Concours CCP, 2007
PC, épreuve MATH 2

PARTIE I

I.1. La fonction y est au moins de classe $\mathcal{C}^2$ si elle vérifie (E) puis, comme φ est supposée de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, de la relation $y'' = -\varphi\, y$, on déduit que, si y est supposée de classe $\mathcal{C}^{2k}$ pour un certain entier naturel k, alors y'' est de classe $\mathcal{C}^{2k}$, donc y est de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$. Finalement, y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

I.2. Soit la fonction $z : x \mapsto z(x) = y(-x)$, avec y solution de (E). On a alors z de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, avec $z'(x) = -y'(-x)$, puis $z''(x) = y''(-x)$, donc

$$\forall x \in E \qquad z''(x) + \varphi(x)\, z(x) = y''(-x) + \varphi(x)\, y(-x) = y''(-x) + \varphi(-x)\, y(-x) = 0\ ,$$

puisque φ est paire. Donc z est solution de (E) sur I.

I.3. • Posons $g_0(x) = f_0(-x)$; alors g_0 est solution de (E) d'après **I.2.**, et vérifie les mêmes conditions initiales $g_0(0) = f_0(0) = 1$ et $g_0'(0) = -f_0'(0) = 0$, donc f_0 et g_0 sont solutions du même problème de Cauchy, donc $g_0 = f_0$ d'après le théorème de Cauchy linéaire, autrement dit f_0 est paire.

• De la même façon, la fonction $g_1 : x \mapsto -f_1(-x)$ vérifie le même problème de Cauchy que f_1, donc $g_1 = f_1$, autrement dit f_1 est impaire.

• On sait que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) est un plan vectoriel dans l'espace $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$; or, f_0 et f_1 sont deux éléments de $\mathcal{S}$ linéairement indépendants (en effet, si $\lambda f_0 + \mu f_1 = 0$, en évaluant en 0, on obtient $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$ car f_1 n'est pas la fonction identiquement nulle), donc (f_0, f_1) est un système fondamental de solutions de l'équation homogène (E), autrement dit $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$.

• Soit $f = \lambda f_0 + \mu f_1 \in \mathcal{S}$; alors la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(-x)$ se décompose en $g = \lambda f_0 - \mu f_1$. Alors f est paire **ssi** $g = f$ **ssi** $\mu = 0$ (unicité de la décomposition dans une base), de même f est impaire si et seulement si $\lambda = 0$. Les solutions paires de (E) sont donc les fonctions $f = \lambda f_0$, les solutions impaires sont les fonctions $f = \mu f_1$.

I.4.1. On calcule $u' = \dfrac{w}{f_0^2}$, avec $w(x) = f_1'(x)\, f_0(x) - f_1(x)\, f_0'(x) = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) \end{vmatrix}$: le lecteur perspicace aura reconnu le wronskien du système fondamental (f_0, f_1) de solutions de (E), lequel est réputé ne pas s'annuler sur I (*cf.* cours). En fait, ce wronskien est constant puisque

$$w'(x) = f_1''(x)\, f_0(x) - f_1(x)\, f_0''(x) = \big(-\varphi(x)\, f_1(x)\big)\, f_0(x) - f_1(x)\big(-\varphi(x)\, f_0(x)\big) = 0\ ,$$

et il suffit donc de l'évaluer en 0 pour connaître sa valeur. On a donc

$$\forall x \in I \qquad w(x) = w(0) = f_1'(0)\, f_0(0) - f_1(0)\, f_0'(0) = 1\ , \quad \text{puis} \qquad u' = \frac{1}{f_0^2}\ ,$$

et, en dérivant encore, $u'' = -2\,\dfrac{f_0'}{f_0^3}$, et enfin $\dfrac{u''}{u'} = -2\,\dfrac{f_0'}{f_0}$.

I.4.2. On a $u' = \dfrac{1}{f_0^2}$ (déjà obtenu à la question précédente!), d'où le résultat avec $B = 1$.

I.4.3. On pose donc $u_0(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{f_0(t)^2}$ pour tout $x \in I$. On a $\left(\dfrac{f_1}{f_0}\right)' = \dfrac{1}{f_0^2}$ donc, en intégrant, $\dfrac{f_1}{f_0} = u_0 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. En évaluant en 0, on obtient $C = 0$, finalement $f_1 = u_0 f_0$.

Remarque. La fonction f_0 étant une solution de (E) ne s'annulant pas sur I par hypothèse, toute cette question **I.4.** revient finalement à résoudre complètement l'équation (E) en posant le changement de fonction inconnue $y = u\, f_0$, c'est-à-dire en appliquant la méthode de variation de la constante, étudiée en cours.

I.5.1. La fonction $f : x \mapsto \cos^2 x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, est solution de (E) par hypothèse, et vérifie bien $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc $f_0 = f$ par unicité de la solution du problème de Cauchy. Donc $f_0(x) = \cos^2 x$. Ensuite,

$$\varphi(x) = -\frac{f_0''(x)}{f_0(x)} = \frac{2\ \cos 2x}{\cos^2 x} = 2\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 2\,(1 - \tan^2 x)\ .$$

I.5.2. C'est du calcul (pas bien méchant!) :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{f_0(t)^2} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos^4 t} = \int_0^x (1 + \tan^2 t)\ \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \\ &= \int_0^{\tan x} (1 + u^2)\ \mathrm{d}u = \Big[u + \frac{u^3}{3}\Big]_0^{\tan x} = \tan x + \frac{1}{3}\ \tan^3 x\ . \end{aligned}$$

I.5.3. L'équation (E) est donc $y'' + 2\,(1 - \tan^2 x)\, y = 0$, sur l'intervalle $I = \Big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big[$, on a

$$f_1(x) = u_0(x) f_0(x) = \cos^2 x\Big(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\Big) = \tan x\Big(\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin^2 x\Big) = \frac{1}{3}\tan x(1+2\cos^2 x)\ .$$

Les solutions de (E) sont donc

$$y = A\ \cos^2 x + B\ \tan x\,(1 + 2\ \cos^2 x)\ , \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2\ .$$

PARTIE II

II.1. Posons $z(x) = y(x + 2\pi)$, alors z est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $z''(x) = y''(x + 2\pi)$, donc, φ étant 2π-périodique,

$$z''(x) + \varphi(x)\, z(x) = y''(x + 2\pi) + \varphi(x + 2\pi)\, y(x + 2\pi) = 0\ ,$$

et z est bien solution de l'équation (E).

II.2. Posons $g_0(x) = f_0(x + 2\pi)$ et $g_1(x) = f_1(x + 2\pi)$. D'après **II.1.**, g_0 et g_1 sont solutions de (E), donc appartiennent à l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(f_0, f_1)$ (*cf.* question **I.3**), d'où l'existence (et l'unicité) de ces constantes w_{ij}. On a

$$g_0(0) = f_0(2\pi) = w_{00}\ f_0(0) + w_{10}\ f_1(0) = w_{00}\ .$$

On obtient ainsi $w_{00} = f_0(2\pi)$, $w_{10} = f_0'(2\pi)$, $w_{01} = f_1(2\pi)$ et $w_{11} = f_1'(2\pi)$, donc

$$W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(2\pi) & f_1(2\pi) \\ f_0'(2\pi) & f_1'(2\pi) \end{pmatrix}\ .$$

La matrice W est la matrice de la famille (g_0, g_1) de vecteurs de $\mathcal{S}$ relativement à la base (f_0, f_1).

II.3. Soit $g = a\ f_0 + b\ f_1$ une fonction appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des solutions de (E). Alors, avec les notations introduites en **II.2.**,

$$g(x + 2\pi) = a\ g_0(x) + b\ g_1(x) = (a\ w_{00} + b\ w_{01})\ f_0(x) + (a\ w_{10} + b\ w_{11})\ f_1(x)\ ,$$

et g est 2π-périodique si et seulement si $\begin{cases} a\ w_{00} & +b\ w_{01} = a \\ a\ w_{10} & +b\ w_{11} = b \end{cases}$, soit $W\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Il existe donc une solution 2π-périodique "non triviale" (c'est-à-dire non identiquement nulle) si et seulement s'il existe un couple $(a,b) \neq (0,0)$ vérifiant cette dernière relation, donc si et seulement si $1 \in \mathrm{Sp}(W)$.

II.4. Soit g une solution de (E), non identiquement nulle et 2π-périodique. La fonction $x \mapsto g(-x)$ est solution de (E) d'après **I.2.** et, comme l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est un espace vectoriel, les fonctions $h : x \mapsto g(x) + g(-x)$ et $k : x \mapsto g(x) - g(-x)$ sont aussi solutions de (E). Mais ces fonctions h et k sont aussi 2π-périodiques (immédiat), de plus h est paire et k est impaire ; d'après **I.3.**, il existe des constantes réelles α et β telles que $h = \alpha\ f_0$ et $k = \beta\ f_1$. Ensuite, $g = \dfrac{1}{2}(h+k) = \dfrac{1}{2}\ (\alpha\ f_0 + \beta\ f_1)$. On ne peut donc avoir α et β simultanément nuls, sinon $g = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc, soit $\alpha \neq 0$ (auquel cas $f_0 = \dfrac{1}{\alpha} h$ est 2π-périodique), soit $\beta \neq 0$ (auquel cas $f_1 = \dfrac{1}{\beta} k$ est 2π-périodique), les deux éventualités ne s'excluant pas.

II.5.1. Posons $G(x,t) = K(x,t)\ f_0(t) = e^{k\ \cos x\ \cos t}\ f_0(t)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Le réel $F(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment (donc aucun problème d'intégrabilité), on a

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,t) = -k\ \cos t\ \sin x\ f_0(t)\ K(x,t)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t) = k\ \cos t\ f_0(t)\ K(x,t)\ \big(k\ \cos t\ \sin^2 x - \cos x\big)\ .$$

La fonction f_0 est continue, 2π-périodique, donc bornée, posons $M = \|f_0\|_\infty$. Par ailleurs, on a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad 0 \leq K(x,t) \leq e^{|k|}\ .$$

On en déduit les majorations ("dominations") suivantes :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| \leq |k|\ e^{|k|}\ M\ ; \quad \left|\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq |k|\ (1+|k|)\ e^{|k|}\ M\ .$$

Comme une fonction constante est toujours intégrable sur le segment $[-\pi,\pi]$, ces conditions de domination permettent d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, et d'affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. La parité est évidente.

II.5.2. Calculons :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) = k\ \cos t\ K(x,t)\ \big(k\ \cos t\ \sin^2 x - \cos x\big)\ .$$

(c'est le même calcul que ci-dessus) et, vu le rôle symétrique des variables x et t :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) = k\ \cos x\ K(x,t)\ \big(k\ \cos x\ \sin^2 t - \cos t\big)\ .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) &= k^2\ (\cos^2 t\ \sin^2 x - \cos^2 x\ \sin^2 t)\ K(x,t) \\ &= k^2\ (\sin^2 x - \sin^2 t)\ K(x,t) \\ &= (a - k^2\ \sin^2 t)\ K(x,t) - (a - k^2\ \sin^2 x)\ K(x,t)\ , \end{aligned}$$

ce qui est la première relation demandée.

D'après **II.5.1.**, on peut calculer $F''(x)$ par dérivation sous le signe intégrale, ce qui donne

$$\begin{aligned} F''(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)\,\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)\,\Big[\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) + (a-k^2\,\sin^2 t)\,K(x,t) - (a-k^2\,\sin^2 x)\,K(x,t)\Big]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)\,\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} (a-k^2\,\sin^2 t)\,K(x,t)\,f_0(t)\,\mathrm{d}t - (a-k^2\,\sin^2 x)\,F(x)\ , \end{aligned}$$

ce qui est la deuxième relation demandée.

Enfin, on intègre par parties deux fois :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)\,\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t)\,\mathrm{d}t &= \Big[f_0(t)\,\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f_0'(t)\,\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\Big[f_0'(t)\,K(x,t)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f_0''(t)\,K(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} (a-k^2\,\sin^2 t)\,K(x,t)\,f_0(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(les termes entre crochets sont nuls car les fonctions $t \mapsto f_0(t)\dfrac{\partial K}{\partial t}(x,t)$ et $t \mapsto f_0'(t)K(x,t)$ sont 2π-périodiques, le dernière égalité résulte du fait que f_0 est solution de (E)). En réinjectant dans la "deuxième relation" ci-dessus, il reste

$$F''(x) = -(a-k^2\,\sin^2 x)\,F(x)\ ,$$

autrement dit F est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

II.5.3. F est une fonction paire solution de (E), elle est donc colinéaire (proportionnelle) à f_0, selon **I.3.**

PARTIE III

III.1. La solution générale est $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, donc $f_0(x) = \cos\omega x$ et $f_1(x) = \dfrac{1}{\omega}\sin\omega x$.

III.2. En posant $y(x) = z(\sin x)$, on a $y'(x) = \cos x\; z'(\sin x)$, puis

$$\forall x \in I \qquad z''(x) = -\sin x\; z'(\sin x) + (1-\sin^2 x)\; z''(\sin x)\ .$$

L'équation différentielle (E) devient alors équivalente à

$$\forall x \in I \qquad (1-\sin^2 x)\; z''(\sin x) - \sin x\; z'(\sin x) + \omega^2\; z(\sin x) = 0\ ,$$

soit à

$$\forall X \in]-1,1[\qquad (1-X^2)\; z''(X) - X\; z'(X) + \omega^2\; z(X) = 0\ . \tag{E'}$$

III.3.1. • Bon, ben quand il faut y aller... posons $z(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ sur $]-r, r[$, avec $r > 0$, alors $X\, z'(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n\, X^n$, $z''(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2}\, X^n$ et $X^2\, z''(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n X^n$. On réinjecte cela dans (E'), cela donne

$$\forall X \in\,]-r, r[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[(n+1)(n+2)\, a_{n+2} - n(n-1) a_n - n\, a_n + \omega^2\, a_n\Big]\, X^n = 0\ .$$

L'unicité du développement en série entière permet d'identifier les coefficients ; la fonction $z : X \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ (sous réserve de convergence de la série entière) vérifie (E') sur $]-r, r[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = \dfrac{n^2 - \omega^2}{(n+1)(n+2)}\, a_n$.

• On obtient alors

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad a_{2p} = \frac{(-\omega^2)(4-\omega^2)\cdots\big(4(p-1)^2 - \omega^2\big)}{1 \times 2 \times \cdots \times (2p)}\, a_0 = \frac{a_0}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - \omega^2)\ ,$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad a_{2p+1} = \frac{(1-\omega^2)(9-\omega^2)\cdots\big((2p-1)^2 - \omega^2\big)}{2 \times 3 \times \cdots \times (2p+1)}\, a_1 = \frac{a_1}{(2p+1)!} \prod_{k=0}^{p-1} \big((2k+1)^2 - \omega^2\big)\ .$$

• L'équation (E') admet des solutions polynomiales non identiquement nulles si et seulement si, avec $a_0 \neq 0$ ou $a_1 \neq 0$, les coefficients a_{2p} ou a_{2p+1} s'annulent à partir d'un certain rang. Cela se produit si, soit l'un des facteurs $4k^2 - \omega^2$, soit l'un des facteurs $(2k+1)^2 - \omega^2$, est nul, autrement dit (puisque ω est supposé strictement positif) si et seulement si $\omega \in \mathbb{N}^*$.

• La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ peut être considérée comme la somme des deux séries entières $\sum_{p \geq 0} a_{2p} X^{2p}$ et $\sum_{p \geq 0} a_{2p+1} X^{2p+1}$: si l'une des deux est un polynôme, elle a alors un rayon de convergence infini, sinon ses coefficients sont tous non nuls et le rayon de convergence peut être obtenu par la règle de d'Alembert. Pour la série des termes pairs, si ω n'est pas un entier pair, on a

$$\frac{a_{2p+2}\, X^{2p+2}}{a_{2p}\, X^{2p}} = \frac{4p^2\, \omega^2}{(2p+1)(2p+2)}\, X^2 \quad \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \quad X^2\ ,$$

d'où un rayon de convergence égal à 1 ; de même, pour la série des termes impairs,

$$\frac{a_{2p+3}\, X^{2p+3}}{a_{2p+1}\, X^{2p+1}} = \frac{(2p+1)^2\, \omega^2}{(2p+2)(2p+3)}\, X^2 \quad \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \quad X^2\ ,$$

et la même conclusion. Comme le rayon de convergence de la somme de deux séries entières est au moins égal au minimum des rayons de convergence des deux séries, on déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ vaut au moins 1.

III.3.2. Soient y_0 et y_1 les fonctions définies sur I par $y_0(x) = z_0(\sin x)$ et $y_1(x) = z_1(\sin x)$. D'après **III.2.**, ces deux fonctions sont solutions de (E) sur I, puisque z_0 et z_1 sont solutions de (E') sur $]-1,1[$. D'autre part, $y_0(0) = z_0(0) = a_0 = 1$ et $y_0'(0) = z_0'(0) = a_1 = 0$, donc $y_0 = f_0$. De la même façon, $y_1 = f_1$. On en déduit que

$$\forall x \in I \qquad \cos \omega x = f_0(x) = y_0(x) = z_0(\sin x) \quad \text{et} \quad \sin \omega x = \omega\, f_1(x) = \omega\, z_1(\sin x)\ .$$

III.3.3. • Posons $\omega = 2m$, on a alors, sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(2m\, x) = z_0(\sin x)$, la fonction z_0 étant dans ce cas polynomiale puisque $\omega \in \mathbb{N}^*$, plus précisément

$$\begin{aligned} z_0(X) = P_m(X) &= \sum_{p=0}^{m} \Big(\frac{1}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - 4m^2) \Big)\, X^{2p} \\ &= \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p\, 4^p}{(2p)!} \Big[\prod_{k=0}^{p-1} (m^2 - k^2) \Big]\, X^{2p}\ . \end{aligned}$$

• Posons $\omega = 2m+1$, alors $\forall x \in I \quad \sin\big((2m+1)x\big) = (2m+1)\, z_1(\sin x) = Q_m(\sin x)$, avec

$$Q_m(X) = (2m+1) \sum_{p=0}^{m} \Big(\frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \prod_{k=0}^{p-1} \big((2m+1)^2 - (2k+1)^2\big) \Big)\, X^{2p+1}\ .$$

• Ces relations $\cos 2mx = P_m(\sin x)$ et $\sin(2m+1)x = Q_m(\sin x)$, vraies sur l'intervalle ouvert $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, sont valables sur l'intervalle fermé $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par continuité. Comme chaque membre de l'égalité est conservé par la translation $x \mapsto x + \pi$ pour la première formule avec $\omega = 2m$ (et changé en son opposé pour la deuxième formule avec $\omega = 2m+1$), la relation reste donc vraie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Enfin, les fonctions considérées étant toutes 2π-périodiques, les relations obtenues sont vraies sur $\mathbb{R}$.

Le lecteur pourra s'amuser à vérifier que

$$\begin{aligned} P_1(X) &= 1 - 2\, X^2 \\ P_2(X) &= 1 - 8\, X^2 + 8\, X^4 \\ Q_1(X) &= 3\, X - 4\, X^3 \\ Q_2(X) &= 5\, X - 20\, X^3 + 16\, X^5 \end{aligned}$$

Les polynômes P_m et Q_m sont "voisins" des polynômes de Tchebychev.