donc $\mathsf{Ker}\, u = \mathsf{Vect}(a)$. Ainsi $\dim(\mathsf{Ker}\, u) = 1$ et par la formule du rang : $\mathrm{rang}\, u = 2$. Or on sait aussi que $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $u(x) \perp a$ donc $\mathrm{Im}\, u \subset \mathsf{Vect}(a)^{\perp}$.

Par inclusion et égalité des dimensions : $\mathrm{Im}\, u = \mathsf{Vect}(a)^{\perp}$.

$\boxed{\mathbf{12.154}}$ u est un endomorphisme symétrique, on sait qu'alors il existe une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $u(e_k) = \lambda_k e_k$. Pour $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, on a $(x|u(x)) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k e_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$. Comme $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ par hypothèse et que $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormale, on a l'encadremet suivant $\lambda_1 ||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_1 x_k^2 \leqslant (x|u(x)) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_n x_k^2 = \lambda_n ||x||^2$.

$\boxed{\mathbf{12.155}}$ Si $X = (x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il vient $DX = (d_i x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (d_j x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = XD$ donc l'expression $\phi(X) = ((d_i - d_j)x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ d'où $\mathrm{Im}\,(\phi) \subset F = \{M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall k \in [\![1;n]\!],\ m_{k,k} = 0\}$. Réciproquement, soit $M \in F$, alors $M = \phi(X) \in \mathrm{Im}\,(\phi)$ si X est la matrice de F telle que $x_{i,j} = \dfrac{m_{i,j}}{d_i - d_j}$ si $i \neq j$. Par conséquent : $\mathrm{Im}\,(\phi) = F$.

Soit l'application $f : x \mapsto u\cos^2 x + v\sin^2 x + w \sin x \cos x$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$, π-périodique. De plus $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{(u+v)\pi}{2}$ car $f(x) = \dfrac{u+v}{2} + \dfrac{u\cos(2x)}{2} - \dfrac{v\cos(2x)}{2} + \dfrac{w\sin(2x)}{2}$. Par l'absurde, si on avait $M = \underset{[0;\pi]}{\mathrm{Max}}\, f < \dfrac{u+v}{2}$, alors en intégrant sur $[0;\pi]$, on aurait $\displaystyle\int_0^{\pi} f < \frac{(u+v)\pi}{2}$: NON ! De même, si on suppose $m = \underset{[0;\pi]}{\mathrm{Inf}}\, f > \dfrac{(u+v)}{2}$, on aboutit à la contradiction $\displaystyle\int_0^{\pi} f > \frac{(u+v)\pi}{2}$.

On a donc $m \leqslant \dfrac{(u+v)}{2} \leqslant M$. Comme f est continue sur le segment $[0;\pi]$, $\exists (c,d) \in [0;\pi]^2$ tel que $M = f(c)$ et $m = f(d)$; et, comme $f(d) \leqslant \dfrac{(u+v)}{2} \leqslant f(c)$, si on applique le TVI sur $\widetilde{[c;d]}$, on obtient l'existence d'un réel x tel que $u\cos^2 x + v\sin^2 x + w\sin x \cos x = \dfrac{u+v}{2}$.

Si $x = y$, l'inégalité $\left|z - \dfrac{x+y}{2}\right| \leqslant \mathrm{Max}(|z-x|, |z-y|)$ devient une égalité puisque $x = y = \dfrac{x+y}{2}$.

Si $x \neq y$, par symétrie, supposons $x < y$, on considère deux cas :

• si $x < \dfrac{x+y}{2} \leqslant z$, alors $\left|z - \dfrac{x+y}{2}\right| = z - \dfrac{x+y}{2} < z - x = |z-x| = \mathrm{Max}(|z-x|, |z-y|)$.

• si $z \leqslant \dfrac{x+y}{2} < y$, alors $\left|z - \dfrac{x+y}{2}\right| = \dfrac{x+y}{2} - z < y - z = |z-y| = \mathrm{Max}(|z-x|, |z-y|)$.

Dans tous les cas, on a bien $\left|z - \dfrac{x+y}{2}\right| \leqslant \mathrm{Max}(|z-x|, |z-y|)$ avec égalité si et seulement si $x = y$.

• Si $\exists (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $A = XY - YX$, alors $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(XY) - \mathrm{Tr}\,(YX) = 0$ par les propriétés de la trace.
• Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, en ayant admis (1), il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $PAP^{-1} = PA{}^tP = B$ où B a tous ses termes diagonaux égaux, et donc nuls car $\mathrm{Tr}\,(B) = \mathrm{Tr}\,(A) = 0$ car A et B sont semblables. Avec une matrice D à termes diagonaux distincts et ϕ associé comme au début de l'exercice, il vient $B \in \mathrm{Im}\,(\phi)$ donc il existe $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = DZ - ZD = PA{}^tP$. Ainsi, $A = {}^tP(DZ - ZD)P = ({}^tPDP)({}^tPZP) - ({}^tPZP)({}^tPDP)$ donc $A = XY - YX$ en posant $X = {}^tPDP$ et $Y = {}^tPYP$. On a prouvé l'équivalence.
Soit $P = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $PAP^{-1} = R_\theta A R_{-\theta} = \begin{pmatrix} X & * \\ * & Y \end{pmatrix}$ avec $X = u\cos^2 x + v\sin^2 x + w\sin x\cos x$ où $u = a$, $v = d$ et $w = -b - c$. Or $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $X = \dfrac{u+v}{2} = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(A)}{2}$.
Mais A et $R\theta AR_{-\theta}$ sont semblables donc $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(R\theta AR_{-\theta})$ et $X = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(A)}{2} \Longrightarrow Y = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(A)}{2}$. La matrice

A est donc orthosemblable à la matrice $\begin{pmatrix} X & * \\ * & X \end{pmatrix}$ avec $X = \dfrac{\text{Tr}(A)}{2}$ et (1) est vérifié si $n = 2$.
$|m_{i,i} - m_{j,j}| = |m_{i,i} - m'_{i,i} + m'_{i,i} - m'_{j,j} + m'_{j,j} - m'_{j,j}| \leqslant |m_{i,i} - m'_{i,i}| + |m'_{i,i} - m'_{j,j}| + |m'_{j,j} - m'_{j,j}|$ pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ donc $|m_{i,i} - m_{j,j}| \leqslant 2||M - M'||_\infty + \delta(M')$. Comme ceci est vrai pour tout couple (i,j), on a $\delta(M) \leqslant 2||M - M'||_\infty + \delta(M')$. De même $\delta(M') \leqslant 2||M' - M||_\infty + \delta(M)$ donc $|\delta(M) - \delta(M')| \leqslant 2||M - M'||_\infty$ et δ est continue car 2-lipschitzienne.
L'application $\theta : (P,Q) \mapsto PA^tQ$ est bilinéaire donc continue et $\varphi : P \mapsto (P,P)$ est linéaire donc continue. Ainsi $f : \delta \circ \theta \circ \varphi \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(M) = \delta(PA^tP)$ est continue sur le compact $O_n(\mathbb{R})$ (vu en cours) donc elle est bornée et y atteint ses bornes. Ainsi $\underset{P \in O_n(\mathbb{R})}{\text{Min}} \delta(PAP^{-1})$ existe.
On prend un couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $\delta(A) = |m_{i,i} - m_{j,j}|$. Supposons par exemple que $i = 1$ et $j = 2$, alors on utilise la matrice $P = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ comme avant qui permet de rendre égaux dans PA^tP les termes en cases $(1,1)$ et $(2,2)$. La seconde question nous permet d'affirmer que le nombre de couple $(k,l) \in [\![1;n]\!]^2$ tels que $\delta(A) = |m_{k,k} - m_{l,l}|$ a baissé strictement. Après quelques opérations de ce type, on va trouver une matrice ortho-semblable à A telle que $\delta(QA^tQ) < \delta(A)$.
Si on suppose que $\underset{P \in O_n(\mathbb{R})}{\text{Min}} \delta(PAP^{-1}) > 0$, ce qu'on vient de faire fournit une contradiction (car $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe). Par conséquent $\underset{P \in O_n(\mathbb{R})}{\text{Min}} \delta(PAP^{-1}) = 0$ et la propriété (1) est finalement vraie.

12.156 On sait qu'un projecteur orthogonal est un projecteur symétrique (au sens d'endomorphisme symétrique) donc $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|p(y)) = (p(x)|y)$. Même chose pour $q : \forall (x,y) \in E^2,\ (x|q(y)) = (q(x)|y)$
Ainsi, $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|(p+q)(y)) = (x|p(y)) + (x|q(y)) = (p(x)|y) + (q(x)|y) = ((p+q)(x)|y)$ et $p+q$ est donc un endomorphisme symétrique. En tant que tel, par le théorème spectral, le polynôme caractéristique de $p+q$ est scindé et il existe une base orthonormée de vecteurs propres de $p+q$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u, et $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. Alors $u(x) = \lambda x$.
Si p est la projection orthogonale sur F, en décomposant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, on a $p(x) = y$ donc $(p(x)|x) = (y|y+z) = ||y||^2$ or, d'après PYTHAGORE, $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$ donc $0 \leqslant ||y||^2 \leqslant ||x||^2$. On a donc $0 \leqslant (p(x)|x) \leqslant ||x||^2$. De même $0 \leqslant (q(x)|x) \leqslant ||x||^2$.
On écrit $(u(x)|x) = (p(x)+q(x)|x) = (p(x)|x)+(q(x)|x)$ dont on déduit $0 \leqslant (u(x)|x) \leqslant 2||x||^2$. Mais on a aussi $(u(x)|x) = \lambda||x||^2$. Donc $0 \leqslant \lambda||x||^2 \leqslant 2||x||^2$ ce qui implique $\lambda \in [0;2]$ car $||x||^2 > 0$. Au final $\text{Sp}(u) \subset [0;2]$.

• Soit $x \in \text{Ker}(u)$, alors $(u(x)|x) = 0$ donc $(p(x)|x) + (q(x)|x) = 0$ alors que $(p(x)|x) \geqslant 0$ et $(q(x)|x) \geqslant 0$. Ceci impose $(p(x)|x) = (q(x)|x) = 0$. Or, avec les notations précédentes, $(p(x)|x) = ||y||^2$ donc $y = 0_E$ et $x = z \in \text{Ker}(p)$. De même $x \in \text{Ker}(q)$. On vient de prouver l'inclusion $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$. L'inclusion réciproque étant évidente : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.
On pouvait aussi constater que, puisque p est une projection orthogonale, on a la relation générale suivante à mémoriser : $\forall x \in E,\ (p(x)|x) = (p(x)|x - p(x) + p(x)) = ||p(x)||^2$ car $x - p(x) \perp p(x)$.
• Soit $x \in \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$, alors $u(x) = 2x$ donc $(u(x)|x) = 2||x||^2$. Mais $(u(x)|x) = (p(x)|x) + (q(x)|x)$, $(p(x)|x) \leqslant ||x||^2$ et $(q(x)|x) \leqslant ||x||^2$. Ceci impose $(p(x)|x) = ||x||^2$ et $(q(x)|x) = ||x||^2$. À nouveau, on en déduit que $(p(x)|x) = ||y||^2 = ||x||^2$ donc $||z||^2 = 0$ et $z = 0_E$ donc $x = y \in \text{Im}(p)$. De même $x \in \text{Im}(q)$. On vient d'établir l'inclusion $\text{Ker}(u - 2\text{id}_E) \subset \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(q - \text{id}_E)$. L'inclusion réciproque est claire donc $\text{Ker}(u - 2\text{id}_E) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(q - \text{id}_E)$.

12.157 Soit $u \in O(E)$ qui est dans le commutant de $O(E)$, alors $\forall v \in O(E),\ u \circ v = v \circ u$ par définition. Les réflexions sont quasiment les plus simples des isométries : soit a un vecteur unitaire quelconque de E et $H = \text{Vect}(a)^\perp$, u commute avec la réflexion s_H. Ainsi $u(s_H(a)) = s_H(u(a))$ ce qui montre que $u(-a) = -u(a) = s_H(u(a))$ donc $u(a) \in \text{Ker}(s_H + \text{id}_E) = \text{Vect}(a)$. Alors il existe un réel λ tel que $u(a) = \lambda a$ mais comme u est une isométrie : $\lambda = \pm 1$ car $||u(a)|| = ||a||$.
Supposons maintenant qu'il existe deux vecteurs unitaires b et c orthogonaux tels que $u(b) = b$ et $u(c) = -c$ et posons $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(b+c)$, alors d est unitaire donc $u(d) = \pm d$ d'après ce qui précède mais par linéarité de u, on a $u(d) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(b-c)$ qui est différent de $\pm d$: contradiction.

Si on prend une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, on ne peut avoir grâce à ce qui précède que $\big((u(e_1) = e_1,\ u(e_2) = e_2$ et $u(e_3) = e_3\big)$ ou $\big((u(e_1) = -e_1,\ u(e_2) = -e_2$ et $u(e_3) = -e_3\big)$. Ainsi $u = \mathrm{id}_E$ ou $u = -\mathrm{id}_E$. Réciproquement, ces deux isométries commutent avec toutes les autres donc le commutant de $O(E)$ est le sous-groupe $\{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$ de $GL(E)$.
Il n'existe pas toujours de base canonique dans un espace quelconque. Si c'est le cas, elle est unique par définition mais pas forcément à ordre près.
D'après ce qu'on a fait précédemment, si u commute avec les symétries par rapport à un hyperplan de E, u commute avec les réflexions donc $u = \pm\mathrm{id}_E$ et on trouve encore $\{\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E\}$.

12.158 Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$. Soit $(V_1, \cdots, V_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de S (théorème spectral) associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, on décompose $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k V_k$. Alors $SX = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k V_k$ donc ${}^tXSX = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant \lambda_1 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \lambda_1 {}^tXX$. Comme $\lambda_1 = \underset{\lambda \in Sp(S)}{\mathrm{Min}}\ \lambda$, on a bien $\lambda_1 {}^tXX \leqslant {}^tXSX$.
On montre bien sûr de la même manière que $\forall S \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXSX \leqslant (\underset{\lambda \in Sp(S)}{\mathrm{Max}}\ \lambda){}^tXX$.
Soit I un intervalle non vide, un couple $(S, S') \in S_n(I)^2$ et un réel $t \in [0;1]$. Montrer que $S_n(I)$ est convexe revient à montrer que la matrice $tS + (1-t)S'$, qui est évidemment symétrique, vérifie $tS + (1-t)S' \in S_n(I)$.
Pour fixer les idées, supposons que $I = [a; b[$ avec $a < b$. Par définition de $S_n(I)$, $(\underset{\lambda \in Sp(S)}{\mathrm{Min}}\ \lambda)$ et $(\underset{\lambda' \in Sp(S')}{\mathrm{Min}}\ \lambda')$ appartiennent à $[a; b[$. Ainsi, pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$, on a les deux inégalités :
${}^tX(tS+(1-t)S')X = t{}^tXSX+(1-t){}^tS'X \geqslant \big(t(\underset{\lambda \in Sp(S)}{\mathrm{Min}}\ \lambda)+(1-t)(\underset{\lambda' \in Sp(S')}{\mathrm{Min}}\ \lambda')\big){}^tXX \geqslant (ta+(1-t)a){}^tXX = a{}^tXX$.
${}^tX(tS+(1-t)S')X = t{}^tXSX+(1-t){}^tS'X \leqslant \big(t(\underset{\lambda \in Sp(S)}{\mathrm{Max}}\ \lambda)+(1-t)(\underset{\lambda' \in Sp(S')}{\mathrm{Max}}\ \lambda')\big){}^tXX < (tb+(1-t)b){}^tXX = b{}^tXX$.
Soit λ une valeur propre de $tS + (1-t)S'$, alors il existe un vecteur $Y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(tS + (1-t)S')Y = \lambda Y$ et on obtient $a{}^tYY \leqslant {}^tY(tS + (1-t)S')Y = \lambda{}^tYY < b{}^tYY$ d'après ce qui précède. Or ${}^tYY > 0$ car $Y \neq 0$ donc $a \leqslant \lambda < b$. Par conséquent, $Sp(tS + (1-t)S') \subset [a; b[= I$ donc $tS + (1-t)S' \in S_n(I)$.
On vient de prouver que $S_n(I)$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12.159 Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien et supposons que $\forall x \in E,\ ||s(x)|| \leqslant \rho||x||$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de s, alors il existe $x \neq 0_E \in E$ tel que $s(x) = \lambda x$ d'où $|\lambda|\,||x|| = ||\lambda x|| \leqslant \rho||x||$ et $|\lambda| \leqslant \rho$ en simplifiant par $||x|| > 0$.
En considérant que les racines de χ_s peuvent être appelées les valeurs propres de s, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de χ_s donc une valeur propre de $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ avec $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Il existe un vecteur colonne $X = X_1 + iX_2 \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ (avec X_1 et X_2 vecteurs colonnes réels associés aux vecteurs x_1 et x_2 dans la base $\mathcal{B}$) tel que $AX = \lambda X$ et, A est réelle : $t\overline{X}{}^tAAX = {}^t(\overline{AX})(AX) = \lambda\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X = |\lambda|^2||X||^2$ en notant $||X||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$.
Ainsi $t\overline{X}{}^tAAX = {}^t(X_1 - iX_2){}^tAA(X_1 + iX_2) = {}^tX_1{}^tAAX_1 + {}^tX_2{}^tAAX_2 = ||s(x_1)||^2 + ||s(x_2)||^2$ ce qui donne $|\lambda|^2||X||^2 \leqslant \rho^2(||x_1||^2 + ||x_2||^2) = \rho^2||X||^2$ d'où $|\lambda|^2 \leqslant \rho^2$ en simplifiant par $||X||^2 > 0$ et enfin $|\lambda| \leqslant \rho$.
Supposons s symétrique et si toutes ses valeurs propres (on sait que χ_s est scindé dans $\mathbb{R}$) sont en valeur absolue inférieures ou égales à $\rho \geqslant 0$, alors on se donne une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs propres de s telle que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ s(v_k) = \lambda_k v_k$. Alors, s est bien ρ-lipschitzien car si $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k \in E$, on a $||s(x)||^2 = \Big|\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k v_k\Big|\Big|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2 \leqslant \rho^2 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \rho^2||x||^2$ d'où $\forall x \in E,\ ||s(x)|| \leqslant \rho||x||$.
Si on ne suppose plus s symétrique, seule l'implication $\Longrightarrow$ tient encore puisque :
• si l'on prend un endomorphisme u nilpotent non nul, on a $Sp(u) = \{0\}$ classiquement donc on peut prendre $\rho = 0$ alors que u ne peut pas être 0-lipschitzien car il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = 0_E$.
• si l'on prend la projection p sur $x = y$ parallèlement à $y = 0$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, on a $Sp(p) = \{0, 1\}$ alors que $p(e_2) = e_1 + e_2$ donc $||p(e_2)|| = \sqrt{2}||e_2||$.

12.160 Supposons qu'un tel endomorphisme u soit une isométrie (la linéarité est claire). Alors $||u(a)|| = ||a|| > 0$; or $u(a) = (\alpha||a||^2 - 1)a$ donc $\big|\alpha||a||^2 - 1\big| = 1$ ce qui donne $\alpha = 0$ ou $\alpha = \dfrac{2}{||a||^2}$.

Réciproquement :
- si $\alpha = 0$, $u = -\mathrm{id}_E$ est bien une isométrie vectorielle (symétrie centrale).
- si $\alpha = \dfrac{2}{||a||^2}$, $u(a) = a$ et $u(x) = -x$ pour $x \perp a$. u est la symétrie orthogonale par rapport à $D = \mathrm{Vect}(a)$.

12.161 On vérifie que ${}^t AA = I_3$ donc A est orthogonale. De plus, $\det(A) = 1$ par le calcul donc f est une rotation de $\mathbb{R}^3$. On résout $AX = X$ et l'axe de cette rotation est dirigé par le vecteur $v = (3, 1, -1)$. On sait que si θ est l'angle de cette rotation, $\mathrm{Tr}\ (A) = 1 + 2\cos\theta = -\frac{2}{3}$ donc $\cos(\theta) = -\frac{5}{6}$.

Si $u = (0, 1, 0)$, alors $u \notin \mathrm{Vect}(v)$ et $[v, u, f(v)] = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$ donc $\sin\theta > 0$ et $\theta = \mathrm{Arccos}\Big(-\frac{5}{6}\Big)$.

12.162 Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral et comme $X^3 + 4X^2 + 5X = X(X + 2 - i)(X + 2 + i)$ est annulateur de A, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, -2 + i, -2 - i\}$. Comme on sait que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}) = \{0\}$ donc 0 est la seule valeur propre de A. Or A est diagonalisable : $A = 0$. Réciproquement, 0 est solution du problème. $A = 0$ est donc la seule matrice vérifiant les hypothèses.

12.163 **a.** Si $A^2 = A^T$, alors $A^4 = (A^2)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T = (A^T)^T = A$ donc $P = X^4 - X = X(X^3 - 1)$ est annulateur de A. Mais comme les racines de $X^3 - 1$ sont les trois racines cubiques de l'unité, $P = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$. Les valeurs propres de A étant forcément racines de tout polynôme annulateur de A, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1, j, j^2\}$. De plus, comme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b. Si 0 est valeur propre de A, comme A est réelle et que $\mathrm{Tr}\ (A)$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur ordre de multiplicité (puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$), la seconde valeur propre de A est aussi réelle : elle vaut donc 0 ou 1 d'après la question **a.**. Si elle valait 0, comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, la matrice A serait alors semblable à la matrice nulle, donc serait égale à la matrice nulle, ce qui a été exclu. Dans ces conditions, on a $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

Par conséquent, le polynôme $X(X - 1)$ annule A qui est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, d'où l'existence d'une matrice $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ (les deux valeurs propres 0 et 1 sont forcément simples). Ainsi, $A^2 = QD^2Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$ ce qui montre que $A^2 = A = A^T$ donc que A est symétrique. Le théorème spectral (version matricielle) montre alors que A est orthosemblable à la matrice D (ce qui équivaut à l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A), d'où l'existence d'une matrice P orthogonale (matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$) telle que $A = PDP^T$.

c. Si on suppose que A n'a pas de valeur propre réelle, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \{j, j^2\}$ d'après la question **a.**. Mais comme A est réelle, si j est valeur propre de A, alors $\bar{j} = j^2$ l'est aussi, et vice-versa. On en déduit donc que $\mathrm{Sp}(A) = \{j, j^2\}$ et que A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à la matrice $D' = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$, d'où l'existence d'une matrice $U \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = UD'U^{-1}$. Mais comme j et j^2 sont des racines cubiques de l'unité, on a $D'^3 = I_2$ d'où $A^3 = UD'^3U^{-1} = UI_2U^{-1} = I_2$ et on en déduit que $A^2 = A^{-1} = A^T$ donc que A est orthogonale. Comme $\det(A^3) = \det(A)^3 = \det(I_2) = 1$, on a $\det(A) = 1$ et A est l'une des matrices R_θ du cours. Or $(R_\theta)^3 = R_{3\theta} = I_2$ implique alors $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$. Mais $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ n'est pas possible car alors on aurait $R_\theta = I_2$ avec 1 comme valeur propre double. Les deux seules matrices A qui conviennent dans ce cas sont $R_{2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ ou $R_{-2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

12.164 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique réelle et a ses valeurs propres positives, alors d'après le théorème spectral, il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = PD^tP$. Posons $B = P\Delta^tP$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. On vérifie alors que $A = {}^tBB$ car $\Delta^2 = D$.
Réciproquement, si $A = {}^tBB$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors il est clair que ${}^tA = A$ donc A est symétrique. Toutes ses valeurs propres sont donc réelles d'après le théorème spectral. De plus, si λ est une valeur propre de A, alors il existe $X \neq 0$ tel que $AX = {}^tBBX = \lambda X$. On multiple à gauche par ${}^tX$ et on a $||AX||^2 = \lambda||X||^2$ d'où $\lambda \geqslant 0$ car $||X||^2 > 0$ puisque $X \neq 0$. Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
Par double implication : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique à valeurs propres positives $\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tBB$.

12.165 Comme ϕ est linéaire en dimension finie, ϕ est continue donc lipschitzienne et il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que $\forall u \in E,\ ||\phi(u)|| \leqslant k||u||$ donc $\{||\phi(u)|| \mid ||u|| = 1\} \subset \mathbb{R}$ est majoré par k et $M_1 = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{||u||=1} ||\phi(u)||$ existe. Par Cauchy-Schwarz, $|(\phi(u)|u)| \leqslant ||\phi(u)||\,||u|| \leqslant k$ si $||u|| = 1$ et $\{|(\phi(u)|u)| \mid ||u|| = 1\} \subset \mathbb{R}$ est aussi majoré par k donc $M_2 = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{||u||=1} |(\phi(u)|u)|$ existe.
Pour u unitaire, d'après Cauchy-Schwarz : $|(\phi(u)|u)| \leqslant ||\phi(u)||\,||u|| = ||\phi(u)|| \leqslant M_1$ donc $M_2 \leqslant M_1$.
Soit $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de ϕ et $(v_1, \cdots, v_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés. Supposons par exemple que $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_1|$, alors $|\lambda_n| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)} |\lambda|$ et $|(\phi(v_n)|v_n)| = |\lambda_n|(v_n|v_n) = |\lambda_n|$ donc $M_2 \geqslant |\lambda_n|$. De plus, si $x = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \in E$, on a $||\phi(x)||^2 = \left|\left|\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right|\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \leqslant |\lambda_n| \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = |\lambda_n|\,||x||^2$ ainsi $M_1 \leqslant |\lambda_n|$. Alors $M_1 \leqslant M_2$ et, par double inégalité : $M_1 = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{||u||=1} ||\phi(u)|| = \operatorname*{Sup}_{||u||=1} |(\phi(u)|u)| = M_2$.

12.166 La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable. $M = I_n - \frac{1}{n}J$ avec $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et comme J est de rang 1, le sous-espace propre $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Or $f(u) = 0$ donc $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$ contient la droite $\mathrm{Vect}(u)$. On sait que $E_1(f)$ et $E_0(f)$ sont en somme directe donc $\mathbb{R}^n = E_0(f) \oplus E_1(f)$ et ces deux sous-espaces propres sont même orthogonaux d'après le théorème spectral.
Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\Big(e_i - \frac{1}{n}u\Big) = x - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)u = x - \frac{1}{n}(x|u)u$ d'après la matrice M. L'endomorphisme f est la projection orthogonale sur l'hyperplan $E_1(f)$.

12.167 Si f et g sont continues et de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$, alors, comme $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$, la fonction fg est aussi continue et intégrable (par comparaison) sur $\mathbb{R}$ et $[f, g]$ existe bien.
La bilinéarité de $[.,.]$ provient de la linéarité de l'intégrale, la symétrie et la positivité sont claires. De plus, si $f \in E$ et $[f, f] = 0$, alors $\int_{\mathbb{R}} f^2 = 0$ donc, f^2 étant continue et positive, ceci implique que $f^2 = 0$ donc $f = 0$. Par conséquent, $[.,.]$ est bien un produit salaire sur E.
La matrice Q_r est clairement symétrique réelle donc a toutes ses valeurs propres réelles par le théorème spectral. Si $X \in \mathbb{R}^n$, on trouve par un calcul classique ${}^tXQ_rX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\varphi_i|\varphi_j)x_i x_j = ||\sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k||^2$ donc Q_r est symétrique positive. Or Q_r est inversible par hypothèse donc 0 n'est pas valeur propre de Q_r. Ainsi, toutes les valeurs propres de Q_r sont strictement positives et a fortiori la plus petite d'entre elles.
$(\Longrightarrow)$ si $\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$ alors $\exists (a_1, \cdot, a_r) \in \mathbb{R}^r,\ \varphi_{r+1} = a_1\varphi_1 + \cdots + a_r\varphi_r$. Par bilinéarité du produit scalaire, la $r+1$-ième colonne (notée C_{r+1}) de Q_{r+1} est combinaison linéaire des r premières : $C_{r+1} = a_1C_1 + \cdots + a_rC_r$ donc Q_{r+1} n'est pas inversible.
$(\Longleftarrow)$ Si Q_{r+1} n'est pas inversible, alors comme les r premières colonnes de Q_{r+1} ne sont pas liées (sinon en enlevant les termes de la dernière ligne, les r colonnes de Q_r seraient aussi liées ce qui contredirait

l'inversibilité de Q_r), c'est forcément que la colonne $r+1$ est combinaison linéaire des r premières colonnes : $C_{r+1} = a_1 C_1 + \cdots + a_r C_r$ avec $(a_1, \cdot, a_r) \in \mathbb{R}^r$. Ceci signifie que $\forall i \in [\![1; r+1]\!]$, $(\varphi_i | \varphi_{r+1}) = \sum_{j=1}^{r} a_j (\varphi_i | \varphi_j)$ qui se traduit par $\left(\varphi_i \middle| \varphi_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi_j\right) = 0$. Le vecteur $x = \varphi_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi_j$ est donc orthogonal à tous les vecteurs φ_k (pour $k \in [\![1; r+1]\!]$) donc il est orthogonal à lui-même : il est donc nul. Par conséquent $\varphi_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi_j$ donc $\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$.

Avec les notations précédentes, on a $\left|\left|\varphi_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi_j\right|\right|^2 = 0$. Or, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on peut aussi écrire $N = \left|\left|\varphi_{r+1+k} - \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi_{j+k}\right|\right|^2 = \left(\varphi_{r+1+k} - \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_{i+k} \middle| \varphi_{r+1+k} - \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi_{j+k}\right)$ donc on a développant par bilinéarité $N = (\varphi_{r+1+k} | \varphi_{r+1+k}) - \sum_{j=1}^{r} a_j (\varphi_{r+1+k} | \varphi_{j+k}) - \sum_{i=1}^{r} a_i (\varphi_{i+k} | \varphi_{r+1+k}) - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i a_j (\varphi_{i+k} | \varphi_{j+k})$.

Mais par hypothèse, ceci devient : $N = (\varphi_{r+1} | \varphi_{r+1}) - \sum_{j=1}^{r} a_j (\varphi_{r+1} | \varphi_j) - \sum_{i=1}^{r} a_i (\varphi_i | \varphi_{r+1}) - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i a_j (\varphi_i | \varphi_j)$ donc $N = \left|\left|\varphi_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi_j\right|\right|^2 = 0$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_{r+1+k} \in \mathrm{Vect}(\varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_{r+k})$.

On montre maintenant par une récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\varphi_k \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$. L'initialisation est faite ci-dessus pour $n \leqslant r+1$. Si, pour $n \geqslant r+1$, on a $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\varphi_k \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$, alors $\varphi_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_{n-r+1}, \cdots, \varphi_n)$ or tous ces vecteurs $\varphi_{n-r+1}, \cdots, \varphi_n$ sont dans $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$ donc a fortiori $\varphi_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$. L'hérédité est établie.

12.168 Méthode 1 : si f est inversible, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, $\mathrm{Im}\,(f) = E$ et $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$. Sinon, en notant les valeurs propres distinctes de f : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$ non nuls, on a $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \left(\bigoplus_{k=2}^{r} E_{\lambda_k}(f)\right)$.
Or, si $\lambda_k \neq 0$, $E_{\lambda_k}(f) \subset \mathrm{Im}\,(f)$. En posant $F = \bigoplus_{k=2}^{r} E_{\lambda_k}(f)$, on a $F \subset \mathrm{Im}\,(f)$ et F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$.
Avec la formule du rang, ceci impose $\dim(F) = \mathrm{rang}\,(f)$ donc $F = \mathrm{Im}\,(f)$ et on a aussi $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.
Méthode 2 : avec $(x, y) \in \mathrm{Ker}\,(f) \times \mathrm{Im}\,(f)$, $\exists z \in E$, $y = f(z)$ d'où $(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0_E|z) = 0$. On vient d'établir que $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}\,(f)$ et on conclut $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$ par le théorème du rang.
C'est important : **Si f est symétrique, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont supplémentaires orthogonaux**.
Si $f \in S^+(E)$ et $\dim(E) = n$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs propres de f tels que $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $f(v_k) = \lambda_k v_k$ avec $\lambda_k \geqslant 0$. Soit h l'unique endomorphisme de E qui vérifie les conditions $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $h(v_k) = \sqrt{\lambda_k} v_k$. Comme h possède une base orthonormale de vecteurs propres, h est un endomorphisme symétrique. De plus, ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_k} \geqslant 0$ donc $h \in S^+(E)$.
Par construction, on a $h^2 = f$ (on le vérifie sur la base $\mathcal{B}$).
Soit deux endomorphismes symétriques positifs f et g de E.
D'après la question précédente, il existe h et k symétriques positifs tels que $h^2 = f$ et $k^2 = g$.
Les inclusions $\mathrm{Ker}(f+g) \supset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ sont vraies en général.
• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$, alors $f(x) + g(x) = 0_E$. Ainsi, $(x|f(x) + g(x)) = 0 = (x|f(x)) + (x|g(x))$ or $(x|f(x)) \geqslant 0$ et $(x|g(x)) \geqslant 0$ donc $(x|f(x)) = (x|g(x)) = 0$. Puisque h est symétrique : $(x|f(x)) = (x|h^2(x)) = ||h(x)||^2 = 0$ donc $h(x) = 0_E$. De même $k(x) = 0_E$. On en déduit que $f(x) = h(h(x)) = 0_E$. De même $g(x) = 0_E$ et on a bien $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. On conclut à $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ par double inclusion.

• $f+g$ est aussi symétrique et, pour deux sous-espaces F et G d'un espace euclidien, on a $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Ker}(f)^\perp + \mathrm{Ker}(g)^\perp = (\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g))^\perp = (\mathrm{Ker}(f+g))^\perp = \mathrm{Im}\,(f+g)$.

12.169 **a.** Classiquement, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $S_n+iT_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \sum\limits_{k=1}^{n}(e^{i\theta})^k$. Comme $e^{i\theta}\neq 1$ car $\theta\not\equiv 0\ [\pi]$, par les formules d'Euler et la technique de l'"angle moitié" : $S_n+iT_n = \dfrac{e^{i\theta}}{n}\times\dfrac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Ainsi, il vient $S_n = \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{n\sin(\theta/2)}$ et $T_n = \dfrac{\sin^2\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{n\sin(\theta/2)}$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$ car $\sin$ et $\cos$ sont des fonctions bornées.

b. • Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et r une rotation de E. Dans toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, d'après le cours, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R_\theta = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ si θ est l'angle de r. Comme composer deux rotations de même centre et d'angles α et β conduit à créer une rotation d'angle $\alpha+\beta$, on montre par une récurrence simple que $R_\theta^n = \begin{pmatrix}\cos(n\theta) & -\sin(n\theta)\\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta)\end{pmatrix}$. Si $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} r^k$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_n) = \begin{pmatrix}S_n & -T_n\\ T_n & S_n\end{pmatrix}$. Le calcul précédent montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de dimension finie). Pour $x\in E$, $\varphi_x : u\mapsto u(x)$ qui va de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}^2$ est linéaire donc continue (on est en dimension finie) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_x(v_n) = \varphi_x(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n) = \varphi_x(0) = 0_E$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} r^k(x) = 0_E$ pour tout $x\in E$. On peut aussi raisonner avec les suites coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$.

• Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et r une rotation de E, il existe d'après le cours une base orthonormale $\mathcal{B} = (a,b,c)$ de E adaptée à cette rotation telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R_\theta\end{pmatrix}$ (par blocs). Comme ci-dessus, si $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} r^k$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_n) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & S_n & -T_n\\ 0 & T_n & S_n\end{pmatrix}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & S_n & -T_n\\ 0 & T_n & S_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et cette matrice est celle de la projection orthogonale p sur l'axe $\mathrm{Vect}(a)$. Comme avant, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = p$ (dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E)$ de dimension 9). Pour $x\in E$, $\varphi_x : u\mapsto u(x)$ qui va de $\mathcal{L}(E)$ dans E est linéaire donc continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_x(v_n) = \varphi_x(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n) = \varphi_x(p) = p(x) = (x|a)a$. On a bien montré que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} r^k(x) = (x|a)a$ pour tout $x\in E$.

c. Si on prend $x\in\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $y\in\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E)$, il existe un vecteur $z\in E$ tel que $y = u(z)-z$ donc $(x|y) = (x|u(z)-z) = (x|u(z)) - (x|z) = (u(x)|u(z)) - (x|z) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux. Ainsi $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E)$ sont en somme directe, et par la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E)) = \dim(E)$, on en déduit donc que $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E. De plus, $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E)$ sont bien des supplémentaires orthogonaux, ce qui se traduit par $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E)^\perp$.

Soit $x\in E$ qu'on décompose $x = y+z$ avec $y\in\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $z\in\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E)$. Comme il existe un vecteur $v\in E$ tel que $z = u(v)-v$, on a $u^k(x) = u^k(y) + u^k(u(v)-v) = y + u^{k+1}(v) - u^k(v)$. Par télescopage, toujours en notant $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u^k$, on a $v_n(x) = y + \dfrac{u^{n+1}(v)-u(v)}{n}$. Comme u est une isométrie, $||u^{n+1}(v)|| = ||u(v)|| = ||v||$. Ainsi, $||v_n(x)-y|| \leqslant \dfrac{2||v||}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. On retrouve les cas particuliers de **b.** dans cette conclusion générale puisque pour une rotation r d'un plan euclidien E on a $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_E) = \{0\}$ et, pour une rotation r d'angle θ autour de l'axe D orienté par le vecteur a d'un espace euclidien de dimension 3, on a $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(a)$.

12.170 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 + 9A = 0$, alors $P = X^3 + 9X = X(X - 3i)(X + 3i)$ est annulateur de A donc le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P, à savoir $\{0, 3i, -3i\}$.
Comme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si P était diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme la seule valeur propre réelle possible de A est 0, la matrice A serait semblable à la matrice nulle donc elle-même nulle ce qui contredit l'énoncé. Ainsi A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme A est réelle, $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ donc les ordres de multiplicité de $3i$ et de $-3i$ sont les mêmes. Comme la somme des ordres de 0, $3i$ et $-3i$ vaut n, l'ordre de multiplicité de 0 est impaire donc pas nulle. Ainsi 0 est valeur propre de A et A n'est donc pas inversible.
Si A était symétrique, elle serait diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral et on a déjà vu que c'était impossible car $A \neq 0$. Ainsi A n'est pas symétrique.

12.171 Du cours : si M est symétrique réelle, toutes ses valeurs propres sont réelles d'après le théorème spectral.
$(\Longrightarrow)$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de M, il existe donc un vecteur $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. On a donc ${}^tXMX = \lambda ||X||^2 > 0$ donc $\lambda > 0$ car $||X||^2 > 0$.
$(\Longleftarrow)$ Si les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de M sont toutes strictement positives et si $(V_1, \cdots, V_n)$ est une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (elle existe d'après le théorème spectral), on décompose $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k V_k \neq 0$ et ${}^tXMX = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$ (classique). Ainsi, comme $X \neq 0$, au moins l'un des x_k est non nul et $\lambda_k x_k^2$ sera strictement positif donc ${}^tXMX > 0$.

Comme toutes les valeurs propres de M sont strictement positives, 0 n'est pas valeur propre de M donc M est "injective" donc "bijective" : M est inversible. Si $M = PD{}^tP$ avec D diagonale contenant les valeurs propres (avec leurs ordres de multiplicité) et si P est orthogonale, alors $M^{-1} = PD^{-1}{}^tP$ donc M^{-1} est aussi symétrique et D^{-1} est aussi diagonale avec des valeurs propres (comme M) strictement positives donc M^{-1} vérifie la même propriété que M.
Si on avait un couple de matrices symétriques définies positives qui vérifiait $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$, alors en multipliant par $A+B$, on aurait $I_n = (A^{-1} + B^{-1})(A + B) = I_n + A^{-1}B + B^{-1}A + I_n$ donc $A^{-1}B + B^{-1}A + I_n = 0$ ce qui devient, en multipliant par A : $A + B + AB^{-1}A = 0$. Ainsi, pour tout vecteur colonne X, on aurait ${}^tXAX + {}^tXBX + {}^tX{}^tAB^{-1}AX = 0$. Or chacun de ces trois termes est positif ou nul car ${}^tX{}^tAB^{-1}AX = {}^tYBY$ avec $Y = AX$ donc la somme ne peut être nulle que si chacun est nul. Or ${}^tXAX = 0$ implique $X = 0$. On aura donc une contradiction dès qu'on prend un vecteur non nul. Il n'existe donc pas de couples $(A, B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

12.172 Soit $(x, y) \in \mathrm{Im}\,(u) \times \mathrm{Ker}(u)$, alors $\exists z \in E,\ x = u(z)$ donc $(x|y) = (u(z)|y) = -(z|u(y)) = -(z|0_E) = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont orthogonaux ce qui montre l'inclusion $\mathrm{Im}\,(u) \subset (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$. Par la formule du rang, on a $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}\,(u))$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,(u)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim((\mathrm{Ker}(u))^{\perp})$ et on déduit par inclusion et égalité des dimensions que $\mathrm{Im}\,(u) = (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$.

Ainsi, les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Si $\text{Im}(u) = \{0_E\}$, alors $u = 0$ donc la matrice de u est de la forme annoncée dans toute base orthonormale.
Si $\text{Im}(u) \neq \{0_E\}$, comme $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$, u induit un automorphisme v de $\text{Im}(u)$ par le théorème du rang et si on considère une base orthonormée $\mathcal{B}'$ et $\text{Im}(u)$ et $\mathcal{B}''$ de $\text{Ker}(u)$, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ est une base orthonormale de E et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique car $M = ((e_i|u(e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ donc A est aussi antisymétrique. Or, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$ donc $\det(v) = \det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^r\det(A)$ en notant $r = \text{rang}(u)$. Mais puisque v est un automorphisme, $\det(v) \neq 0$ donc $(-1)^r = 1$ donc r est pair. En notant $r = 2k$, on peut noter $\mathcal{B}'' = (v_{2k+1}, \cdots, v_n)$ la base orthonormale choisie dans $\text{Ker}(u)$.
Par hypothèse, $\forall (x,y) \in F^2,\ (u^2(x)|y) = (v^2(x)|y) = -(u(x)|u(y)) = -(-(x|u^2(y))) = (x|u^2(y)) = (x|v^2(y)$ donc $s = v^2$ est un endomorphisme symétrique de $\text{Im}(u)$. De plus, $s \in GL(\text{Im}(u))$ car $v \in GL(\text{Im}(u))$. Par le théorème spectral, s est diagonalisable dans une base orthonormale de $\text{Im}(u)$.

• Soit w_1 un vecteur propre propre de s, alors il existe un réel λ_1 non nul tel que $s(w_1) = \lambda_1 w_1$. Or $(v^2(w_1)|w_1) = (s(w_1)|w_1) = \lambda_1||w_1||^2 = -(v(w_1)|v(w_1)) = -||v(w_1)||^2 < 0$ car $v(w_1) \neq 0_E$ donc $\lambda_1 < 0$. De plus, $(v(w_1)|w_1) = -(w_1|v(w_1))$ donc $v(w_1) \perp w_1$. Posons $v_1 = \dfrac{w_1}{||w_1||}$ et $v_2 = \dfrac{v(w_1)}{||v(w_1)||}$ de sorte que v_1 et v_2 sont unitaires et orthogonaux. De plus, $v(v_1) = \dfrac{v(w_1)}{||w_1||} = \dfrac{||v(w_1)||}{||w_1||}v_2$. Or on a vu précédemment que $\left(\dfrac{||v(w_1)||}{||w_1||}\right)^2 = -\lambda_1$ donc $\dfrac{||v(w_1)||}{||w_1||} = \sqrt{-\lambda_1}$. De même, $v(v_2) = \dfrac{v^2(w_1)}{||v(w_1)||} = \dfrac{\lambda_1 w_1}{||v(w_1)||} = \dfrac{\lambda_1||w_1||}{||v(w_1)||}v_1$ et, à nouveau, $v(v_2) = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{-\lambda_1}}v_1 = -\sqrt{-\lambda_1}v_1$. Ainsi, en posant $a_1 = \sqrt{-\lambda_1} > 0$, $u(v_1) = a_1 v_2$ et $u(v_2) = -a_1 v_1$.

• Comme le plan $P = \text{Vect}(v_1, v_2)$ est stable par u d'après les calculs précédents, son orthogonal dans $\text{Im}(u)$, noté $P^\perp$, l'est aussi ; en effet, si $y \in P^\perp$ et $x \in P$, alors $(u(y)|x) = -(y|u(x))$ car $y \in P^\perp$ et $u(x) \in P$. Ainsi v induit sur $P^\perp$ (de dimension $2k-2$) un endomorphisme antisymétrique et on continue à créer des plans stables jusqu'à obtenir $\text{Im}(u) = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$ ou chaque P_i vaut $\text{Vect}(v_{2i-1}, v_{2i})$ avec $u(v_{2i-1}) = a_i v_{2i}$ et $u(v_{2i}) = -a_i v_{2i-1}$ avec $\lambda_i = -a_i^2$ une valeur propre strictement négative de s.

• On construit comme ceci une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots, v_{2k-1}, v_{2k}, v_{2k+1}, \cdots, v_n)$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Delta_k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0_{n-2k} \end{pmatrix}$ où $\Delta_i = \begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$ et $a_i \in \mathbb{R}_+^*$ comme attendu.

12.173 **a.** Espace euclidien : un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Projecteur : endomorphisme tel que $p^2 = p$, la projection sur $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{id}_E - p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.
Base orthonormée : une base $(v_1, \cdots, v_n)$ de E telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (v_i|v_j) = \delta_{i,j}$.
b. ($\Longrightarrow$) si p est orthogonal, soit $x_k = y_k + z_k$ avec $y_k \in \text{Im}(p)$ et $z_k \in \text{Ker}(p)$ pour $k \in \{1,2\}$. Alors $p(x_1) = y_1$ et $p(x_2) = y_2$ par construction, ainsi, comme $y_1 \perp z_2$ et $y_2 \perp z_1$, p est bien symétrique car $(p(x_1)|x_2) = (y_1|y_2 + z_2) = (y_1|y_2) + (y_1|z_2) = (y_1|y_2) = (y_1|y_2) + (z_1|y_2) = (y_1 + z_1|y_2) = (x_1|p(x_2))$.
($\Longleftarrow$) Si p est symétrique, soit $y \in \text{Im}(p)$ et $z \in \text{Ker}(p)$, alors $(y|z) = (p(y)|z) = (y|p(z)) = (y|0_E) = 0$ (car $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$) donc $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$ ce qui justifie que p est un projecteur orthogonal.
Par double implication, si p est un projecteur : p est orthogonal si et seulement si p est symétrique.
c. Si p est orthogonal, pour $k \in [\![1;n]\!]$, $||p(e_k)||^2 = (p(e_k)|p(e_k)) = (e_k|p^2(e_k)) = (e_k|p(e_k))$ car p est symétrique. Or, $(e_k|p(e_k))$ est le coefficient en case (k,k) de la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ puisque $\mathcal{B}$ est une

base orthonormale. On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} ||p(e_k)||^2 = \mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(p)$. Mais on sait aussi, en notant r le rang de p, qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ (adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(p)$) telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (par blocs). Comme A et D sont semblables : $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(D) = r = \mathrm{rang}\,(p)$.
Finalement : $\sum_{k=1}^{n} ||p(e_k)||^2 = \mathrm{Tr}\,(p) = \mathrm{rang}\,(p)$.

d. Soit $(x, y) \in E^2$, si on note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base orthonormale $\mathcal{B}$, la relation $(p(x)|y) = (x|p^*(y))$ se résume à l'équation ${}^t(AX)Y = {}^tX({}^tAY)$ qui est évidente.

e. Bien sûr, on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(p^* \circ p)$ car si $p(x) = 0_E$, alors $p^* \circ p(x) = p^*(p(x)) = p^*(0_E) = 0_E$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p^* \circ p)$, alors $p^* \circ p(x) = 0_E$ donc $0 = (x|p^* \circ p(x)) = ||p(x)||^2$ d'après la question précédente donc $||p(x)|| = 0$ qui traduit $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Par double inclusion : $\mathrm{Ker}(p^* \circ p) = \mathrm{Ker}(p)$.

12.174 S est symétrique réelle donc ses valeurs propres sont toutes réelles et S est diagonalisable par le théorème spectral. Soit une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^t({}^tXAX) = {}^tX{}^tAX$ donc ${}^tXAX = {}^tXSX$.
S est orthosemblable à une matrice diagonale réelle, $\exists P \in O(n)$ telle que $B = PD{}^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
En posant $Y = {}^tPX$, on a ${}^tYY = {}^tXP{}^tP{}^tX = {}^tXX$ donc $\lambda_1{}^tXX = \lambda_1{}^tYY \leqslant {}^tXSX = {}^tYDY \leqslant \lambda_n{}^tYY = \lambda_n{}^tXX$.
Soit maintenant une valeur propre ν (donc forcément $\nu \in \mathbb{R}$) de A, alors il existe un vecteur colonne non nul X tel que $AX = \nu X$ et ${}^tX{}^tA = \nu{}^tX$ donc ${}^tXSX = \nu{}^tXX$ d'où l'on déduit $\nu \in [\lambda_1; \lambda_n]$ car ${}^tXX > 0$.