DEVOIR 22 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2024-2025 **mardi 11 mars 2025**

QCM

1 *Matrices orthogonales de taille* 3 *: soit* $A \neq I_3 \in SO(3)$ *et* u *la rotation d'angle* θ *autour de* D *orienté par* a *unitaire de* $\mathbb{R}^3$ *(euclidien orienté canonique) canoniquement associée et* $x \neq 0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$

1.1 $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$

1.2 $\mathrm{sgn}(\sin(\theta)) = \mathrm{sgn}([a, x, u(x)])$

1.3 $\mathrm{tr}(A) = 0 \Longrightarrow A^3 = I_3$

1.4 $(A = A^T) \Longleftrightarrow u$ demi-tour

2 *Endomorphisme symétrique : soit* E *un espace euclidien,* u *un endomorphisme diagonalisable de* E*,* $\mathcal{B}$ *une base de* E *composée de vecteurs propres de* u*,* F *un sous-espace de* E *stable par* u

2.1 $\mathcal{B}$ b.o.n. $\Longrightarrow u$ autoadjoint

2.2 u autoadjoint $\Longrightarrow \mathcal{B}$ b.o.n.

2.3 $F^\perp$ est stable par $u \Longrightarrow u$ autoadjoint

2.4 u autoadjoint $\Longrightarrow F^\perp$ est stable par u

3 *Endomorphisme symétrique : soit* E *un espace euclidien de dimension* n*,* $\mathcal{B}$ *une base de* E*,* u *un endomorphisme autoadjoint de* E *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

3.1 A est une matrice symétrique

3.2 A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

3.3 Si u est une projection, u est une projection orthogonale

3.4 Si u est une isométrie, u est une symétrie orthogonale

4 *Matrices symétriques positives : soit* A*,* B *deux matrices symétriques de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dont le spectre est inclus dans* $\mathbb{R}_+$ *(leurs valeurs propres sont positives : on l'écrit* $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$*)*

4.1 $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ X^T A Y \geqslant 0$

4.2 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = P^T P$

4.3 $A + B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

4.4 $AB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Énoncé Rappeler le théorème spectral dans sa version vectorielle. Définir les objets !

Preuve Soit E euclidien de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Montrer que : $\big(u$ est un endomorphisme symétrique$\big) \Longleftrightarrow \big(A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice symétrique$\big)$.

Exercice 1 Soit la matrice symétrique $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice orthogonale $P \in O(3)$ et une matrice diagonale D telles que $A = PD\,{}^tP$.

Exercice 2 Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base orthonormale de E, u un endomorphisme autoadjoint positif de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note m la valeur maximale des $a_{i,i}$, c'est-à-dire $m = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}}(a_{i,i})$.

a. Rappeler ce que valent les $a_{i,j}$ en fonction de u et des vecteurs de $\mathcal{B}$. Que peut-on dire du signe de m ?

b. Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, en considérant $f : t \mapsto (u(tv_i + v_j) | tv_i + v_j)$, montrer que $|a_{i,j}| \leqslant m$.

DEVOIR 22 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 22	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X	X	
2	X			X	
3		X	X	X	
4			X		

1.1 Vrai : cours **1.2** Faux : $0 = 0$ n'apprend rien si $x \in D$ **1.3** Vrai : $\cos(\theta) = -1/2$ donc $\theta = \pm 2\pi/3$ donc $A^3 = I_3$ **1.4** Vrai : $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}P^T$ avec $P \in SO(3)$ donc A sym. ssi M sym. ssi $\theta = \pi$ car $\theta \neq 0$.
2.1 Vrai : la matrice de u dans la B.O.N. $\mathcal{B}$ est diagonale donc symétrique **2.2** Faux : $u = id_E$ est autoadjoint et toute $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u **2.3** Faux : ce serait vrai si tout F sev de E vérifiait cette propriété **2.4** Vrai : cours.
3.1 Faux : on n'a pas dit que $\mathcal{B}$ est une B.O.N. **3.2** Vrai : u est DZ par le théorème spectral donc A aussi **3.3** Vrai : cours **3.4** Vrai : si $\mathcal{B}'$ est une B.O.N., $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(u) \in O(n) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $A^2 = I_n$ donc u est une symétrie et elle est orthogonale car u est autoadjoint.
4.1 Faux : c'est $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T AX \geqslant 0$ **4.2** Faux : si P est inversible alors A aussi et ce n'est pas supposé **4.3** Vrai : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T AX \geqslant 0$ et $X^T BX \geqslant 0$ donc $X^T(A+B)X = X^T AX + X^T BX \geqslant 0$ **4.4** Faux : AB n'est même pas symétrique en général.

Énoncé Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace E euclidien, alors χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u. Autrement dit : $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(u)}} E_\lambda(u)$.

Preuve ($\Longrightarrow$) Comme $\mathcal{B}$ est une bon, $a_{i,j} = (u(e_j)|e_i) = (e_j|u(e_i)) = (u(e_i)|e_j) = a_{j,i}$ car u et le produit scalaire sont symétriques. Ainsi la matrice A est symétrique.
($\Longleftarrow$) Pour $(x,y) \in E^2$, si X et Y sont les vecteurs colonnes associés (coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$), alors $(u(x)|y) = (AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T(AY) = (x|u(y))$ car A est symétrique. Ainsi u est un endomorphisme symétrique.

Exercice 1 D'après le théorème spectral version matricielle, comme A est une matrice symétrique réelle, A est orthosemblable à une matrice diagonale réelle. On calcule $\chi_A = X^3 - X$ donc $Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$ et on résout $AX = -X$, $AX = 0$, $AX = X$ pour trouver $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\big((-1,2,2)\big)$, $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\big((2,2,-1)\big)$ et $E_1(A)) = \mathrm{Vect}\big((2,-1,2)\big)$. Ainsi : $A = PDP^T$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in O(3)$.

Exercice 2 **a.** Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, d'après le cours, on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = (u(v_j)|v_i)$. Ainsi, $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} = (u(v_i)|v_i) \geqslant 0$ car $u \in S^+(E)$: $m \geqslant 0$.
b. Par bilinéarité du produit scalaire, linéarité et positivité de u, $f(t) = a_{i,i}t^2 + 2ta_{i,j} + a_{j,j} \geqslant 0$. Deux cas :
- Si $a_{i,i} = 0$, f est affine et positive donc constante et on a donc $a_{i,j} = 0$ donc $|a_{i,j}| = 0 \leqslant m$ car $m \geqslant 0$.
- Si $a_{i,i} > 0$, le discriminant Δ de f est donc négatif (pas deux racines réelles distinctes sinon f serait négative stricte entre ces deux racines) : $\Delta = 4a_{i,j}^2 - 4a_{i,i}a_{j,j} \leqslant 0$ donc $|a_{i,j}| = \sqrt{a_{i,j}^2} \leqslant \sqrt{m^2} = m$.