SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 13 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

13.1 Équations linéaires scalaires d'ordre 1

13.1 **a.** La continuité en 0^+ impose $\alpha \geqslant 0$, l'aspect C^1 et la nullité en 0 imposent $\alpha \geqslant 1$. On peut le justifier en traçant les graphes de ces fonctions ou en calculant les limites en 0^+ avec le théorème de prolongement C^1.

b. Si k convient et f associée, en posant $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, on a F de classe C^1 et $F(0) = 0$. En dérivant : $\forall x \geqslant 0,\ xf(x) = kF(x) + kxf(x)$ et avec $y = F$: $(1-k)xy' = ky$. Si $k = 1$, $y = 0$ donc $f = y' = 0$ et ça ne convient pas. Si $k \neq 1$, en posant $\alpha = \dfrac{k}{1-k}$: $\forall x > 0,\ y = \lambda e^{\alpha \ln(x)} = \lambda x^\alpha$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mais y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse, on a $\alpha \geqslant 1$ d'après **a.** donc $k \in \left[\dfrac{1}{2};1\right[$ et $f = F' = y' = \lambda\alpha x^{\alpha-1} = \lambda\alpha x^{\frac{2k-1}{1-k}}$.

Réciproquement, pour $k \in \left[\dfrac{1}{2};1\right[$ et en posant $\beta = \dfrac{2k-1}{1-k} \geqslant 0$ et $\alpha = \beta + 1 = \dfrac{k}{1-k} \geqslant 1$ et $f(x) = x^\beta$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ si $k > \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = 1$ si $k = \dfrac{1}{2}$, on a bien f continue sur $\mathbb{R}_+$ et on vérifie bien que :

$$\forall x \geqslant 0,\ \int_0^x tf(t)dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{k}{\alpha}x^{\alpha+1} = kx\left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_0^x = kx\int_0^x f(t)dt.$$

Ainsi les valeurs de k recherchées sont tous les valeurs comprises dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$.

13.2 **a.** Classique : $y = x^{-\alpha}\Big(k + \int_0^x \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt\Big)$ avec $k \in \mathbb{R}$ car $t \to \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ est intégrable en 0. Si $x > 0$: $\dfrac{1}{\alpha(1+x)} = x^{-\alpha}\int_0^x \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+x}dt \leqslant x^{-\alpha}\int_0^x \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt \leqslant x^{-\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}dt = \dfrac{1}{\alpha}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{-\alpha}\Big(\int_0^x \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt\Big)\right) = \dfrac{1}{\alpha}$ et $k = 0$ est nécessaire pour prolonger en 0. Ainsi : $y_0(x) = x^{-\alpha}\Big(\int_0^x \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt\Big)$ si $x > 0$ et $y_0(0) = \dfrac{1}{\alpha}$.

b. <u>Méthode</u> 1 : si $x \in]0;1[$, alors $y_0(x) = x^{-\alpha}\int_0^x \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{\alpha-1+n}\Big)dt$ or la série de fonctions converge normalement sur $[0;x]$ donc $y_0 = x^{-\alpha}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^n t^{\alpha-1+n}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n+\alpha}$.

<u>Méthode 2</u> : si $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]0;R[$ avec $R > 0$ et en identifiant dans $xy' + \alpha y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\alpha}$ et $R = 1$ avec d'Alembert : cette fonction est bien solution de (E) continue en 0, ça ne peut être que y_0.

13.3 On distingue deux cas : $y \geqslant t$ et $y \leqslant t$ et on trouve deux types d'expressions : $y = \lambda e^t + t + 1$ si $y \geqslant t$ et $y = \lambda e^{-t} + t - 1$ si $y \leqslant t$. Comme $y' = f(t,y)$ avec f continue en t et localement lipschitzienne en y, on a le résultat du théorème de Cauchy-Lipschitz et les solutions sont de cinq type :

- $y = \lambda e^t + t + 1 \geqslant t$ avec $\lambda > 0$.
- $y = t + 1$.
- $y = \lambda e^t + t + 1$ si $t \in]-\infty; -\ln(-\lambda)]$ et $y = -\lambda^{-1}e^{-t} + t - 1$ si $t \in [-\ln(\lambda); +\infty[$ avec $\lambda < 0$.
- $y = t - 1$.
- $y = \lambda e^{-t} + t - 1 \leqslant t$ avec $\lambda < 0$.

13.4 Les solutions de (E_0) sur les trois intervalles $]-\infty;0[$, ou $]0;1[$, ou $]1;+\infty[$ où l'équation est résolue sont les $y : t \mapsto \dfrac{\lambda}{t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ qui dépend bien sûr de l'intervalle considéré. Par variation de la constante, y est solution de (E) sur l'un des trois intervalles si et seulement si $\lambda' = \dfrac{1}{t-1}$. On prend par exemple $\lambda = \ln|t-1|$ et les solutions de (E) sur chacun des intervalles sont les $y : t \mapsto \dfrac{\lambda}{t} + \dfrac{\ln|t-1|}{t}$.

Si on veut raccorder les solutions en 0, il faut impérativement choisir $\lambda = 0$ à gauche et à droite de 0 car $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1-t)}{t} = -1$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\lambda}{t}$ n'est finie que si $\lambda = 0$. Ainsi, seule la fonction $y :]-\infty;1[\to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $y(0) = -1$ peut être solution de (E) sur $]-\infty;1[$.

De plus, cette fonction est bien solution car elle est DSE sur $]-1;1[$ où elle est donc de classe C^∞ (donc y est de classe C^∞ sur $]-\infty;1[$) avec $\forall t \in]-1;1[,\ y(t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{n-1}}{n}$.

13.5 Après avoir décomposé $-\dfrac{2}{t(t^2-1)} = \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{t-1}$, les solutions de (E) sont les $y = \dfrac{(\lambda + \ln|t|)t^2}{t^2-1}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sur chacun des quatre intervalles $I_1 =]-\infty;-1[$, $I_2 =]-1;0[$, $I_3 =]0;1[$ et $I_4 =]1;+\infty[$ où l'équation peut être mise sous forme résolue.

Sur $]-1;1[$, les solutions sont $y = \dfrac{(\lambda_1 + \ln|t|)t^2}{t^2-1}$ si $t \in]-1;0[$, $y = \dfrac{(\lambda_2 + \ln|t|)t^2}{t^2-1}$ si $t \in]0;1[$ et $y(0) = 0$ (avec l'équation par exemple) et ceci pour toutes les valeurs de $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ (vérifier pour l'aspect continu et dérivable en 0 par DL). Ainsi l'espace affine des solutions de (E) sur $]-1;1[$ est de dimension 2.

Sur $]0;+\infty[$, on doit avoir $y(1) = \dfrac{1}{2}$ avec l'équation et ceci impose que $y(t) = \dfrac{t^2\ln|t|}{t^2-1}$ si $t \neq 1$ (voir les limites en 1). Réciproquement, par DL, cette fonction est bien solution car elle est dérivable en 1 avec $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi l'espace affine des solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ est de dimension 0.

On fait de même sur $]-\infty;0[$ et sur $\mathbb{R}$ pour voir que seule la fonction définie par $y(t) = \dfrac{t^2\ln|t|}{t^2-1}$ est solution.

De plus, en posant $t = 1+h$, on a $y(1+h) = \dfrac{(1+h)^2}{2+h} \times \dfrac{\ln(1+h)}{h}$ donc y est DSE sur $]0;2[$ donc de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$ et par parité de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

13.6 Soit f une solution, en prenant $x = y = 0$, on a $f(0) = 0$. De plus, pour $h \neq 0$, on a le calcul suivant : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{e^x f(h) + e^h f(x) - f(x)}{h} = e^x \dfrac{f(h)}{h} + \dfrac{e^h-1}{h} f(x) \to f'(0)e^x + f(x)$. Ainsi, f est solution de $y' = y + Ce^x$. On trouve $f(x) = Cxe^x$ qui réciproquement sont solutions.

13.7 **a.** Les solutions y sont $y = \left(\lambda + \int_0^t h(u)e^u du\right)e^{-t}$. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \forall t \geqslant t_0,\ |h(t)| \leqslant \varepsilon$ donc, en écrivant $y(t) = \left(\lambda + \int_0^{t_0} h(u)e^u du\right)e^{-t} + \int_{t_0}^t h(u)e^{u-t}du$, comme on a $\left|\int_{t_0}^t h(u)e^{u-t}du\right| \leqslant \varepsilon$ et aussi $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\lambda + \int_0^{t_0} h(u)e^u du\right)e^{-t} = 0$, on a bien le résultat.

b. Il suffit d'écrire que f est solution de $(f-\ell)' + (f-\ell) = f' + f' - \ell$ qui tend vers 0 donc $f - \ell$ aussi.

13.8 **a.** En distinguant selon que $y = 1$, $y > 1$ ou $y < 1$, on trouve les solutions $y = 1$, $y = 1 + \lambda x$ avec $\lambda > 0$ et $y = 1 + \dfrac{\mu}{x}$ avec $\mu < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$; les deux derniers types ne valent jamais 1.

b. Avec ces notations, on a : $\forall x < 0,\ xy'(x) = (-x)z'(-x) = |z(-x) - 1| = |y(x) - 1|$. Ainsi, on obtient les graphes des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ en effectuant une symétrie orthogonale d'axe (Oy) de celles sur $\mathbb{R}_+^*$. La seule fonction solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est $y = 1$.

13.9 **a.** On trouve classiquement : $y = \dfrac{at^2 + e^{t-1}}{1-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$ sur I ne contenant ni 0 ni 1.

b. On peut prolonger en 0 sans condition sur les constantes donc l'espace affine des solutions de (E) sur $]-\infty\,;1[$ est de dimension 2. Pour le prolongement en 1, on doit avoir $a = -1$ des deux côtés et on trouve en posant $x = 1+h$ que $y(x) = 2 + h - \dfrac{e^h - 1}{h}$ donc y est bien solution DSE sur $\mathbb{R}$: l'espace affine des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ ou sur $]0\,;+\infty[$ est de dimension 1.

13.2 Équations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

13.10 **a.** Classique : $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ conserve la classe.

b. Avec $f = g + h$, on a : $\big(f \text{ solution de } (E)\big) \iff \big(g''(x) + g(x) = x^2 \text{ et } h''(x) - h(x) = -\sin(x)\big)$ car g'' est paire et h'' impaire. Ainsi, $g(x) = a_1\cos(x) + a_2\sin(x) + x^2 - 2$ mais $a_2 = 0$ car g paire et $h(x) = a_3\text{ch}\,(x) + a_4\text{sh}\,(x) + \dfrac{1}{2}\sin(x)$ avec $a_3 = 0$ car h impaire. Par conséquent les solutions de (E) sont les $f : x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\text{sh}\,(x) + x^2 - 2 + \dfrac{1}{2}\sin(x)$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. L'espace affine des solutions est de dimension 2.

13.3 Équations linéaires scalaires d'ordre 2

13.11 **a.** Si $y : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E), posons $z : -I \to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(-x)$. Alors par composée, z est deux fois dérivable (comme y) sur $-I$.
De plus, $\forall x \in -I,\ xz''(x) - z'(x) - x^3z(x) = xy''(-x) + y'(-x) - x^3y(-x) = -\big(ty''(t) - y'(t) - t^3y(t)\big) = 0$ en posant $t = -x \in I$. z est bien solution de (E) sur $I' = -I$.
b. Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, soit alors $w : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par la relation $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ w(t) = y(\sqrt{t}) \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = w(x^2)$ (cela revient à poser $t = x^2$ mais en définissant une nouvelle fonction). Comme $y'(x) = 2xw'(x^2)$ et $y''(x) = 2w'(x^2) + 4x^2w''(x^2)$, alors :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall x > 0,\ xy''(x) - y'(x) - x^3y(x) = 0 \\ &\iff \forall x > 0,\ x\big(2w'(x^2) + 4x^2w''(x^2)\big) - 2xw'(x^2) - x^3w(x^2) = 0 \\ &\iff \forall x > 0,\ 4w''(x^2)\big) - w(x^2) = 0 \\ &\iff \forall t > 0,\ w''(t) - \frac{1}{4}w(t) = 0 \end{aligned}$$

Alors : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ w(t) = \alpha e^{t/2} + \beta e^{-t/2}$. Donc $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ y(x) = \alpha e^{x^2/2} + \beta e^{-x^2/2}$.
c. Les solutions de (E) sont aussi les $y : x \mapsto \alpha' e^{x^2/2} + \beta' e^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ d'après la question **a.**.
Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\alpha,\alpha',\beta,\beta') \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x > 0,\ y(x) = \alpha e^{x^2/2} + \beta e^{-x^2/2}$ et $\forall x < 0,\ y(x) = \alpha' e^{x^2/2} + \beta' e^{-x^2/2}$. Ces fonctions étant DSE, comme $y(x) \underset{0^+}{\sim} (\alpha+\beta) + \dfrac{\alpha-\beta}{2}x^2 + o(x^2)$ et $y(x) \underset{0^-}{\sim} (\alpha'+\beta') + \dfrac{\alpha'-\beta'}{2}x^2 + o(x^2)$, on a par Taylor : $f_g''(0) = \alpha' - \beta'$ et $f_d''(0) = \alpha - \beta$. En identifiant : $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ (continuité en 0) et $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$ (deux fois dérivable en 0). Par conséquent $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. Ainsi les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont aussi les $y : x \mapsto \alpha e^{x^2/2} + \beta e^{-x^2/2}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

13.12 On trouve $w'(t) = \dfrac{1}{t}w(t)$. Ainsi : $y_2(t) = t\ln(t)$ par exemple.

13.13 **a.** Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec la condition de CAUCHY $f(0) = f'(0) = 0$ pour la séparation de N. Le reste est classique.
b. Soit $f \in E$, on pose $g = f + 2f' + f''$ qui est continue et on utilise la méthode de variation des constantes (voir équations différentielles du second ordre plus tard dans l'année) pour avoir (avec $f(0) = f'(0) = 0$) : $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \left(x\int_0^x g(t)e^t dt - \int_0^x tg(t)e^t dt\right)e^{-x}$. On majore ensuite brutalement $|x| \leqslant 1$, $|e^x| \leqslant e$ et $|e^{-x}| \leqslant 1$ et $|g(t)| \leqslant ||g||_\infty$ pour avoir : $|f(x)| \leqslant 2e||g||_\infty$ d'où $||f||_\infty \leqslant 2e\,N(f)$ (certainement pas optimal).

13.14 **a.** On remplace y par t^α dans (E_0) et par calculs : $\alpha(\alpha-1) - \alpha - 3 = (\alpha-3)(\alpha+1) = 0$ donc $\alpha = -1$ ou $\alpha = 3$: les fonctions $y_{-1} : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $y_3 : t \mapsto t^3$ sont solutions de (E_0).
b. Comme y_{-1} et y_3 sont linéairement indépendantes (clairement), elles constituent un système fondamental de solutions et les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc les $y_{a,b} : t \mapsto at^3 + \dfrac{b}{t}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (car sur ces deux intervalles l'équation est résolue donc le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ s'applique).
En notant $S_{0,I}$ l'ensemble des solutions réelles sur I de (E_0), on a donc $\dim(S_{0,\mathbb{R}_-^*}) = \dim(S_{0,\mathbb{R}_+^*}) = 2$ et si y est une solution sur $\mathbb{R}$, on a $y|_{\mathbb{R}_-^*} = y_{a_1,b_1}$ et $y|_{\mathbb{R}_+^*} = y_{a_2,b_2}$ avec $(a_1,a_2,b_1,b_2) \in \mathbb{R}^4$ d'après l'étude précédente. Mais l'étude en 0 montre que $b_1 = b_2 = 0$ (puisque y est continue en 0) donc les $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de (E_0) sont définies par $y(t) = a_1t^3$ si $t \leqslant 0$ et $y(t) = a_2t^3$ si $t \geqslant 0$. Réciproquement, toute fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = a_1t^3$ si $t \leqslant 0$ et $y(t) = a_2t^3$ si $t \geqslant 0$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (avec $y'(0) = 0$ et $y''(0) = 0$ par théorème de prolongement C^1) et est solution de (E_0) : on a encore $\dim(S_{0,\mathbb{R}}) = 2$ car toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est de la forme $y = a_1z_1 + a_2z_2$ avec $z_1(t) = t^3$ si $t \leqslant 0$ et $z_1(t) = 0$ si $t \geqslant 0$ et $z_2(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et $z_2(t) = t^3$ si $t \geqslant 0$.
c. Si le degré de y_0 est n, alors le degré de $t^2y'' - ty' - 3y$ est inférieur ou égal à $\mathrm{Max}(2+n-2, 1+n-1, n) = n$ donc cherche avec $n = 4$: on trouve $y_0 : t \mapsto t^4$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc (par structure affine) : $y_{a,b} : t \mapsto t^4 + at^3 + \dfrac{b}{t}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Et sur $\mathbb{R}$, les solutions de (E) sont les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $y(t) = t^4 + a_1t^3$ si $t \leqslant 0$ et $y(t) = t^4 + a_2t^3$ si $t \geqslant 0$ car $t \mapsto t^4$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Ces solutions sont "indépendantes" entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, passent par $(0,0)$ avec une dérivée nulle et sont asymptote à la courbe $y = t^4$ en $\pm\infty$.
d. φ_1 et φ_2 sont des applications de $S_\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. φ_1 n'est pas bijective (ni injective ni surjective) car $\varphi_1(y_0 + a_1z_1 + a_2z_2) = (1 + a_2, 4 + 3a_2)$ (donc $\mathrm{Im}(\varphi_1)$ est la droite d'équation $y = 3x + 1$) et par contre φ_2 est bijective car $\varphi_2(y_0 + a_1z_1 + a_2z_2) = (1 - a_1, 1 + a_2)$.

13.15 On pose $g = f + f'' \geqslant 0$ et on résout $f'' + f = g$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$. On utilise la méthode de variation des constantes, on doit résoudre le système linéaire $a'(x)\cos(x) + b'(x)\sin(x) = 0$, $-a'(x)\sin(x) + b'(x)\cos(x) = g(x)$: ce qui donne après calculs $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x g(t)\sin(x-t)dt$. On a donc $f(x+\pi) + f(x) = \int_x^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t)dt \geqslant 0$.

13.16 Si $r > 0$ et $y :]-r;r[\to \mathbb{R}$ est DSE et solution de (E), on l'écrit $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nt^n$ donc $y'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nt^{n-1}$ puis $y''(t) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nt^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$.
Ainsi, en reportant dans $y''(t) + t^2y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nt^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} na_nt^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n = 0$$

qui équivaut à $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n\Big)t^n = 0$. Par unicité des coefficients : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n \iff (n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n) \iff a_{n+2} = -a_n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = (-1)^na_0$, $a_{2n+1} = (-1)^na_1$. Ainsi $y(t) = a_0\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^{2n} + a_1\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^{2n+1} = \dfrac{a_0 + a_1t}{1+t^2}$.

Le rayon R de cette série entière au moins égal à 1 ce qui justifie les calculs. On vérifie que $t \mapsto \dfrac{a_0 + a_1 t}{1+t^2}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ d'où $\left(y_1 : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}, y_2 : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\right)$ est une base du plan de solutions.

On aurait pu constater à nouveau que : $(E)\ :\ \left((1+t^2)y(t)\right)'' = 0 \Longleftrightarrow (1+t^2y(t) = at+b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

13.17 **a.** Sur J, on constate que la condition $fg = 1$ implique $f'g + fg' = 0$ et $f''g + 2f'g' + fg'' = 0$.

Or $4xf'' + 2f' + f = 0$ donc $4xf''g + 2f'g + fg = 0$. Mais aussi $4xg'' + 2g' + g = 0$ donc $4xg''f + 2g'f + gf = 0$.
En sommant, on obtient $4x(f''g + g''f) + 2(f'g + g'f) + 2 = 0$ donc $-8xf'g' + 2 = 0$.

Or, par exemple $g' = -\dfrac{f'}{f^2}$ donc $\dfrac{8xf'^2}{f^2} + 2 = 0 \Longleftrightarrow 4xf'^2 + f^2 = 0$.

Or f ne s'annule pas sur J donc $f^2 > 0$ d'où $4xf'^2 < 0$ ce qui implique que $x < 0$: $J \subset \mathbb{R}_-^*$.

Comme $\left(-\dfrac{2xf'}{f}\right)^2 = 1$, que $x \mapsto -\dfrac{2xf'}{f}$ est continue, ne s'annule pas et que son carré vaut 1, cette fonction vaut soit tout le temps 1, soit tout le temps -1 sur J.
Soit $\forall x \in J,\ 2\sqrt{-x}f'(x)+f(x) = 0$, soit $\forall x \in J,\ 2\sqrt{-x}f'(x)-f(x) = 0$. On résout donc $(E_1)\ :\ 2\sqrt{-x}y'+y = 0$ et $(E_2)\ :\ 2\sqrt{-x}y'-y = 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et on trouve classiquement pour solutions de (E_1) les fonctions $y : x \mapsto Ae^{\sqrt{-x}}$ (avec $A \in \mathbb{R}$) et pour solutions de (E_2) les fonctions $y : x \mapsto Be^{-\sqrt{-x}}$ (avec $B \in \mathbb{R}$).
Réciproquement, en posant $f(x) = e^{\sqrt{-x}}$ et $g(x) = e^{-\sqrt{-x}}$, on a bien f et g de classe C^2 sur $\mathbb{R}_-^*$, $4xf'^2+f^2 = 0$ et $4xg'^2 + g^2 = 0$. On dérive $4xf'^2 + f^2 = 0$ pour avoir $f'(4f' + 8xf'' + 2f) = 0$ et comme f' ne s'annule pas : $4xf'' + 2f' + f = 0$. Même chose pour $4xg'' + 2g' + g = 0$.
Comme f et g ne sont pas colinéaires, et que l'ensemble des solutions est un plan d'après CAUCHY-LIPSCHITZ, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{-x}} + \mu e^{-\sqrt{-x}}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On peut changer de base et affirmer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les $y : x \mapsto \alpha \mathrm{ch}\left(\sqrt{-x}\right) + \beta \mathrm{sh}\left(\sqrt{-x}\right)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
• Sur $\mathbb{R}_+^*$, on vérifie comme attendu que les solutions sont les $y : x \mapsto \alpha\cos(\sqrt{x})+\beta\sin(\sqrt{x})$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
• On pouvait aussi chercher les solutions développables en série entière et on trouve classiquement que $y(x) = a_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$ ce qui donne $y(x) = a_0\cos(\sqrt{x})$ si $x > 0$ et $y(x) = a_0 \mathrm{ch}\left(\sqrt{-x}\right)$ si $x < 0$.

b. Par exemple sur $\mathbb{R}_+^*$, si y est de classe C^2, on peut définir $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $z(x) = y(x^2)$ qui l'est aussi, ce qui donne $z'(x) = 2xy'(x^2)$ et $z''(x) = 2y'(x^2) + 4x^2y''(x^2)$.

y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ 4ty''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$ qui se transforme en posant $t = x^2$:

$$y \in S_E \Longleftrightarrow \forall x > 0,\ 4x^2y''(x^2) + 2y'(x^2) + y(x^2) = 0 \Longleftrightarrow \forall x > 0,\ z''(x) + z(x) = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathrm{Vect}(\cos,\sin).$$

On trouve donc comme solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ les $y : x \mapsto z(\sqrt{x}) = A\sin(\sqrt{x})+B\cos(\sqrt{x})$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

13.18 **a.** Si on avait $\varphi_1'(t_0) = 0$ alors φ_1 serait une solution de (E_1) vérifiant le problème de CAUCHY avec $f(t_0) = f'(t_0) = 0$ donc φ_1 serait la fonction nulle (par unicité). Ainsi $\varphi'(t_0) \neq 0$.

• Par définition $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} = \varphi'(t_0)$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \left|\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right| = |\varphi'(t_0)| > 0$. Par les propriétés de la limite : $\exists \alpha > 0,\ \forall t \in I \setminus \{t_0\},\ |t-t_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|\dfrac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right| \geqslant \dfrac{|\varphi'(t_0)|}{2} > 0$. Ainsi si $t \in [t_0-\alpha; t_0+\alpha] \setminus \{t_0\},\ \varphi(t)-\varphi(t_0) \neq 0$.
• Si t_0 n'était pas un zéro isolé, on pourrait par exemple construire une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui convergerait en décroissante strictement vers t_0, alors en appliquant le théorème de ROLLE sur chaque intervalle $[t_{n+1}; t_n]$, l existerait une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante et tendent vers t_0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_1'(u_n) = 0$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $\varphi'(u_n) = 0$, on obtiendrait par continuité de φ' : $\varphi'(t_0) = 0$ ce qui est faux.

b. La fonction w est de classe C^1 par construction car φ_1 et φ_2 sont de classe C^2 comme solution de (E_1) et (E_2). On calcule $w' = \varphi_1''\varphi_2 - \varphi_2''\varphi_1 = (q_1 - q_2)\varphi_1\varphi_2$. Comme a et b sont deux zéros consécutifs de φ_1, la fonction φ_1 garde un signe constant (par le TVI) sur $]a;b[$ (disons strictement positif). Si φ_2 ne s'annulait pas sur $[a;b]$, alors elle garderait un signe constant (par continuité encore) sur $[a;b]$ (disons strictement négatif). Alors on aurait $w' = (q_1 - q_2)\varphi_1\varphi_2$ positive sur $[a;b]$ donc w croissante sur $[a;b]$. Or $\varphi_1'(a) = \lim\limits_{t\to a^+} \dfrac{\varphi_1(t) - \varphi_1(a)}{t-a} > 0$ (elle ne peut pas être nulle d'après **a.**). De même $\varphi_1'(b) < 0$. Alors $w(a) = -\varphi_2(a)\varphi_1'(a) > 0$ et $w(b) = -\varphi_2(b)\varphi_1'(a) < 0$. C'est contradictoire avec la croissance de w.

Fin du raisonnement pas l'absurde : φ_2 s'annule sur $[a;b]$.

c. On prend $q_1(t) = 1$ et $q_2(t) = e^t$, alors $q_1 \leqslant q_2$ sur $\mathbb{R}_+$, soit $a \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\varphi_1 : t \to \sin(t-a)$ est une solution de (E_1) et a et $a+\pi$ sont deux zéros consécutifs de φ_1, on en déduit d'après la question **b.** que φ étant solution de (E_2) s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a;a+\pi]$.

13.19 Si y est DSE et solution de (E) alors il existe $r > 0$ tel que $\forall t \in]-r;r[$, $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. On a donc aussi $ty'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n$, $t^2y''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n$ et $y''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$. En reportant dans (E), on trouve $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(4(n+2)(n+1)a_{n+2} - 4n(n-1)a_n - 4na_n + a_n\big)t^n = 0$ ce qui donne, par unicité des coefficients : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$. On prouve alors par une récurrence classique que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = \dbinom{\frac{1}{2}}{2n}a_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = \dbinom{\frac{1}{2}}{2n+1}a_1$.

Ainsi $y(t) = a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{\frac{1}{2}}{2n} t^{2n} + a_1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{\frac{1}{2}}{2n+1} t^{2n+1} = a_0(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}) + a_1(\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t})$ qu'on peut encore écrire $y(t) = (a_0 + a_1)\sqrt{1+t} + (a_0 - a_1)\sqrt{1-t}$.

Ainsi : les solutions de (E) sur $]-1;1[$ sont les $y : t \mapsto a\sqrt{1+t} + b\sqrt{1-t}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Il suffit de vérifier que les solutions de (E) sur $]1;+\infty[$ sont les $y : t \mapsto a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t-1}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On contrôle encore que les solutions de (E) sur $]-\infty;-1[$ sont les $y : t \mapsto a\sqrt{-1-t} + b\sqrt{1-t}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

13.4 Systèmes différentiels linéaires

13.20 Soit une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u,v,w)$ dans laquelle on exprime x par ses coordonnées (x_1,x_2,x_3).

On remplace dans l'équation $x' = u \wedge x$ et on obtient le système $x_1' = 0$, $x_2' = -x_3$ et $x_3' = x_2$ ce qui montre que $x_2'' = -x_2$ qu'on sait résoudre.

Les solutions sont $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2\cos(t) + a_3\sin(t)$, $x_3 = -a_3\cos(t) + a_2\sin(t)$ avec $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$.

13.21 On traduit ceci par $X' = AX$ avec ${}^tX = (x\ y\ z)$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = -X^2(X+1)$. -1 est valeur propre simple donc $E_{-1}(A)$ est une droite, on calcule (on résout $AU = -U$ ou on cherche une combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice $A + I_3$) et on trouve qu'elle est engendrée par le vecteur $v_1 = (-1,1,2)$. A n'est donc diagonalisable que si $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est un plan mais on trouve par calcul (on résout $AU = 0$) que $E_0(A)$ est la droite engendrée par le vecteur $v_2 = (1,2,0)$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, on peut tout de même trigonaliser A et on cherche un dernier vecteur v_3 tel que la matrice de f canoniquement associé à A dans la base $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve en résolvant $AV_3 = V_2$ (car d'après T on doit avoir $f(v_3) = v_2$), $v_3 = (0,1,1)$. Alors par les formules de changement de base : $A = PTP^{-1}$ en posant $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors $Y = P^{-1}X$ et on a :

$X' = AX \iff Y' = TY \iff (y_1' = -y_1 \text{ et } y_2' = y_3 \text{ et } y_3' = 0) \iff (y_1 = ae^{-t} \text{ et } y_2 = ct + b \text{ et } y_3 = c)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On remplace dans $X = PY$ et on obtient finalement les solutions du système qui sont les :

$$X(t) = a\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} = ae^{-t}v_1 + bv_2 + ctv_2 + vc_3 \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

13.22 On traduit ceci par $X' = AX$ avec ${}^tX = (x\ y\ z)$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = -(X-2)^2(X-1)$. 1 est valeur propre simple donc $E_1(A)$ est une droite, on calcule (on résout $AU = U$ ou on cherche une combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice $A - I_3$) et on trouve qu'elle est engendrée par le vecteur $v_1 = (2,0,1)$. A n'est donc diagonalisable que si $E_2(A)$ est un plan mais on trouve par calcul (on résout $AU = 2U$) que $E_2(A)$ est la droite engendrée par le vecteur $v_2 = (2,1,1)$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, on peut tout de même trigonaliser A et on cherche un dernier vecteur v_3 tel que la matrice de f canoniquement associé à A dans la base $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On trouve en résolvant $AV_3 = 2V_3 + V_2$ (car d'après T on doit avoir $f(v_3) = 2v_3 + v_2$), $v_3 = (-1,0,0)$. Alors par changement de base, $A = PTP^{-1}$ en posant $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; on pose $Y = P^{-1}X$ et :

$X' = AX \iff Y' = TY \iff (y_1' = y_1,\ y_2' = 2y_2 + y_3,\ y_3' = 2y_3) \iff (y_1 = ae^t,\ y_2 = (ct+b)e^{2t},\ y_3 = ce^{2t})$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On remplace dans $X = PY$ et on obtient finalement les solutions du système qui sont les :

$$X(t) = a\begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} (2t-1)e^{2t} \\ te^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} = ae^tv_1 + be^{2t}v_2 + cte^{2t}v_2 + cv_3 \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

13.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

13.23 **a.** Comme l'équation (E) s'écrit aussi $y'' - \dfrac{2}{1+x^2}y = 0 = y'' - ay' - by = 0$ avec $a = 0$ et $b : x \mapsto -\dfrac{2}{1+x^2}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous permet de conclure qu'il existe une unique solution y de (E) telle que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ et que cette fonction y est définie sur $\mathbb{R}$ en entier.

La question est de savoir si y est polynomiale. Effectuons une recherche par analyse/synthèse.

• Si $y : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$ est une fonction polynomiale de degré n solution de (E), alors le terme en x^n dans $(1+x^2)y'' - 2y$ est $\big(n(n-1) - 2\big)a_n$. Comme $(1+x^2)y'' - 2y = 0$ et $a_n \neq 0$, cela donne $n^2 - n - 2 = 0 = (n-2)(n+1) \iff n = 2$ ou $n = -1$. En écrivant $y(x) = ax^2 + bx + c$ et en injectant dans (E), on trouve : $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)(2a) - 2(a^2 + bx + c) = 0$ ce qui impose, en identifiant, $2a = 2a$, $-2b = 0$ et $2a - 2c = 0$. Ainsi, $y(x) = a(1+x^2)$. Mais comme $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, on trouve $a = 1$ donc $y(x) = 1 + x^2$.

• Réciproquement, il est clair (et d'ailleurs on aurait pu le dire tout de suite tellement c'est visible) que $y : x \mapsto 1 + x^2$ est solution du problème de Cauchy de l'énoncé.

b. Méthode de Lagrange : on effectue une variation de la constante pour obtenir une seconde fonction solution de (E) non proportionnelle à $y_1 = y$ donc on pose $y = y_1 z = (1+x^2)z$ dans (E) où $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En reportant dans (E), comme $y'' = 2z + 4xz' + (1+x^2)z''$ par Leibniz, on obtient y solution de (E) si et seulement si $(1+x^2)\Big(2z + 4xz' + (1+x^2)z''\Big) - 2(1+x^2)z = 0 \iff (F)\ :\ (1+x^2)z'' + 4xz' = 0$. Comme une primitive de $a : x \mapsto \dfrac{4x}{1+x^2}$ est $A : x \mapsto 2\ln(1+x^2)$, $z' = \lambda e^{-2\ln(1+x^2)} = \dfrac{\lambda}{(1+x^2)^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $z(x) = z(0) + \int_0^x z'(t)dt = \lambda \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \mu = \lambda \int_0^x \frac{(1+t^2-t^2)dt}{(1+t^2)^2} + \mu$ en posant $\mu = z(0) \in \mathbb{R}$. Avec l'indication de l'énoncé, cela donne $z(x) = \lambda\,\mathrm{Arctan}(x) - \frac{\lambda}{2}\Big[\mathrm{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2}\Big] + \mu$ et on en déduit donc que $y(x) = (1+x^2)\Big(\lambda\,\mathrm{Arctan}(x) - \frac{\lambda}{2}\Big[\mathrm{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2}\Big] + \mu\Big) = \mu y_1(x) + \lambda y_2(x)$ en posant la fonction $y_2 : x \mapsto (1+x^2)\Big(\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{2} - \frac{x}{2(1+x^2)}\Big)$. En posant $\alpha = \mu$ et $\beta = \frac{\lambda}{2}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont donc toutes les fonctions $y : x \mapsto \alpha(1+x^2) + \beta\Big((1+x^2)\,\mathrm{Arctan}(x) + x\Big)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

13.24 **a.** Tout d'abord, $g = \Phi(f)$ est de classe C^∞ si $f \in E$. De plus, la linéarité de Φ est claire par linéarité de la dérivation. Ainsi, Φ est un endomorphisme de E dont on va étudier le spectre.

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, cherchons $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$, c'est-à-dire tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + tf(t) = \lambda f(t)$. On sait par Cauchy-Lipschitz que les solutions de $y' + ty = \lambda y \iff y' = (\lambda - t)y$ forment une droite de solutions sur $\mathbb{R}$ engendrée par la fonction $y_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t - \frac{t^2}{2}} = e^{\lambda t}e^{\frac{-t^2}{2}}$ car $t \mapsto \lambda t - \frac{t^2}{2}$ est une primitive de $t \mapsto \lambda - t$. Ainsi, il existe des fonctions non nulles vérifiant $\Phi(y) = \lambda y$ pour tout complexe λ ce qui prouve que tout $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans le spectre de Φ. Ainsi $\mathrm{Sp}(\Phi) = \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ E_\lambda(\Phi) = \mathrm{Vect}(y_\lambda)$.

b. • Pour le spectre de Φ^2, on peut calculer, pour $f \in E$, $\Phi^2(f) = (f' + tf)' + t(f' + tf) = f'' + 2tf' + (1+t^2)f$. Encore une fois, si $\lambda \in \mathbb{C}$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que l'ensemble $E_\lambda(\Phi^2)$ des fonctions de E qui vérifie $\Phi^2(y) = \lambda y$ est un plan donc λ est une valeur propre de Φ^2. On a donc $\mathrm{Sp}(\Phi^2) = \mathbb{C}$.

• Toujours pour le spectre de Φ^2, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et μ une racine de λ (il en existe dans $\mathbb{C}$), alors il existe d'après ce qui précède $y \neq 0$ telle que $\Phi(y) = \mu y$ ce qui donne $\Phi^2(y) = \Phi(\Phi(y)) = \Phi(\mu y) = \mu\Phi(y) = \mu^2 y = \lambda y$ et λ est bien une valeur propre de Φ^2 car $y \neq 0$. À nouveau et indépendamment, on en déduit que $\mathrm{Sp}(\Phi^2) = \mathbb{C}$.

• Soit $\lambda = 0$, alors $y \in \mathrm{Ker}(\Phi^2) \iff \Phi(y) \in \mathrm{Ker}(\Phi) \iff \Big(\exists \alpha \in \mathbb{C},\ y' + ty = \alpha e^{\frac{-t^2}{2}}\Big)$ d'après **a.**. Les solutions de l'équation homogène $y' + ty = 0$ sont les fonctions $y : t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}$. On fait varier la constante en écrivant $y = \lambda e^{\frac{-t^2}{2}}$ avec λ dérivable et, en remplaçant dans $y' + ty = \alpha e^{\frac{-t^2}{2}}$, on obtient $\lambda' = \alpha$ donc $\lambda = \alpha t + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{C}$. Par conséquent, $y \in \mathrm{Ker}(\Phi^2) \iff \Big(\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ y = (\alpha t + \beta)e^{\frac{-t^2}{2}}\Big)$. Alors le plan vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi^2)$ peut s'écrire $\mathrm{Ker}(\Phi^2) = E_0(\Phi^2) = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}, t \mapsto te^{\frac{-t^2}{2}})$.

• Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il possède deux racines carrées complexes μ et $-\mu$. Mais si $y \in E_\mu(\Phi)$, alors $\Phi(y) = \mu y$ donc $\Phi^2(y) = \mu^2 y = \lambda y$. Ainsi $E_\mu(\Phi) \subset E_\lambda(\Phi^2)$. De même, $E_{-\mu}(\Phi) \subset E_\lambda(\Phi^2)$. Comme ces deux sous-espaces propres sont en somme directe car $\mu \neq -\mu$, le plan $E_\mu(\Phi) + E_{-\mu}(\Phi)$ est inclus dans le plan $E_\lambda(\Phi^2)$. On en déduit par inclusion et égalité des dimensions que $E_\mu(\Phi) \oplus E_{-\mu}(\Phi) = E_\lambda(\Phi^2)$. Par conséquent, les solutions de $y'' + 2ty' + (1+t^2)y = \lambda y$ sont les $y : t \mapsto \big(\alpha e^{\mu t} + \beta e^{-\mu t}\big)e^{\frac{-t^2}{2}}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$. Alors le plan vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi^2 - \lambda \mathrm{id}_E)$ peut s'écrire $\mathrm{Ker}(\Phi^2 - \lambda \mathrm{id}_E) = E_\lambda(\Phi^2) = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{\frac{\mu t - t^2}{2}}, t \mapsto e^{\frac{-\mu t - t^2}{2}})$.

c. $y'' + 2xy' + (x^2-1)y = 0 \iff y'' + 2xy' + (1+x^2)y = 2y \iff y \in E_2(\Phi^2) = E_{\sqrt{2}}(\Phi) \oplus E_{-\sqrt{2}}(\Phi)$ donc les solutions de cette équation (E) sont les $y : t \mapsto \big(\alpha e^{\sqrt{2}t} + \beta e^{-\sqrt{2}t}\big)e^{\frac{-t^2}{2}}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$.

13.25 **a.** Comme une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ est $x \mapsto \ln(x) - \ln(|1-x|)$, les solutions de (E_0) sur $I_1 =]0;1[$ ou sur $I_2 =]1;+\infty[$ sont les $y : I_k \to \mathbb{R}$ définies par $y_k(x) = \frac{\lambda x}{x-1}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Variation de la constante : $x(x-1)\lambda'\dfrac{x}{x-1} = \ln(x) \Longleftrightarrow \lambda' = \dfrac{\ln x}{x^2} = -\Big(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2}\Big) + \dfrac{1}{x^2} \Longleftarrow \lambda = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}$. Ainsi, les solutions de (E) sur I_k sont les $y : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}\Big(\lambda - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\Big)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ alors elle est de la forme précédente sur I_1 et I_2 et la continuité en 1 impose que la constante $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Ainsi, si f convient, c'est la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\Big(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\Big) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ si $x \neq 1$ et $f(0) = 0$ (prolongement ou voir l'équation (E) en 1). f est de classe C^∞ car elle est DSE au voisinage de 1 : $\forall h \in]-1;1[$, $f(1+h) = 1 - \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}h^{k-1}}{k}$.

(E) admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ qui est f définie ci-dessus.

b. Si $n \geqslant 1$, par croissance comparée, $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue sur $[0;1]$ en posant le prolongement par continuité $f_n(0) = 0$. Pour $n = 0$, on a $f_0 : x \mapsto \ln(x)$ continue sur $]0;1]$ et $\ln(x) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ donc f_0 est intégrable sur $]0;1]$ et I_n existe donc bien pour $n \in \mathbb{N}$. On sait que $I_0 = [x\ln x - x]_0^1 = -1$ (le crochet converge en 0). De plus, si $n \geqslant 1$, par une simple intégration par parties avec le crochet qui converge et les deux fonctions de classe C^1 : $I_n = \Big[\dfrac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1}\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^n dx}{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

c. f est continue sur $]0;1]$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ donc f est intégrable sur $]0;1]$ et $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ existe.

$I = 1 + \displaystyle\int_{]0;1[} \dfrac{\ln x}{1-x}dx = 1 + \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln(x)\Big)dx$ car si $x \in]0;1[$, on a $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.

En posant $g_n :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = x^n \ln(x)$. On a $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ qui converge simplement vers $f-1$ qui est continue sur $]0;1[$. De plus la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \displaystyle\int_0^1 |g_n|$ converge d'après RIEMANN et la question **b.** donc, d'après le TITT, f est intégrable sur $]0;1[$ (on le savait déjà) et on a $I = 1 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \displaystyle\int_0^1 g_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2} = 1 - \dfrac{\pi^2}{6}$.

13.26 Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$, on trouve $y = \lambda\dfrac{e^t}{(1-e^t)^2}$. Par variation de la constante : $y = \dfrac{\lambda + 2e^t + t + 3e^{-t}}{(1-e^t)^2}$

Si on veut prolonger en 0, il faut imposer $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ et y se prolonge par DL avec $y(0) = \dfrac{5}{2}$.

En posant (sur $\mathbb{R}_+^*$) $y(t) = z(e^t)$, on définit $z :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$ qui vérifie (F) : $(u-1)uz'(u) + (1+u)z(u) = 3 + 2u$.

13.27 **a.** X_j est l'unique fonction vectorielle (définie sur $\mathbb{R}$) qui vérifie le problème de CAUCHY $X_j'(t) = AX_j(t)$ avec $X_j(0) = e_j$: X_j est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ par le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire.

b. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k(t_0) = 0$. Posons alors $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$. Y est dérivable comme combinaison de fonctions dérivables et $Y' = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k' = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A X_k = A\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\Big) = AY$. Ainsi, Y vérifie $Y' = AY$ et $Y(t_0) = 0$. Par le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire à nouveau et comme la fonction nulle vérifie ces conditions, $Y = 0$. Ainsi $Y(0) = 0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ par liberté de $(e_1, \cdots, e_n)$. Ainsi $(X_1(t_0), \cdots, X_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ d'où $\det\big(X(t_0)\big) \neq 0$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\det\big(X(t)\big) \neq 0$.

c. Posons $f = \det(X) = \det(X_1, \cdots, X_n)$, on sait que $f' = \det(X_1', X_2, \cdots, X_n) + \cdots + \det(X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n')$ (1) (somme des n déterminants où l'on a dérivé une seule colonne et laissé les autres intactes). En posant $B(t) = X(t)^{-1}AX(t)$, on obtient $X'(t) = X(t)B(t)$. Construire $B(t)$ va nous permettre de travailler sur les colonnes de X plutôt que sur les lignes avec A. Notons $B(t) = (b_{i,j}(t))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a $X_k'(t) = b_{1,k}X_1(t) + b_{2,k}X_2(t) + \cdots + b_{n,k}X_n(t)$ en identifiant la k-ième colonne dans l'équation $X' = BX$. Ainsi, $\det(X_1, \cdots, X_{k-1}, X_k', X_{k+1}, \cdots, X_n) = \det(X_1, \cdots, X_{k-1}, b_{1,k}X_1 + b_{2,k}X_2 + \cdots + b_{n,k}X_n, X_{k+1}, \cdots, X_n)$

est le k-ième déterminant de la formule (1), qu'on peut transformer par multilinéarité du déterminant en $\det(X_1,\cdots,X_{k-1},X'_k,X_{k+1},\cdots,X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,k}\det(X_1,\cdots,X_{k-1},X_i,X_{k+1},\cdots,X_n)$ et, par alternance du déterminant, on a $\det(X_1,\cdots,X_{k-1},X'_k,X_{k+1},\cdots,X_n) = b_{k,k}\det(X_1,\cdots,X_{k-1},X_k,X_{k+1},\cdots,X_n) = b_{k,k}f$. Par conséquent, $f' = (b_{1,1}+\cdots+b_{n,n})f = \mathrm{Tr}\ (B)f$. Mais comme A et $B(t)$ sont semblables, elles ont la même trace donc $f'(t) = \mathrm{Tr}\ (B(t))f(t) = \mathrm{tr}(A)f(t)$ ce qui s'écrit encore $\big(\det(X(t))\big)' = \mathrm{Tr}\ (A)\det(X(t))$.

d. Si $\mathrm{Tr}\ (A) = 0$, notamment si A est antisymétrique, alors $t \mapsto \det(X(t))$ est constante car elle est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est nulle d'après **c.**. Comme $X(0) = (X_1(0),\cdots,X_n(0))$ (par colonne) donc $X(0) = I_n$ par hypothèse, on a $\det(X(0)) = 1$ et on en déduit donc que $\forall t \in \mathbb{R},\ \det(X(t)) = \det(X(0)) = 1$.

13.28 **a.** Bien sûr que non, on a vu dans le cours un contre-exemple.

b. Avec $\sin(x-t) = \sin(x)\cos(t)-\cos(x)\sin(t)$ et la linéarité de l'intégrale, comme toutes les fonctions sont continues sur le segment $[0;x]$: $\forall x \geqslant 0,\ g(x) = f(x)+\sin(x)\int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$.

La dérivée de $x \mapsto \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt$ est $x \mapsto \cos(x)a(x)f(x)$, et $\left(\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt\right)' = \sin(x)a(x)f(x)$, donc $g'(x) = f'(x) + \cos(x)\int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$. On recommence pour obtenir : $g''(x) = f''(x) - \sin(x)\int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt + \cos^2(x)a(x)f(x) + \sin^2(x)(x)f(x)$ donc $g''(x) = f''(x) + f(x) - g(x) + a(x)f(x) = -g(x)$ donc $g'' + g = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

c. On sait résoudre cette équation différentielle : $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \geqslant 0,\ g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ donc $|g| \leqslant |A|+|B| = C$ par exemple et g est bornée. Comme on a la relation $f(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$, $\forall x \geqslant 0,\ |f(x)| \leqslant |g(x)| + \int_0^x |\sin(x-t)||a(t)||f(t)|dt \leqslant C + \int_0^x |a(t)f(t)|dt$ car $|\sin| \leqslant 1$.

d. Posons $h : x \mapsto \int_0^x |a(t)f(t)|dt$, on a h dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = |a(x)||f(x)| \leqslant C|a(x)| + |a(x)|h(x)$ d'après la question **c.**. En notant $A(x) = \int_0^x |a(t)|dt$, on a $\big(e^{-A(x)}h(x)\big)' \leqslant C|a(x)|e^{-A(x)} = C\big(-e^{-A(x)}\big)'$.
On intègre cette inégalité entre 0 et x pour avoir : $e^{-A(x)}h(x) \leqslant C\big(1-e^{-A(x)}\big) \leqslant C$.
Alors $\forall x \geqslant 0,\ h(x) \leqslant Ce^{A(x)}$ et comme a est intégrable, A est croissante et possède une limite finie en $+\infty$ donc A est bornée, d'où h est bornée et enfin $f \leqslant C + h$ donc f est aussi bornée.

13.29 Les solutions réelles de (E_0) : $xy' + \mu y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $y_A : x \mapsto Ax^{-\mu}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Variation de la constante, une solution particulière de (E) de la forme $y = Ax^{-\mu}$ avec A qui est maintenant une fonction dérivable : alors A vérifie $xA'x^{-\mu} = \dfrac{1}{1+x} \Longleftarrow A = \int_1^x \dfrac{t^{\mu-1}}{1+t}dt$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $y_A : x \mapsto \left(A + \int_1^x \dfrac{t^{\mu-1}}{1+t}dt\right)x^{-\mu}$ où la constante A parcourt $\mathbb{R}$.

<u>Premier cas</u> : $\mu = 0$, alors les solutions de (E) sont les $y_A : x \mapsto A + \int_1^x \dfrac{dt}{t(1+t)}$. Comme $\dfrac{1}{t(1+t)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$, l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{dt}{t(1+t)}$ diverge clairement par RIEMANN et on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_1^x \dfrac{dt}{t(1+t)} = -\infty$. Ainsi, aucune des fonctions y_A n'admet une limite finie en 0 car on a $\forall A \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to 0^+} y_A(x) = -\infty$.

<u>Second cas</u> : $\mu > 0$, alors $\dfrac{t^{\mu-1}}{1+t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\mu}}$ donc $\int_0^1 \dfrac{t^{\mu-1}}{1+t}dt$ converge d'après RIEMANN et les solutions ont donc aussi pour expressions $z_B : x \mapsto \left(B + \int_0^x \dfrac{t^{\mu-1}}{1+t}dt\right)x^{-\mu}$ où B parcourt $\mathbb{R}$ (avec $B = A - \int_0^1 \dfrac{t^{\mu-1}}{1+t}dt$). De plus, pour $x > 0$, on l'encadrement : $\left(\int_0^x \dfrac{t^{\mu-1}}{1+x}dt\right)x^{-\mu} < \left(\int_0^x \dfrac{t^{\mu-1}}{1+t}dt\right)x^{-\mu} < \left(\int_0^x t^{\mu-1}dt\right)x^{-\mu}$ or

$\int_0^x t^{\mu-1}dt = \left[\frac{t^\mu}{\mu}\right]_0^x = \frac{x^\mu}{\mu}$ donc $\frac{1}{\mu(1+x)} < z_0(x) < \frac{1}{\mu}$. Par encadrement : $\lim\limits_{x\to0^+} z_0(x) = \frac{1}{\mu}$. On en déduit que seule z_0 possède une limite finie en 0, les z_B pour $B \neq 0$ tendent vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en 0^+.

Troisième cas : $\mu < 0$, alors $\frac{t^{\mu-1}}{1+t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\mu}}$ donc $\int_0^1 \frac{t^{\mu-1}}{1+t}dt$ diverge d'après RIEMANN. Par conséquent $\lim\limits_{x\to0^+} \int_1^x \frac{t^{\mu-1}}{1+t}dt = -\infty$. On "remplace" $\frac{t^{\mu-1}}{1+t}$ par son équivalent $t^{\mu-1}$ en majorant l'écart, soit $x \in]0;1[$,

$$\left|x^{-\mu}\int_1^x \frac{t^{\mu-1}}{1+t}dt - x^{-\mu}\int_1^x t^{\mu-1}dt\right| = x^{-\mu}\left|\int_1^x \left(\frac{t^{\mu-1}}{1+t} - t^{\mu-1}\right)dt\right| = x^{-\mu}\left|\int_1^x \left(-\frac{t^\mu}{1+t}\right)dt\right| \leqslant x^{-\mu}\int_x^1 t^\mu dt.$$

- Si $\mu = -1$, $x^{-\mu}\int_x^1 t^\mu dt = -x\ln(x)$ qui tend vers 0 en 0^+.
- Si $\mu \neq -1$, $x^{-\mu}\int_x^1 t^\mu dt = x^{-\mu}\frac{1-x^{\mu+1}}{\mu+1} = \frac{x^{-\mu}-x}{\mu+1}$ qui tend vers 0 en 0^+.

Comme $x^{-\mu}\int_1^x t^{\mu-1}dt = x^{-\mu}\left[\frac{t^\mu}{\mu}\right]_1^x = x^{-\mu}\frac{x^\mu-1}{\mu} = \frac{1}{\mu} - \frac{x^{-\mu}}{\mu}$ tend vers $\frac{1}{\mu}$ en 0^+ : $\lim\limits_{x\to0^+} x^{-\mu}\int_1^x \frac{t^{\mu-1}}{1+t}dt = \frac{1}{\mu}$.
Comme $\lim\limits_{x\to0^+} Ax^{-\mu} = 0$ pour toute valeur de A, toutes les fonctions y_A admettent pour limite $\frac{1}{\mu}$ en 0^+.

13.30 L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est (E_c) : $z^2+4z+4 = 0 = (z+2)^2$. Donc les solutions de l'équation homogène sont les $y : t \mapsto (at+b)e^{-2t}$.
Méthode de LAGRANGE : si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, posons $u(t) = y(t)e^{2t} \iff y(t) = u(t)e^{-2t}$, alors u est aussi deux fois dérivable par produit et on calcule $y'(t) = e^{-2t}u'(t) - 2e^{-2t}u(t)$ puis $y''(t) = e^{-2t}u''(t) - 4e^{-2t}u'(t) + 4e^{-2t}u(t)$. Par conséquent : y solution de (E) est équivalent à, en reportant : $e^{-2t}u''(t) - 4e^{-2t}u'(t) + 4e^{-2t}u(t) + 4(e^{-2t}u'(t) - 2e^{-2t}u(t)) + 4(u(t)e^{-2t}) = \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \iff u''(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
On continue : $u''(t) = \frac{1}{1+t^2} \iff u'(t) = \mathrm{Arctan}(t) + \lambda \iff u(t) = t\,\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \lambda t + \mu$.
Les solutions de (E) sont donc les $y : t \mapsto te^{-2t}\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)e^{-2t} + (\lambda t +_m u)e^{-2t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On pouvait aussi multiplier (E) par e^{2t} pour avoir (E) : $\left(e^{2t}y(t)\right)'' = \frac{1}{1+t^2} \iff \left(e^{2t}y(t)\right)' = \mathrm{Arctan}(t) + a$ donc le système (E) est équivalent à (E) : $e^{2t}y(t) = t\,\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + at + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

13.31 **a.** A est symétrique réelle donc diagonalisable. De plus il est clair que $\lambda_1 = 4$ est valeur propre avec le vecteur associé $v_1 = (1,1,1)$. Le plan orthogonal à $\mathrm{Vect}(v_1)$ contient donc les autres vecteurs propres et si $v = (x,y,z)$ vérifie $x+y+z = 0$, alors $Av = v$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1,4\}$ et $E_4(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1)^\perp$. Une base de vecteurs propres est donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$.

b. Si ${}^tX(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$, alors $X'(t) = AX(t)$. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y(t) = P^{-1}X(t)$, alors (S) se transforme en $X'(t) = PDP^{-1}X(t) \iff Y'(t) = DY(t)$ en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si ${}^tY(t) = (a(t)\ b(t)\ c(t))$, le système est simple à résoudre $\forall t \in \mathbb{R}$, $a(t) = \alpha e^{4t}$, $b(t) = \beta e^t$ et $c(t) = \gamma e^t$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ ce qui donne, puisqu'on a la relation $X(t) = PY(t)$; les solutions de (S) sont de la forme :

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \alpha e^{4t} + (\beta+\gamma)e^t,\ y(t) = \alpha e^{4t} - \beta e^t \text{ et } z(t) = \alpha e^{4t} - \gamma e^t.$$

13.32 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = (X^2-1)^n$ donc $U_n' = 2nX(X^2-1)^{n-1}$ puis $(X^2-1)U_n' = 2nXU_n$ qu'on écrit $AU_n' - 2nBU_n = 0$ avec $A = X^2-1$ et $B = X$. On dérive maintenant $n+1$ cette dernière relation fois avec la formule de LEIBNIZ pour avoir $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^{(n+1-k)}U_n^{(k+1)} - 2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}B^{(n+1-k)}U_n^{(k)} = 0$. Mais $A^{(j)} = 0$ s $j \geqslant 3$ et $B^{(j)} = 0$ si $j \geqslant 2$. Il ne reste donc plus que cinq termes dans la relation précédente, à savoir $(X^2-1)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + n(n+1)U_n^{(n)} - 2nXU_n^{(n+1)} - 2n(n+1)U_n^{(n)} = 0$. Cette équation se réduit après simplifications qui se réduit à $\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$ ce qui montre bien que P_n est solution de $E_{n(n+1)}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Si u est solution de $(E_{n(n+1)})$ sur un intervalle I, on a $\forall x \in I,\ (1-x^2)u''(x) = 2xu'(x) - n(n+1)u(x)$ mais on a aussi $\forall x \in I,\ (1-x^2)P_n''(x) = 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x)$ d'après la question précédente. Puisque les fonctions u, u', P_n, P_n' sont dérivables sur I, l'application $W = u'P_n - uP_n'$ est dérivable sur I par opérations et $W' = u''P_n + u'P_n' - u'P_n' - uP_n'' = u''P_n - uP_n''$. Ainsi, $(1-x^2)W'(x) = (1-x^2)u''(x)P_n(x) - (1-x^2)P_n''(x)u(x)$ pour $x \in I$ donc $(1-x^2)W'(x) = \big(2xu'(x) - n(n+1)u(x)\big)P_n(x) - \big(2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x)\big)u(x) = 2xW(x)$. Par conséquent, W est la solution sur I de l'équation $(F)\ :\ (1-x^2)y' - 2xy = 0$. On résout (F) sur $I_1 =]-\infty;-1[$ ou $I_2 =]-1;1[$ ou $I_3 =]1;+\infty[$ et on obtient classiquement, comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$ est $x \mapsto -\ln(|1-x^2|)$, que les solutions complexes de (F) sur I_k sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{\lambda_k}{1-x^2}$ avec $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

c. Si u est solution C^2 de $(E_{n(n+1)})$ sur $[-1;1]$, par opérations, $W = u'P_n - uP_n'$ est de classe C^1 sur $[-1;1]$. En particulier, W est solution de (F) sur $]-1;1[$ donc il existe d'après **b.** une constante $\lambda = \lambda_2 \in \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in]-1;1[,\ W(x) = \dfrac{\lambda}{1-x^2}$. Ceci impose, par continuité de W en ± 1, que λ soit nulle. Ainsi, $W = u'P_n - uP_n' = 0$. Sur les intervalles $I \subset]-1;1[$ sur lesquels P_n ne s'annule pas, on a donc $\left(\dfrac{u}{P_n}\right)' = \dfrac{W}{P_n^2} = 0$ donc $\dfrac{u}{P_n}$ est constante sur l'intervalle I, u et P_n y sont donc colinéaires. P_n étant un polynôme de degré n, il existe un nombre fini d'intervalles ouverts $J_1, \cdots, J_r$ de $]-1;1[$ disjoints deux à deux (entre les racines de P_n de $]-1;1[$ qui sont au maximum n) tels que $[-1;1] = \bigcup_{k=1}^{r} \overline{J_k}$ sur lesquels P_n ne s'annule pas. En fait, $r = n$ comme on l'a vu avec les polynômes orthogonaux puisque les P_n sont, à une constante près, les polynômes de LEGENDRE. D'après ce qui précède, $\forall k \in [\![1;r]\!],\ \exists \alpha_k \in \mathbb{R},\ \forall x \in J_k,\ u(x) = \alpha_k P_n(x)$.

Il faut montrer que ces α_k ne dépendent pas de k pour que u et P_n soient proportionnels sur $[-1;1]$.

Si $\beta \in]-1;1[$ et $P_n(\beta) = 0$, alors $P_n'(\beta) \neq 0$ car sinon, par CAUCHY-LIPSCHITZ, la fonction P_n et la fonction nulle seraient solutions du même problème de CAUCHY donc seraient égales : NON ! Par conséquent, toutes les racines de P_n sur $]-1;1[$ sont simples ; ce qu'on savait aussi avec les polynômes orthogonaux.

Soit donc $\beta \in]-1;1[$ l'une des bornes communes à deux intervalles J_k et J_{k+1} pour un entier $k \in [\![1;r-1]\!]$. Comme $\forall x \in J_k,\ u'(x) = \alpha_k P_n'(x)$, en faisant tendre x vers β dans J_k, on a $u'(\beta) = \alpha_k P_n'(\beta)$. On fait de même en faisant tendre x vers β dans J_{k+1} dans la relation $u'(x) = \alpha_{k+1}P_n'(x)$ vraie pour $x \in J_{k+1}$, on obtient $u'(\beta) = \alpha_{k+1}P_n'(\beta)$. Par conséquent, $\alpha_k = \alpha_{k+1}$. On pose donc $\alpha = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n$.

On a donc bien $u = \alpha P_n$ sur $]-1;1[$ donc sur $[-1;1]$ par continuité de u et P_n en 1 et -1. On conclut bien que seules les fonctions αP_n, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, sont solutions de classe C^2 de l'équation $(E_{n(n+1)})$ sur $[-1;1]$.

13.33 **a.** Comme (E) est une équation différentielle linéaire sans second membre, l'ensemble S des solutions contient la fonction nulle et, par linéarité de la dérivation, est stable par combinaison linéaire. De plus, si y

est solution de (E), y est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, comme $y'' = -qy$ et que q est continue sur $\mathbb{R}$, y'' est continue donc y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$: c'est donc lui-même un espace vectoriel. En considérant par exemple le problème de CAUCHY en $t = 0$, si $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$ est fixé, il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie de plus $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$. Ainsi, l'application $\varphi : S \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(y) = (y(0), y'(0))$ est linéaire (clair) et bijective, c'est donc un isomorphisme. Par conséquent, $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

b. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie cette condition de CAUCHY $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. En fait, $f = \varphi^{-1}(1, 0)$ (voir **a.**).

Supposons que f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$. Si on avait $f'(x_0) = 0$, alors la fonction f vérifierait $f'' + qf = 0$ avec $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Or la fonction nulle est aussi solution de (E) et elle vérifie aussi la condition de CAUCHY $0(x_0) = 0'(x_0) = 0$. Par l'unicité au problème de CAUCHY, on aurait donc $f = 0$ qui est contredit par le fait que $f(0) = 1 \neq 0$. Par l'absurde, on a donc établi que $f'(x_0) \neq 0$.

• Prenons par exemple $f'(x_0) > 0$, comme f est C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue en x_0 donc,si $\varepsilon = \dfrac{f'(x_0)}{2} > 0$, $\exists \beta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \beta; x_0 + \beta[,\ |f'(x) - f'(x_0)| \leqslant \dfrac{f'(x_0)}{2} \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{f'(x_0)}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{3f'(x_0)}{2}$ si $\varepsilon = \dfrac{f'(x_0)}{2} > 0$. La fonction f est alors strictement croissante sur l'intervalle $]x_0 - \beta; x_0 + \beta[$, elle y est donc injective, et elle ne s'annule donc qu'en x_0 sur cet intervalle, ce qui est la définition d'un zéro dit isolé.

c. Puisque f est de classe C^2 en tant que solution de (E), on sait que f^2 est convexe si et seulement si $(f^2)'' \geqslant 0$. Or $(f^2)'' = (2ff')' = 2f'^2 + 2ff'' = 2f'^2 - 2qf^2$ car $f'' = -qf$. Or q est négative, ainsi $(f^2)'' \geqslant 0$. On a bien montré que f^2 est convexe sur $\mathbb{R}$.

d. Posons $g = f^2$, alors $g'' \geqslant 0$ d'après la question précédente. Ainsi, la fonction g' est croissante, or $g'(0) = 0$ donc g' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et g' est positive sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, g est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ ce qui montre, comme $g(0) = 1$, que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f^2(x) \geqslant 1 = g(0)$. Comme f ne s'annule pas car $f^2 \geqslant 1$, f garde un signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires, or $f(0) = 1$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit bien que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{f^2(x)} \geqslant 1$.

13.34 • L'espace vectoriel S des solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y''' - y = 0$ contient évidemment la fonction $y_1 : t \mapsto e^t$. On s'inspire de la variation de la constante pour trouver toutes les solutions. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable, alors on pose $z : t \mapsto y(t)e^{-t}$ de sorte que $y = zy_1$. Avec LEIBNIZ, $y''' = z'''e^t + 3z''e^t + 3z'e^t + ze^t$, $y \in S \Longleftrightarrow u'' + 3u' + 3u = 0$ en posant $u = z'$. L'équation caractéristique $(E_c)\ :\ x^2 + 3x + 3 = 0$ a pour solutions $\alpha_1 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha_2 = \overline{\alpha_1} = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, les solutions complexes de $u'' + 3u' + 3u = 0$ sont les $u : t \mapsto Be^{(j-1)t} + Ce^{(j^2-1)t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ donc les solutions complexes de $z''' + 3z'' + 3z' = 0$ sont les $z : t \mapsto \alpha + \beta e^{(j-1)t} + \gamma e^{(j^2-1)t}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. Les solutions réelles de $z''' + 3z'' + 3z' = 0$ sont donc les parties réelles des fonctions précédentes : ce sont les $z : t \mapsto a + \left(b \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)e^{-3t/2}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Enfin, les solutions $y \in S$ sont les $y : t \mapsto ae^t + \left(b \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)e^{-t/2}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

• En notant $\tilde{S}$ l'espace des solutions complexes sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y''' - y = 0$, l'application $\varphi : \tilde{S} \to \mathbb{C}^3$ définie par $\varphi(y) = (y(0), y'(0), y''(0))$ est un isomorphisme d'après le théorème de CAUCHY-

Lipschitz donc $\dim(\tilde{S}) = 3$. L'équation caractéristique associée à (E_0) est $z^3 - 1 = 0$ dont les solutions sont $1, j$ et j^2. Les fonctions $f_1 : t \mapsto e^t$, $f_2 : t \mapsto e^{jt}$ et $f_3 : t \mapsto e^{j^2 t}$ forment une famille libre de vecteurs de $\tilde{S}$ car ce sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $1, j, j^2$ de l'endomorphisme $D : y \mapsto y'$. Comme $\dim(\tilde{S}) = 3$, on en déduit que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\tilde{S}$. Il suffit de passer aux parties réelles des fonctions $\alpha e^t + \beta e^{jt} + \gamma e^{j^2 t}$ (avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$) pour trouver une base (g_1, g_2, g_3) de S avec $g_1 : t \mapsto e^t$, $g_2 : t \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)e^t$ et $g_3 : t \mapsto \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)e^{-t/2}$.

- si $p \neq 1$, il est clair que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{pt}}{p^3 - 1}$ est solution particulière de l'équation.
- si $p = 1$, en posant $z = ye^{-t}$ comme avant, $y''' - y = e^t \iff u'' + 3u' + 3u = 1$ en posant $u = z'$. On trouve donc $u = \dfrac{1}{3}$ comme solution particulière donc $z = \dfrac{t}{3}$ et $t \mapsto \dfrac{te^t}{3}$ est solution particulière de $y''' - y = e^t$.

Par structure affine des solutions, les solutions de cette équation sont les :

$y : t \mapsto ae^t + \left(b\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)e^{-t/2} + \dfrac{e^{pt}}{p^3 - 1}$ si $p \neq 1$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$y : t \mapsto ae^t + \left(b\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)e^{-t/2} + \dfrac{te^t}{3}$ si $p = 1$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

13.35 **a.** Comme l'équation $(E) \; : \; -y'' + cy = f$ est linéaire du second ordre et qu'elle est sous forme résolue, que c et f sont continues sur $[0;1]$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous apprend qu'il existe une unique solution deux fois dérivable sur $[0;1]$ de (E) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = \lambda$: cette solution est notée u_λ. Comme $u_\lambda'' = cu_\lambda - f$ est continue par hypothèse et par opérations, u_λ est bien de classe C^2 sur $[0;1]$. Il existe donc bien une unique solution de (2) qui appartienne à $C^2([0;1], \mathbb{R})$, elle est notée u_λ.

b. Soit y_1 (resp. y_2) l'unique solution de $(E_0) \; : \; -y'' + cy = 0$ qui vérifie $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$ (resp. $y_2(0) = 1$ et $y_2'(0) = 0$). Clairement y_1 et y_2 ne sont pas proportionnelles donc (y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions de $(E_0) \; : \; -u'' + cu = 0$. Si on note y_p la solution particulière de $(E) \; : \; -u'' + cu = f$ qui vérifie $y_p(0) = y_p'(0) = 0$ (elle existe et elle est unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz), alors on sait par le théorème de structure que les solutions de (E) sont les $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + y_p$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Avec les conditions du problème (2), $u_\lambda = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + y_p$ avec $\alpha_2 \times 1 + 0 = 0$ et $\alpha_1 \times 1 + 0 = \lambda$ donc $u_\lambda = \lambda y_1 + y_p$. Par conséquent, $\lambda \mapsto u_\lambda(1) = \lambda y_1(1) + y_p(1)$ est bien affine.

Supposons $y_1(1) = 0$, posons $z = \mathrm{Inf}(\{x \in]0;1] \mid y_1(x) = 0\})$ (qui existe car y_1 s'annule en 1). Par continuité de y_1 en z et caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $y_1(z) = 0$. Puisque $y_1'(1) = 1 > 0$, la fonction y_1 est strictement positive (et même strictement croissante car y_1 est de classe C^1) sur un intervalle du type $]0;\alpha]$ avec $\alpha \in]0;1]$. Ainsi, par minimalité de z, la fonction y_1 reste positive sur $[0;z]$ et $0 < \alpha < z$. Comme $y_1'' = cy_1$, on a donc $\forall t \in [0;z],\; y_1''(t) \geqslant 0$ donc y_1' est croissante sur $[0;z]$, ainsi $\forall t \in [0;z],\; y_1'(t) \geqslant 1$. En intégrant, $\forall t \in [0;z],\; y_1(t) = y_1(0) + \int_0^t y_1'(u)du \geqslant t$ ce qui contredit $y_1(z) = 0$.

Ainsi, $y_1(1) \neq 0$, la fonction affine $\lambda \mapsto u_\lambda(1)$ est non constante et s'annule pour une unique valeur $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. La fonction u_{λ_0} est donc l'unique solution du problème (1) comme attendu.

c. Supposons que u prenne des valeurs strictement négatives sur $]0;1[$, par exemple en $u(t) < 0$ avec $t \in]0;1[$. On pose $\alpha = \mathrm{Sup}(\{x \in [0;t[\mid u(x) = 0\})$ et $\beta = \mathrm{Inf}(\{x \in]t;1] \mid u(x) = 0\})$. Comme avant, en détaillant, on montre que $0 \leqslant \alpha < t < \beta \leqslant 1$, $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ et u reste négative sur $[\alpha;\beta]$. Or $\forall x \in [\alpha;\beta],\; u''(x) = c(x)u(x) - f(x) \leqslant 0$ donc u est "concave" sur $[\alpha;\beta]$ ce qui semble contradictoire. Plus élémentairement, $u'' \leqslant 0$ donc u' est décroissante sur $[\alpha;\beta]$. Or d'après Rolle, il existe $\gamma \in]\alpha;\beta[$ tel que $u'(\gamma) = 0$; et forcément $u(\gamma) < 0$. Par conséquent, u' est positive sur $[\alpha;\gamma]$ et négative sur $[\gamma;\beta]$ ainsi u est croissante sur $[\alpha;\gamma]$ et décroissante sur $[\gamma;\beta]$ ce qui contredit ce qui précède. Tout ceci est absurde. On en déduit que u ne prend aucune valeurs strictement positive donc u reste positive si $f \geqslant 0$.

13.36 **a.** Si y est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|g(t)y(t)| \leqslant ||y||_{\infty,\mathbb{R}_+}|g(t)|$ donc gy est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par théorème de comparaison et on en déduit que $\int_0^{+\infty} g(t)y(t)dt$ converge. Ainsi, $\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x g(t)y(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Mais comme $\int_0^x y''(t)dt = y'(x) - y'(0)$ ceci implique que y' admet une limite finie en $+\infty$. Si on avait par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(t) = \ell > 0$, alors $\exists x_0 \geqslant 0$, $\forall x \geqslant x_0$, $y'(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$. On obtiendrait alors par le théorème des accroissements finis : $\forall x \geqslant x_0$, $y(x) \geqslant \frac{\ell}{2}(x - x_0) + y(x_0)$ ce qui amènerait $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ ce qui est absurde. De même, on ne peut pas avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) < 0$. Par conséquent, si y est une solution bornée de (E), alors y' tend vers 0 en $+\infty$.

b. Avec ces hypothèses, posons la fonction $z = y_1y_2' - y_2y_1'$. Alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit. On dérive $z' = y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_2y_1'' = gy_1y_2 - gy_1y_2 = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, z est constante sur $\mathbb{R}$. Or d'après la question **a.**, y_1, y_2 sont bornées donc y_1' et y_2' tendent vers 0 en $+\infty$. Par produit et somme, z tend donc vers 0 en $+\infty$ ce qui implique que $z = y_1y_2' - y_2y_1'$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

c. Supposons que (E) n'admette que des solutions bornées. Comme on sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2, il existe une base (y_1, y_2) constituée de solutions bornées de (E). Alors, d'après la question **b.** : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = 0$ (c'est le wronskien de ces deux solutions). On en déduit par exemple que $\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = 0$ ce qui implique que les vecteurs non nuls $(y_1(0), y_1'(0))$ et $(y_2(0), y_2'(0))$ sont colinéaires. En effet, si on avait $(y_1(0), y_1'(0)) = (0,0)$, alors y_1 vérifierait $y'' + gy_1 = 0$ avec $y_1(0) = y_1'(0)$ et ce serait la fonction nulle d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz : NON !

Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}^*$ telle que $(y_2(0), y_2'(0)) = \lambda(y_1(0), y_1'(0))$. Par conséquent, $y = y_2 - \lambda y_1$ est solution de (E) et vérifie $y(0) = y'(0) = 0$ ce qui implique $y = 0$ d'après l'unicité dans Cauchy-Lipschitz. Or $y_2 = \lambda y_1$ est contradictoire avec le fait que (y_1, y_2) est libre.

Par l'absurde, on a donc montré l'existence de solutions de (E) non bornées. Mieux, on vient de montrer que les solutions bornées de (E) constitue tout au plus une droite dans le plan des solutions de (E).

13.37 Le système équivaut à $X' = AX$ si ${}^tX = (x\ y\ z)$. Or, après calculs, on trouve $\chi_A = X(X+1)(X-2)$. Ainsi, comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il est clair que $Av_1 = 0$ si $v_1 = e_2 - e_3$, $Av_2 = -v_2$ si $v_2 = e_1 - e_2$ et on trouve par calculs que $Av_3 = 2v_3$ si $v_3 = 2e_1 + e_2 + 3e_3$. Par conséquent $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. En posant $Y = P^{-1}X$, on a $Y' = P^{-1}X'$ et $X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff Y' = DY$. En posant ${}^tY = (a\ b\ c)$, on doit donc résoudre le système découplé (S') : $\begin{cases} a' = & 0 \\ b' = & -b \\ c' = & 2c \end{cases}$ dont les solutions sont $a = \alpha$, $b = \beta e^{-t}$, $c = \gamma e^{2t}$.

Enfin, les solutions de (S) sont les $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e^{-t} + 2\gamma e^{2t} \\ \alpha - \beta e^{-t} + \gamma e^{2t} \\ -\alpha + 3\gamma e^{2t} \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

13.38 **a.** • Si n est impair, $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n\det(A) = -\det(A)$ donc $\det(A) = 0$. Comme A n'est pas inversible, il existe un vecteur non nul X_0 dans $\text{Ker}(A)$. Si on pose $X : t \mapsto X_0$, alors X est constante et, comme $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = 0 = AX(t) = AX_0 = 0$, $X = X_0$ est solution constante non nulle de (S) sur $\mathbb{R}$.

• Pour suivre l'indication de l'énoncé, changeons de base. Comme $X_0 \neq 0$, en posant $e_n = X_0$, on peut compléter (e_n) en une base orthogonale $(e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. En écrivant $X : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t)e_k$, alors $X' = AX \iff \left(\forall k \in [\![1;n]\!],\ x_k'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)x_j(t)\right)$. Or $AX \in \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A) \perp \mathrm{Im}(A)$; en effet, si $AV = 0$ et $W = AZ \in \mathrm{Im}(A)$, alors $(V|W) = (V|AZ) = V^T(AZ) = (A^TV)^TZ = (-AV)^TZ = -(AV|Z) = 0$. Ainsi, comme $X'(t) = AX(t) \in \mathrm{Im}(A)$ n'a pas de composante selon le vecteur $e_n \in \mathrm{Ker}(A)$, on en déduit que $x_n'(t) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle : x_n est constante sur $\mathbb{R}$. Mais plus simplement :

• Si X est une solution de (S), alors $((X|X_0))' = (X'|X_0) + (X|X_0') = (AX|X_0) = X^TA^TX_0 = -X^TAX_0 = 0$ car $X_0 \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ (X|X_0) = \lambda = \lambda\dfrac{(X_0|X_0)}{||X_0||^2} \iff \left(X(t) - \dfrac{\lambda}{||X_0||^2}X_0\Big|X_0\right) = 0$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) \in H_\lambda$ où H_λ est l'hyperplan affine $\dfrac{\lambda}{||X_0||^2}X_0 + (\mathrm{Vect}(X_0))^\perp$.

• Mais plus généralement (si A est seulement non inversible et pas forcément antisymétrique) :
Comme A n'est pas inversible, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant 1$ donc $\dim(\mathrm{Im}(A)) \leqslant n-1$ par la formule du rang. Soit donc H un hyperplan qui contient $\mathrm{Im}(A)$ (il y en a une infinité si $\mathrm{rang}(A) \leqslant n-2$). Soit un vecteur non nul N normal à H. Soit X une solution de (S) sur $\mathbb{R}$si $\varepsilon = \dfrac{f'(x_0)}{2} > 0$, $\exists \beta > 0$, $\forall x \in]x_0 - \beta; x_0 + \beta[$, $\left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \dfrac{f'(x_0)}{2} \iff 0 < \dfrac{f'(x_0)}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{3f'(x_0)}{2}$, considérons l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = (X(t)|N) = \sum\limits_{k=1}^{n} n_kx_k(t)$ (avec des notations évidentes). On dérive φ car X est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on obtient $\varphi'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} n_kx_k'(t) = (X'(t)|N) = (AX(t)|N) = 0$ car $AX(t) \in \mathrm{Im}(A)$ et $N \in \mathrm{Im}(A)^\perp$. Ainsi, φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ (X(t)|N) = \lambda$ ce qui revient à $\forall t \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{k=1}^{n} n_kx_k(t) = \lambda$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ appartient à l'hyperplan affine d'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} n_kx_k = \lambda$.

b. Soit X et Y des solutions de (E), on définit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\psi(t) = X(t)^TY(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t)y_k(t)$. On dérive car X et Y sont dérivables et on obtient $\psi'(t) = (X'(t))^TY(t) + X(t)^TY'(t) = X(t)^TA^TY(t) + X(t)^TAY(t) = 0$ car $A^T + A = 0$. Ainsi, ψ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Soit X une solution de (S), alors $X^TX = ||X||^2$ est constante d'après ce qui précède en prenant $Y = X$. Ainsi, X est de norme constante donc bornée.

13.39 Pour $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ continue, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur $[1-x;1]$ si $x \in]0;1[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}dt$ existe et le problème est bien posé. Par linéarité, l'ensemble des fonctions f solutions est un espace vectoriel.

<u>Analyse</u> : soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0;1[,\ f(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}dt$, comme $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0;1[$, le théorème fondamental de l'intégration montre que $\forall x \in]0;1[,\ f'(x) = -(-1)\dfrac{f(1-x)}{1-x}$ (1). Ainsi, la fonction f est de classe C^1 sur $]0;1[$. On dérive l'expression $(1-x)f'(x) - f(1-x) = 0$ pour avoir $-f'(x) + (1-x)f''(x) + f'(1-x) = 0$. Or l'équation (1) évaluée en $1-x$ donne $xf'(1-x) = f(x)$ (car $1-(1-x) = x$) qu'on reporte dans la précédente pour obtenir l'équation du second ordre vérifiée par f : $(E) : -xf'(x) + x(1-x)f''(x) + xf'(1-x) = x(1-x)f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0$.
Supposons que y solution de (E) soit développable en série entière, alors il existe $r \in]0;1]$ tel que l'on ait

$\forall x \in]0;r[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On dérive terme à terme : $xf'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ et $x^2 f''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$ et $xf''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$. On reporte dans (E) et on identifie les coefficients (car $r > 0$) et on a $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na_{n+1} = (n-1)a_n$ donc $\forall n \geqslant 2,\ a_n = 0$. On trouve donc que $f(x) = a_1 x$ (ce qu'on pouvait voir instantanément). On effectue une variation de la constante pour trouver les solutions de (E) non développables en série entière : $y = \lambda x$ avec λ deux fois dérivable sur $]0;1[$. On reporte dans (E) et on obtient $\forall x \in]0;1[,\ x(1-x)\lambda'' + (2-3x)\lambda' = 0$. Comme $x \mapsto x(1-x)$ ne s'annule pas sur $]0;1[$ et qu'une primitive de $a : x \mapsto \dfrac{2-3x}{x(1-x)} = \dfrac{2(1-x)-x}{x(1-x)} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{1-x}$ sur $]0;1[$ est $A : x \mapsto 2\ln(x) + \ln(1-x)$, on a d'après le cours : $\lambda' = \alpha e^{-2\ln(x)-\ln(1-x)} = \dfrac{\alpha}{x^2(1-x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\dfrac{1}{x^2(1-x)} = \dfrac{1-x+x}{x^2(1-x)} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x(1-x)}$ donc $\dfrac{1}{x^2(1-x)} = \dfrac{1-x+x}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{1-x}$, on intègre (sur l'intervalle $]0;1[$) et on trouve la relation $\forall x \in]0;1[,\ \lambda = \alpha\ln(x) - \dfrac{\alpha}{x} - \alpha\ln(1-x) + \beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de l'équation homogène linéaire du second ordre (E) sur $]0;1[$ sont les $y : x \mapsto \alpha(x\ln(x) - 1 - x\ln(1-x)) + \beta x = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $y_1 : x \mapsto x\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) - 1$ et $y_2 : x \mapsto x$. La fonction f est donc de cette forme mais elle est continue en 1 donc, comme $\lim\limits_{x\to 1^-} y_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} y_2(x) = 1$, cela impose $\alpha = 0$. Ainsi, $f : x \mapsto \beta x$.

<u>Synthèse</u> : si $f : x \mapsto \beta x$, alors f est continue sur $]0;1]$ et $\displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{1-x}^{1} \beta\,dt = \beta(1-(1-x)) = \beta x = f(x)$ pour tout réel $x \in]0;1]$, donc f est solution.

<u>Conclusion</u> : les solutions cherchées sont donc toutes les fonctions proportionnelles à $x \mapsto x$.

13.40 Le système équivaut à $X' = AX$ si ${}^tX = (x\ y)$. Or, après calculs, on trouve $\chi_A = (X-1)^2$. Ainsi 1 est d'ordre algébrique 2 dans A alors que, comme $A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 1, la multiplicité géométrique de 1 vaut 1. Ainsi, A n'est pas diagonalisable. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherche une matrice inversible P telle que $A = P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ ce qui revient à chercher deux vecteurs v_1 et v_2 tels que $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $Av_1 = v_1$ et $Av_2 = v_1 + v_2$. Après calculs $Av_1 = v_1$ avec $v_1 = 2e_1 - 2e_2$ et $Av_2 = v_1 + v_2$ avec $v_2 = e_1$. Comme v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $Y = P^{-1}X$, on a $Y' = P^{-1}X'$ et $X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff Y' = TY$. En posant ${}^tY = (a\ b)$, on doit donc résoudre le système plus simple (S') : $\begin{cases} a' = & a+b \\ b' = & b \end{cases}$. Or $b' = b \iff (\exists \beta \in \mathbb{R},\ b = \beta e^t)$ et $a' = a + \beta e^t \iff (\exists \alpha \in \mathbb{R},\ a = \alpha e^t + \beta t e^t)$. Enfin, les solutions de (S) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telles que $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\alpha+\beta)e^t + 2\beta te^t \\ -2\alpha e^t - 2\beta te^t \end{pmatrix}$.

13.41 **a.** $(S) \iff X' = AX$ avec ${}^tX = (x\ y\ z)$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$ par calculs.

b. Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 1$ par la formule du rang donc A n'est pas diagonalisable. Mais comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, la matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c. La somme des deux premières colonnes de $A - I_3$ est nulle donc $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 1, 0)$. On trouve par calculs que $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1 donc $\mathrm{Ker}((A - I_3)^2)$ est un plan par la formule du rang, il est d'équation cartésienne $x - y + 2z = 0$. On sait que $\mathrm{Ker}(A - I_3) \subset \mathrm{Ker}((A - I_3)^2)$, et les dimensions font que $\mathrm{Ker}((A - I_3)^2) \setminus \mathrm{Vect}(v_1) \neq \emptyset$: $w_2 = (0, 2, 1)$ est par exemple dans cet ensemble.

d. Par une résolution de système ou en écrivant $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (-1, 0, 1)$. Là aussi, une résolution de système montre que les vecteurs $v_2 = (x, y, z)$ tels que $Av_2 = v_2 + v_1$ vérifient $z - 1 = y - x - 2 = 0$, on peut donc prendre par exemple $v_2 = w_2 = (0, 2, 1)$. La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de déterminant 1 donc inversible. Par construction, si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car on a $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2 + v_1$ et $f(v_3) = 2v_3$. Par formule de changement de base, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f) = A = PTP^{-1}$. Comme $X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff Y' = TY$ en posant $Y = P^{-1}X$, il suffit de poser $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et le système équivaut à $y_1' = y_1 + y_2$, $y_2' = y_2$ et $y_3' = 2y_3$ dont les solutions sont $y_2 = \lambda_2 e^t$, $y_3 = \lambda_3 e^{2t}$ et $y_1 = (\lambda_2 t + \lambda_1)e^t$ en résolvant $y_1' = y_1 + \lambda_2 e^t$ avec la méthode de variation de la constante. Les solutions de (E) sont donc (on a raisonné par équivalence), comme $X = PY$, les vecteurs colonnes X tels que ${}^tX = (x\ y\ z)$ avec $x = (\lambda_2 t + \lambda_1)e^t - \lambda_3 e^{2t}$, $y = (\lambda_2 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^t$, $z = \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{2t}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

<u>Questions de cours</u> :

- que peut-on dire de l'ensemble E des solutions de (S) : on sait que c'est un espace vectoriel de dimension 3 car avec CAUCHY-LIPSCHITZ, l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ telle que $\varphi(X) = X(0)$ est un isomorphisme.
- que se passe-t-il si les coefficients dépendent du temps ? Peut-on résoudre ? Qu'arrive-t-il à E ? : dans ce cas, l'espace des solutions est toujours de dimension 3 mais on ne sait en général pas résoudre.
- que dire du polynôme caractéristique et du polynôme minimal d'un endomorphisme ? : pour une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique $\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}\,(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$ est réel, de degré n, unitaire. Ses racines sont les valeurs propres (complexes) de A. Le polynôme minimal est celui unitaire de plus petit degré parmi tous les polynômes annulateurs de A. Il divise tous les polynômes annulateurs de A (mais cette structure d'idéal est hors programme). Ses racines sont aussi les valeurs propres (complexes) de A. Il est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- discuter le cas d'une matrice de passage non constante : on ne peut plus résoudre le système différentiel avec la même méthode classique en posant $Y = PX$ car $Y' = P'X + PX'$ et $P' \neq 0$.

13.42 **a.** On reporte les expressions proposées dans l'équation et on a $\alpha C_1 t^{\alpha-1} = 3C_2 t^{\beta-2}$ et $\beta C_2 t^{\beta-1} = 2C_1 t^{\alpha}$. On doit donc prendre $\alpha = \beta - 1$ (pour les puissances de t) et, comme $\alpha\beta C_2 = 6C_2$, si on veut avoir des solutions non nulles, il convient de prendre $\alpha\beta = 6$. Ainsi, $\alpha\beta = \beta(\beta - 1) = 6$ donc $\beta^2 - \beta - 6 = 0$ ce qui montre que $\beta = 3$ ou $\beta = -2$. Par conséquent, les fonctions $f_1 : t \mapsto (3t^2, 2t^3)$ et $f_2 : t \mapsto \left(\frac{1}{t^3}, -\frac{1}{t^2}\right)$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ sont des solutions (on le vérifie réciproquement) de (S) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Comme (E) est un système linéaire sans second membre, l'ensemble E est un espace vectoriel. De plus, par CAUCHY-LIPSCHITZ, l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(y_1, y_2) = (y_1(1), y_2(1))$ est un isomorphisme donc $\dim(E) = 2$. La famille (f_1, f_2) (c'est clair) de solutions de (S) constitue donc une base de E.

c. Les fonctions $g_1 : t \mapsto (3t^2, 2t^3)$ et $g_2 : t \mapsto \left(\dfrac{1}{t^3}, -\dfrac{1}{t^2}\right)$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ sont solutions de (S) sur $\mathbb{R}_-^*$. En notant E' l'espace vectoriel des solutions de (S) sur $\mathbb{R}_-^*$, $\psi : E' \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(y_1, y_2) = (y_1(-1), y_2(-1))$ est un isomorphisme donc $\dim(E') = 2$. La famille libre (g_1, g_2) est donc une base de E'.

13.43 **a.** Le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est fixé. Les solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y'' - 9y = 0$ sont les fonctions $y : t \mapsto Ae^{3t} + Be^{-3t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ d'après le cours. Il est clair que les fonctions $f_1 : t \mapsto -\dfrac{at+b}{9}$ et $f_2 : t \mapsto \dfrac{at-b}{9}$ sont respectivement solutions particulières de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe d'après ce qui précède quatre scalaires réels A_1, A_2, B_1, B_2 tels que $\forall t > 0,\ y(t) = A_1e^{3t} + B_1e^{-3t} - \dfrac{at+b}{9}$ et $\forall t < 0,\ y(t) = A_2e^{3t} + B_2e^{-3t} + \dfrac{at-b}{9}$.

Par continuité de y en 0, $y(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = A_1 + B_1 - \dfrac{b}{9} = \lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = A_2 + B_2 - \dfrac{b}{9}$: $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$ (1). Par continuité de y' en 0, on a $y'(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} y'(t) = 3A_1 - 3B_1 - \dfrac{a}{9} = \lim\limits_{t\to 0^-} y'(t) = 3A_2 - 3B_2 + \dfrac{a}{9}$ donc $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 + \dfrac{2a}{27}$ (2). En additionnant et en soustrayant (1) et (2) : $A_2 = A_1 - \dfrac{a}{27}$ et $B_2 = B_1 + \dfrac{a}{27}$. Réciproquement, soit $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = A_1 + B_1 - \dfrac{b}{9}$, par $\forall t > 0,\ y(t) = A_1e^{3t} + B_1e^{-3t} - \dfrac{at+b}{9}$ et $\forall t < 0,\ y(t) = \left(A_1 + \dfrac{a}{27}\right)e^{3t} + \left(B_1 - \dfrac{a}{27}\right)e^{-3t} + \dfrac{at-b}{9}$. Ce qui précède prouve que y est une solution de classe C^∞ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et R_-^*. De plus, comme il vient $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = y(0) = A_1 + B_1 - \dfrac{b}{9}$: y est continue en 0. $\lim\limits_{t\to 0^+} y'(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} y'(t) = 3A_1 - 3B_1 - \dfrac{a}{9}$ donc y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = 3A_1 - 3B_1 - \dfrac{a}{9}$. Enfin, $\forall t > 0,\ y''(t) = 9A_1e^{3t} + 9B_1e^{-3t}$ et $\forall t < 0,\ y''(t) = 9\left(A_1 - \dfrac{a}{27}\right)e^{3t} + 9\left(B_1 + \dfrac{a}{27}\right)e^{-3t}$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} y''(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} y''(t) = 9A_1 + 9B_1$ et y est donc deux fois dérivable en 0 (théorème de prolongement C^1 appliqué à y') avec $y''(0) = 9A_1 + 9B_1$. Ainsi $y''(0) + y(0) = 9A_1 + 9B_1 - 9\left(A_1 + B_1 - \dfrac{b}{9}\right) = b = a|0| + b$. Finalement, y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2$, $y(0) = A_1 + B_1 - \dfrac{b}{9}$, $\forall t > 0,\ y(t) = A_1e^{3t} + B_1e^{-3t} - \dfrac{at+b}{9}$ et $\forall t < 0,\ y(t) = \left(A_1 + \dfrac{a}{27}\right)e^{3t} + \left(B_1 - \dfrac{a}{27}\right)e^{-3t} + \dfrac{at-b}{9}$.

b. Si une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ a l'expression ci-dessus, pour que y admette une asymptote en $+\infty$, il est clair qu'il est nécessaire et suffisant qu'on ait $A_1 = 0$ et pour que y admette une asymptote en $-\infty$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait $B_1 - \dfrac{a}{27} = 0$. Ainsi, la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = \dfrac{a}{27} - \dfrac{b}{9}$, $\forall t > 0,\ y(t) = \dfrac{a}{27}e^{-3t} - \dfrac{at+b}{9}$ et $\forall t < 0,\ y(t) = \dfrac{a}{27}e^{3t} + \dfrac{at-b}{9}$ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ dont le graphe possède des asymptotes en $\pm\infty$, respectivement les droites d'équations $y = -\dfrac{ax+b}{9}$ et $y = \dfrac{ax-b}{9}$.

13.44 On résout cette équation sur les trois intervalles $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1; 0[$ et $I_3 =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$. Les solutions de $(E_0)\ :\ 2t(1+t)y' + (1+t)y = 0 \iff y' + \dfrac{1}{2t}y = 0$ sur chacun de ces intervalles sont, puisqu'une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ est $t \mapsto \dfrac{\ln(|t|)}{2}$, les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{\frac{-\ln(|t|)}{2}} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{|t|}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Méthode 1</u> pour trouver une solution particulière :

<u>Sur I_3</u>, par variation de la constante, on obtient $2t(1+t)\dfrac{\lambda'}{\sqrt{t}} = 1 \iff \lambda' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$. On peut prendre

$\lambda = \mathrm{Arctan}(\sqrt{t})$. Les solutions de (E) sur I_3 sont donc les $y : t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{t}) + \lambda}{\sqrt{t}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sur I_1, I_2, avec la même méthode, $2t(1+t)\dfrac{\lambda'}{\sqrt{-t}} = 1$ donc $\lambda' = -\dfrac{1}{2\sqrt{-t}(1+t)} = -\dfrac{1}{2\sqrt{-t}(1-(\sqrt{-t})^2)}$ et on peut prendre par $\lambda = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right|$ (il vaut mieux connaître la fonction Argth). Ainsi, les solutions de (E) sur I_1 ou I_2 sont les fonctions $y : t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{-t}}\left(\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right| + \lambda\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Méthode 2 : on pouvait aussi chercher une solution particulière y sur $\mathbb{R}$ qui soit développable en série entière, c'est-à-dire $\forall t \in]-r;r[,\ y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec $r \leqslant 1$ (car -1 est exclu de I_1, I_2, I_3). On dérive terme à terme et on remplace dans (E), ce qui donne $2t\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2t^2\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}t^{n-2} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + t\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}t^{n-1} = 1$ ou encore, en mettant tout en t^n : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2n a_n t^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2(n-1)a_{n-1}t^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}t^n = 1$ puis, en regroupant les termes : $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2na_n + 2(n-1)a_{n-1} + a_n + a_{n-1})t^n = 1$. Ainsi, puisque $r > 0$ par hypothèse, on identifie et on a $a_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)a_n + (2n-1)a_{n-1} = 0$. On montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ donc $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n t^n}{2n+1}$. Puisque le rayon de cette série entière vaut clairement 1 (par D'ALEMBERT par exemple), les calculs précédents se remontent et prouvent que y est bien solution de (E) sur $]-1;1[$. Comme $y(0) = 1$, il reste à exprimer y avec les fonctions usuelles pour $t \in]-1;1[\setminus\{0\}$ et on distingue deux cas selon que $t < 0$ ou $t > 0$:

si $t \in]0;1[$, $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$.

si $t \in I_2$, $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{-t}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(\sqrt{-t})^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{-t}}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(\sqrt{-t})^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(\sqrt{-t})^n}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right)}{2\sqrt{-t}}$.

Méthode 3 : on pouvait enfin, sur I_3 par exemple, associer à $y : I_3 \to \mathbb{R}$ dérivable, la fonction $z : I_3 \to \mathbb{R}$ définie par $z(u) = uy(u^2)$ ou $\dfrac{z(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = y(t)$. z est aussi dérivable sur I_3 et $\forall t > 0,\ y'(t) = \dfrac{z'(\sqrt{t})}{2t} - \dfrac{z(\sqrt{t})}{2t\sqrt{t}}$. Ainsi, y solution de (E) sur I_3 équivaut à $\forall t > 0,\ t(1+t)\left(\dfrac{z'(\sqrt{t})}{t} - \dfrac{z(\sqrt{t})}{t\sqrt{t}}\right) + (1+t)\dfrac{z(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = 1$ c'est-à-dire à $z'(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{1+t}$ ou $\forall u \in I_3,\ z'(u) = \dfrac{1}{1+u^2} \iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \forall u > 0,\ z(u) = \mathrm{Arctan}(u) + \lambda$. On conclut en remplaçant que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(t) = \dfrac{z(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{t}) + \lambda}{\sqrt{t}}$.

Raccords : on va traiter les raccords en 0 et en -1.

En 0 : soit $y :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ solution de (E), alors $y(0) = 1$ en prenant $t = 0$ dans (E) et il existe d'après ce qui précède des constantes λ et μ réelles telles que $\forall t > 0,\ y(t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{t}) + \lambda}{\sqrt{t}}$ et $\forall t \in]-1;0[,\ y(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{-t}}\left(\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right| + \mu\right)$. Comme y est continue en 0 et que si si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ on a $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\lambda}{\sqrt{t}} = \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\mu}{\sqrt{t}} = \pm\infty$, on ne peut avoir que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, $y :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par $y(0) = 1$, $\forall t > 0,\ y(t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ et $\forall t \in]-1;0[,\ y(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{-t}}\left(\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right|\right)$.

Réciproquement, cette fonction est solution de (E) sur $]-1;+\infty[$ et elle est développable en série entière sur $]-1;1[$ donc elle y est de classe C^∞. Comme elle est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations, elle est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$ donc l'unique solution de (E) sur $]-1;+\infty[$.

En -1 : soit $y : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ solution de (E), alors en prenant $t=-1$ dans (E), on obtient $0=1$ qui est absurde.Ainsi, il n'y a aucune solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

Il n'y a donc aucune solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

13.45 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(f_k)(x) = x^2 f_k'(x) + 2if_k(x) = x^2(kx^{k-1} - \frac{2i}{x^2}x^k)e^{\frac{2i}{x}} + 2ix^k e^{\frac{2i}{x}}$ donc, en simplifiant $\varphi(f_k) = kf_{k+1}$. Si $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ vérifie $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$, alors en divisant par $e^{\frac{2i}{x}}$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0$ donc le polynôme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$ est nul car il a une infinité de racines : $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0,\cdots,f_n)$ est libre.

Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $x^2 f'(x) + 2if(x) = 0$. Comme une primitive de $x \mapsto -\frac{2i}{x^2}$ est $x \mapsto \frac{2i}{x}$, la fonction f s'écrit $f : x \mapsto \alpha e^{\frac{2i}{x}} = \alpha f_0(x)$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(f_0) \neq \{0\}$ et φ n'est pas injective.

b. L'application ψ_m est bien définie d'après la question **a.**. Comme on sait que $(f_0,\cdots,f_m)$ est une base de F_m toujours d'après la question **a.**, on sait que $\mathrm{Im}\,(\psi_m) = \mathrm{Vect}(\psi(f_0),\cdots,\psi_m(f_m)) = \mathrm{Vect}(f_2, 2f_3,\cdots,mf_{m+1})$ donc $\mathrm{Im}\,(\psi_m) = \mathrm{Vect}(f_2,\cdots,f_{m+1})$. Ainsi, par liberté de la famille $(f_2,\cdots,f_{m+1})$, $\mathrm{rang}\,(\psi_m) = m$.

On pouvait aussi utiliser le théorème du rang car $\mathrm{Ker}(\psi_m) = \mathrm{Vect}(f_0)$ donc, comme $\dim(F_m) = m+1$, on a à nouveau $\mathrm{rang}\,(\psi_m) = \dim(F_m) - \dim(\mathrm{Ker}(\psi_m)) = m$.

c. Si $n \geqslant 1$, comme $x \mapsto e^{\frac{2i}{x}}$ est de module 1 donc bornée et que $x \mapsto x^k$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on a $\lim_{x\to 0^+} f_k(x) = 0$ donc on peut prolonger f_k par continuité en 0 en posant $f_k(0) = 0$. Par contre, f_0 n'est pas prolongeable par continuité en 0 car $x \mapsto e^{\frac{2i}{x}}$ n'admet pas de limite finie en 0^+.

d. Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

La fonction f_1 n'est pas dérivable en 0 car $\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x-0} = e^{\frac{2i}{x}}$ n'admet pas de limite finie en 0.

Pour $n \geqslant 2$, la fonction f_n est dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1}e^{\frac{2i}{x}} = 0$ donc $f_n'(0) = 0$.

Si $n \geqslant 3$, $\forall x > 0$, $f_n'(x) = (nx^{n-1} - \frac{2i}{x^2}x^n)e^{\frac{2i}{x}} = (nx-2i)x^{n-2}e^{\frac{2i}{x}}$ donc $\lim_{x\to 0^+} f_n'(x) = 0 = f_n'(0)$ donc f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Par contre, f_2 n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car $\forall x > 0$, $f_2'(x) = (2x-2i)e^{\frac{2i}{x}}$ donc f_2' n'admet pas de limite finie quand x tend vers 0^+.

13.46 **a.** $(S) \iff X' = AX + B(t)$ si ${}^tX = (x\ y\ z)$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tB = (-t-6\ 4\ -t)$.

b. Après un calcul brutal, on trouve $\chi_A = (X^2+1)(X-1)$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Ainsi A est diagonalisable et s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, i, -i)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2i & -2i \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en résolvant les trois systèmes linéaires $AX = X$, $AX = iX$ et $AX = -iX$.

c. Ce système (S) est linéaire à coefficients constants et le second membre est polynomial de degré 1 donc, comme 0 n'est pas valeur propre de A, on peut chercher une solution particulière sous la même forme, c'est-à-dire avec trois fonctions affines pour coordonnées : ${}^tX_p = (at+b, ct+d, et+f)$. On trouve après identification que X_p est solution de (S) si ${}^tX_p(t) = (t-1, 0, t+1)$.

d. Comme $X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff Y' = DY$ avec $Y = P^{-1}X$ et que les solutions complexes de $Y' = DY$ sont les $t \mapsto (\lambda_1 e^t, \lambda_2 e^{it}, \lambda_3 e^{-it})$ avec $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{C}^3$, on en déduit que les solutions complexes de l'équation homogène $X' = AX$ sont, comme $X = PY$, les fonctions $t \mapsto (x, y, z)$ avec $x(t) = \lambda_1 e^t + 2i\lambda_2 e^{it} - 2i\lambda_3 e^{-it}$, $y(t) = (1-i)\lambda_2 e^{it} + (1+i)\lambda_3 e^{-it}$ et $z(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{it} + \lambda_3 e^{-it}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$. Par théorème de structure, les solutions complexes de (S) sont donc les fonctions $t \mapsto (x, y, z)$ avec $x(t) = \lambda_1 e^t + 2i\lambda_2 e^{it} - 2i\lambda_3 e^{-it}$, $y(t) = (1-i)\lambda_2 e^{it} + (1+i)\lambda_3 e^{-it}$ et $z(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{it} + \lambda_3 e^{-it}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$.

On prend les parties réelles de ces fonctions pour obtenir toutes les solutions réelles de (S), ce qui donne, en posant $\lambda_1 = a_1 + ib_1$, $\lambda_2 = a_2 + ib_2$ et $\lambda_3 = a_3 + ib_3$, $x(t) = a_1 e^t + 2(b_3 - b_2)\cos(t) - 2(a_2 + a_3)\sin(t) + t - 1$, $y(t) = (a_2 + a_3 + b_2 - b_3)\cos(t) + (a_2 + a_3 - b_2 + b_3)\sin(t)$, $z(t) = a_1 e^t + (a_2 + a_3)\cos(t) + (b_3 - b_2)\sin(t) + t + 1$ ce qui revient à écrire $x(t) = \alpha_1 e^t - 2\alpha_3\cos(t) - 2\alpha_2\sin(t) + t - 1$, $y(t) = (\alpha_2 + \alpha_3)\cos(t) + (\alpha_2 - \alpha_3)\sin(t)$, $z(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2\cos(t) - \alpha_3\sin(t) + t + 1$ avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2 + a_3$ et $\alpha_3 = b_2 - b_3$.

13.47 **a.** Comme $1 - x$ s'annule en $x = 1$, on résout cette équation sur $I_1 =]-\infty; 1[$ ou $I_2 =]1; +\infty[$. Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est $x \mapsto \ln(|x-1|)$, les solutions de (E_0) sur I_1 ou I_2 sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda(x-1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (la valeur absolue passe dans le signe de λ).

b. Si $\forall x \in]-r; r[$, $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ en dérivant terme à terme, il vient donc $xy'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ et $y'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. En reportant dans (E), pour $x \in]-\mathrm{Min}(1,r); \mathrm{Min}(1,r)[$, on trouve $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ donc, en identifiant les coefficients dans ce DSE : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} - n a_n + a_n = b_n$. Pour $n = 0$, on trouve $a_1 = b_0 - a_0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n = b_n$. En multipliant par n cette dernière équation, on a $n(n+1)a_{n+1} - n(n-1)a_n = n b_n$. Ainsi, si $n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (k(k+1)a_{k+1} - (k-1)k a_k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k$ ce qui se simplifie par télescopage en $n(n-1)a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k b_k$ et enfin en $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k b_k$.

c. On multiplie l'inégalité par $|t|^n$ si $|t| < 1$ ce qui donne $\forall n \geqslant 2$, $|a_n t^n| \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k|b_k||t|^{k-1}$ par inégalité triangulaire car $|t|^n \leqslant |t|^{k-1}$. Mais comme le rayon d'une série dérivée est le même que celui de la série initiale, la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k b_k t^{k-1}$ converge absolument pour $|t| < 1$ par hypothèse donc les sommes partielles $S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k|b_k||t|^{k-1}$ sont bornées (par M). Ainsi, la suite $(a_n t^n)_{n \geqslant 0}$ est bornée (elle tend même vers 0 avec la majoration $|a_n| \leqslant \dfrac{M}{n(n-1)}$). Par conséquent, $R \geqslant 1$ et les calculs précédents sont valides ce qui montre que la fonction $y_p : x \mapsto b_0 x + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k b_k\Big) \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ est solution particulière (pour a_0 par exemple) de (E) sur $]-1; 1[$. Les solutions de (E) sur $]-1; 1[$ sont donc les $y : \lambda(x-1) + y_p(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

d. Comme le rayon de convergence du développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ vaut 1, celui associé à la fonction g vaut 2 et on $\forall x \in]-2; 2[$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n 2^n}$ d'où $b_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{1}{n 2^n}$. On a d'après la question précédente comme solution particulière de (E) la fonction $y_p : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{2^k}\Big) \dfrac{x^n}{n(n-1)}$. Pour $x \in]-1; 1[$, $y_p(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \Big(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\Big) \dfrac{x^n}{n(n-1)} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n 2^{n-1}} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n-1)2^{n-1}}$. On en déduit que $y_p(x) = -x\ln(1-x) - (-x - \ln(1-x)) + 2\Big(-\dfrac{x}{2} - \ln\Big(1 - \dfrac{x}{2}\Big)\Big) + x\ln\Big(1 - \dfrac{x}{2}\Big)$. Ainsi, les solutions de (E) pour $g(x) = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda(x-1) + (1-x)\ln(1-x) + (x-2)\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$.

13.48 **a.** La fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall u \in \mathbb{R},\ z(u) = y(e^u)e^{-u/2}$ est bien définie car $\forall u \in \mathbb{R},\ e^u \in \mathbb{R}_+^*$ et, en posant $u = \ln(t)$ si $t > 0$, on a $\forall t > 0,\ z(\ln(t)) = \dfrac{y(t)}{\sqrt{t}}$ de sorte que $y(t) = z(\ln(t))\sqrt{t}$.

b. On reporte dans (E) et, puisque $y'(t) = \dfrac{z(\ln(t))}{2\sqrt{t}} + \dfrac{z'(\ln(t))}{\sqrt{t}}$ et $y''(t) = -\dfrac{z(\ln(t))}{4t\sqrt{t}} + \dfrac{z''(\ln(t))}{t\sqrt{t}}$, on trouve que $\forall t > 0,\ t^2\Big(-\dfrac{z(\ln(t))}{4t\sqrt{t}} + \dfrac{z''(\ln(t))}{t\sqrt{t}}\Big) + z(\ln(t))\sqrt{t} = 0$ ce qui se simplifie en $\forall t > 0,\ z''(\ln(t)) + \dfrac{z(\ln(t))}{4} = 0$. Mais comme $t \mapsto \ln(t)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, on a donc $(E')\ :\ \forall u \in \mathbb{R},\ z''(u) + \dfrac{z(u)}{4} = 0$.

c. Les solutions de (E') sont les $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $z(u) = A\cos\left(\frac{u}{2}\right) + B\sin\left(\frac{u}{2}\right)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (E) sont donc de la forme $y : t \mapsto \sqrt{t}\Big(A\cos\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\ln(t)}{2}\right)\Big)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Réciproquement, si y est l'une de ces fonctions, en remontant les calculs ou en dérivant deux fois et en remplaçant, on vérifie que y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions de la forme $y : t \mapsto \sqrt{t}\Big(A\cos\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\ln(t)}{2}\right)\Big)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

13.49 **a.** Méthode 1 : posons $g : t \mapsto f'(t) - \alpha f(t)$ de sorte que f est solution du problème de Cauchy : $(E)\ :\ y' - \alpha y = g$ avec $y(0) = f(0)$. On résout cette équation (E) de manière traditionnelle. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$. Comme la solution est donnée, on vérifie que la fonction $y_0 : x \mapsto \int_0^x (f'(t) - \alpha f(t))e^{\alpha(x-t)}dt = e^{\alpha x}\int_0^x g(t)e^{-\alpha t}dt$ est solution particulière de (E). En effet, comme g est continue sur $\mathbb{R}_+$ puisque f y est de classe C^1, la fonction $h : x \mapsto \int_0^x g(t)e^{-\alpha t}dt$ est de classe C^1 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ par le théorème fondamental de l'intégration et $h'(x) = g(x)e^{-\alpha x}$. Comme $y_0(x) = e^{\alpha x}h(x)$, y_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par produit et $y_0'(x) = e^{\alpha x}h'(x) + \alpha e^{\alpha x}h(x) = g(x) + \alpha y_0(x)$ de sorte que $y_0'(x) - \alpha y_0(x) = g(x)$ comme attendu. Par structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + y_0(x)$.

La fonction f est parmi ces solutions celle qui vérifie en plus $y(0) = f(0)$, ce qui impose $\lambda = f(0)$. Ainsi, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f(0)e^{\alpha x} + \int_0^x (f'(t) - \alpha f(t))e^{\alpha(x-t)}dt$.

Méthode 2 : comme f est de classe C^1 sur $[0;x]$, et par théorème fondamental de l'intégration, on a $[f(t)e^{-\alpha t}]_0^x = f(x)e^{-\alpha x} - f(0) = \int_0^x (f(t)e^{-\alpha t})'dt = \int_0^x (f'(t) - \alpha f(t))e^{-\alpha t}dt$. Il suffit de multiplier par $e^{\alpha x}$ pour avoir le résultat de l'énoncé.

Méthode 3 : dans l'intégrale $\int_0^x (f'(t) - \alpha f(t))e^{\alpha(x-t)}dt$ qui existe car les fonctions sont continues sur $[0;x]$, on utilise Chasles pour avoir $\int_0^x (f'(t) - \alpha f(t))e^{\alpha(x-t)}dt = \int_0^x f'(t)e^{\alpha(x-t)}dt - \alpha\int_0^x f(t)e^{\alpha(x-t)}dt$ et on effectue une intégration par parties dans la première en posant $u = f$ et $v : t \mapsto e^{-\alpha(x-t)}$ qui sont de classe C^1 sur $[0;x]$ pour obtenir $\int_0^x f'(t)e^{\alpha(x-t)}dt = [f(t)e^{-\alpha(x-t)}]_0^x + \alpha\int_0^x f(t)e^{-\alpha(x-t)}dt$ ce qui donne la relation.

b. Si $\mathrm{Re}\,(\alpha) < 0$, on a $|f(0)e^{\alpha x}| = |f(0)|e^{\mathrm{Re}\,(\alpha)x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(0)e^{\alpha x} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, comme par hypothèse $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \geqslant x_0,\ |g(t)| \leqslant |\mathrm{Re}\,(\alpha)|\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $x \geqslant x_0$, en décomposant

$\int_0^x g(t)e^{\alpha(x-t)}dt = \int_0^{x_0} g(t)e^{\alpha(x-t)}dt + \int_{x_0}^x g(t)e^{\alpha(x-t)}dt$, on peut majorer par inégalité de la moyenne

$$\left|\int_0^x g(t)e^{\alpha(x-t)}dt\right| \leqslant \left|e^{\alpha x}\right| \times \int_0^{x_0} |g(t)e^{-\alpha t}|dt + |\mathrm{Re}\,(\alpha)|\frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^x e^{\mathrm{Re}\,(\alpha)(x-t)}dt.$$

Comme $\int_0^{x_0} |g(t)e^{-\alpha t}|dt$ est une constante relativement à x, que $\left|e^{\alpha x}\right| = e^{\mathrm{Re}\,(\alpha)x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\mathrm{Re}\,(\alpha)x} = 0$, il existe $x_1 \geqslant x_0$ tel que $\forall x \geqslant x_1,\ 0 \leqslant \left|e^{\alpha x}\right| \times \int_0^{x_0} |g(t)e^{-\alpha t}|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, avec le changement de variable $t = x - u = \varphi(u)$ (facile à justifier), on trouve

$$0 \leqslant \int_{x_0}^x e^{\mathrm{Re}\,(\alpha)(x-t)}dt = \int_0^{x-x_0} e^{\mathrm{Re}\,(\alpha)u}du \leqslant \int_0^{+\infty} e^{\mathrm{Re}\,(\alpha)u}du = \frac{1}{|\mathrm{Re}\,(\alpha)|}.$$

On arrive donc à $\forall x \geqslant x_1,\ \left|\int_0^x g(t)e^{\alpha(x-t)}dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ce qui montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)e^{\alpha(x-t)}dt = 0$.

c. ($\Longrightarrow$) Supposons qu'il existe une racine α de P avec une partie réelle positive ou nulle. Posons alors $f : x \mapsto e^{\alpha x}$, comme $|f(x)| = e^{\mathrm{Re}\,(\alpha)x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = 1$ si $\mathrm{Re}\,(\alpha) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ si $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$. Toujours est-il que f ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Par contre, comme f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} = \alpha^k f$, on a $P(D)(f) = \Big(\sum\limits_{k=0}^n a_k\alpha^k\Big)f = P(\alpha)f = 0$ ce qui montre que l'assertion $\forall f \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),\ \lim\limits_{x\to+\infty} P(D)f(x) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ est fausse (la fonction f la contredit). Par contre-apposée, on a bien montré la première implication.

($\Longleftarrow$) On montre cette implication par récurrence sur le degré n de P.

- Si $n = 1$, alors $P = a_1(X - \alpha)$ avec $\alpha = -\frac{a_0}{a_1}$ l'unique racine de P supposée de partie réelle strictement négative. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} P(D)f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} (f'(t) - \alpha f(t)) = 0$ en divisant par a_1 et on conclut avec la question **b.** que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $\mathrm{Re}\,(\alpha) < 0$, ce qui clôt l'initialisation.

- Si $n \geqslant 2$ et qu'on suppose l'implication vraie pour tous les polynômes de degré $n-1$ ayant toutes leurs racines de parties réelles strictement négatives. Soit maintenant $P = \sum\limits_{k=0}^n a_kX^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ (ie $a_n \neq 0$) et dont toutes les racines ont des parties réelles strictement négatives. Soit $f \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} P(D)f(x) = 0$. Il s'agit de montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$! Tout d'abord, on montre par récurrence sur n que si $P(D)(f) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$, alors f y est de classe C^∞ car on peut écrire $f^{(n)} = -\frac{1}{a_n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_kf^{(k)}$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, il existe une racine α de P ce qui permet d'écrire $P = (X-\alpha)Q$ et Q est de degré $n-1$ avec toutes ses racines (qui sont parmi celles de P) de parties réelles strictement négatives. Posons $g = Q(D)(f)$, alors g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car f y est de classe C^n et que $Q(D)(f)$ fait intervenir au maximum la dérivée $(n-1)$-ième de f. De plus, en notant D l'endomorphisme de $E = C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ défini par $D : f \mapsto f'$, on a $P(D) = ((X-\alpha)Q)(D) = (D - \alpha\mathrm{id}_E) \circ Q(D)$ d'après la relation fondamentale sur les polynômes d'endomorphismes, ce qui montre que $P(D)(f) = (D-\alpha\mathrm{id}_E)(Q(D)(f)) = (D-\alpha\mathrm{id}_E)(g) = g' - \alpha g$. Ainsi, par hypothèse, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (g'(x) - \alpha g(x)) = 0$ et la question **b.** montre encore que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ car $\mathrm{Re}\,(\alpha) < 0$. Puisque $Q \in \mathbb{C}[X]$ est de degré $n-1$ avec toutes ses racines de parties réelles strictement négatives, que $g = Q(D)(f)$, que $f \in C^{n-1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, on conclut par hypothèse de récurrence que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ comme attendu. L'hérédité est établie.

On a donc prouvé par principe de récurrence que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ dont toutes les racines sont de parties réelles strictement négatives, on a $\forall f \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $\lim_{x \to +\infty} P(D)f(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Par double implication, on conclut à l'équivalence de l'énoncé.

13.50 **a.** Puisque c'est ce qu'on doit majorer, définissons $G : [a; b] \to \mathbb{R}$ par $G(t) = F(t) \exp\left(-\int_a^t \Phi(s)y(s)ds\right)$.

Puisque Ψ et y sont continues sur l'intervalle $[a; b]$, la fonction F est de classe C^1 sur $[a; b]$ par le théorème fondamental de l'intégration, comme la fonction $t \mapsto \int_a^t \Psi(s)ds$ pour la même raison. Ainsi, par composée et produit, la fonction G est de classe C^1 sur $[a; b]$ et on a, pour $t \in [a; b]$:

$$G'(t) = F'(t) \exp\left(-\int_a^t \Psi(s)ds\right) - F(t)\Psi(t) \exp\left(-\int_a^t \Psi(s)ds\right) = \Psi(t)(y(t) - F(t)) \exp\left(-\int_a^t \Psi(s)ds\right).$$

Or, par hypothèse, $\forall t \in [a; b]$, $y(t) - F(t) \leqslant \Phi(t)$ donc, comme $\Psi(t) \exp\left(-\int_a^t \Psi(s)ds\right) \geqslant 0$, il vient $G'(t) \leqslant \Psi(t)\Phi(t) \exp\left(-\int_a^t \Psi(s)ds\right)$. Par croissance de l'intégrale, pour $t \in [a; b]$, comme attendu :

$$\int_a^t G'(s)ds = G(t) - G(a) = G(t) \leqslant \int_a^t \Psi(s)\Phi(s) \exp\left(-\int_a^s \Psi(u)du\right)ds.$$

b. En multipliant l'inégalité de la question **a.** par $\exp\left(\int_a^t \Psi(s)ds\right) > 0$, on obtient par linéarité de l'intégrale et l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}
\forall t \in [a; b],\ F(t) &\leqslant \exp\left(\int_a^t \Psi(s)ds\right) \int_a^t \Psi(s)\Phi(s) \exp\left(-\int_a^s \Psi(u)du\right)ds \\
&= \int_a^t \Psi(s)\Phi(s) \exp\left(\int_a^t \Psi(s)ds - \int_a^s \Psi(u)du\right)ds \\
&= \int_a^t \Psi(s)\Phi(s) \exp\left(\int_s^t \Psi(u)du\right)ds
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $y(t) \leqslant \Phi(t) + F(t)$, on a bien $\forall t \in [a; b]$, $y(t) \leqslant \Phi(t) + \int_a^t \Psi(s)\Phi(s) \exp\left(\int_s^t \Psi(u)du\right)ds$.

c. Puisque, par hypothèse, on a l'inégalité $\forall t \in [a; b]$, $y(t) \leqslant \Phi(t) + \int_a^t \Psi(s)y(s)ds$, il s'agit d'établir que $\forall t \in [a; b]$, $c + \int_a^t \Psi(s)y(s)ds \leqslant c \exp\left(\int_a^t \Psi(s)ds\right)$, ce qui revient à montrer la nouvelle inégalité $\forall t \in [a; b]$, $\left(c + \int_a^t \Psi(s)y(s)ds\right) \exp\left(-\int_a^t \Psi(s)ds\right) \leqslant c$.

Soit $H : t \mapsto \left(c + \int_a^t \Psi(s)y(s)ds\right) \exp\left(-\int_a^t \Psi(s)ds\right)$, cette fonction est de classe C^1 sur $[a; b]$ comme avant car Φ et y sont continues sur $[a; b]$. De plus, $H'(t) = \left(y(t) - c - \int_a^t \Psi(s)y(s)ds\right)\Psi(t) \exp\left(-\int_a^t \Psi(s)ds\right)$ donc $H'(t) \leqslant 0$ par hypothèse. Ainsi, H est décroissante sur l'intervalle $[a; b]$ et, comme $H(a) = c$, on a $\forall t \in [a; b], H(t) \leqslant c$ ce qui montre bien que $\forall t \in [a; b]$, $y(t) \leqslant \Phi(t) + \int_a^t \Psi(s)y(s)ds \leqslant c \exp\left(\int_a^t \Psi(s)ds\right)$.

d. Comme f et g sont continues et positives sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le résultat de **c.** avec $c = 0$, $b \geqslant 0$ quelconque et en remplaçant y par f, Ψ par g, ce qui montre que $\forall t \in [0; b]$, $f(t) \leqslant 0 \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) = 0$.
Comme f est à la fois positive et négative, elle est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

e. D'abord quelques considérations simples :

- si $a = 0$, on utilise la question **d.** et $f = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
- si $m = 1$, $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant \dfrac{1}{1-a}\displaystyle\int_0^t f(s)g(s)ds = \int_0^t f(s)g_1(s)ds$ en posant $g_1(s) = \dfrac{g(s)}{1-a}$ et comme g_1 a les mêmes propriétés que g, on conclut avec la question **d.** que f est nulle.
- en prenant $t = 0$, on a $f(0) \leqslant af(0)$ donc $f(0) \leqslant 0$ car $a < 1$ donc on conclut $f(0) = 0$ car f est positive.
- si $m = 0$, on a donc $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant \displaystyle\int_0^t f(s)g(s)ds$ et on conclut à nouveau avec **d.** que f est nulle.

On a donc $f(0) = 0$ et on suppose dans toute la suite que $(a, m) \in]0;1[^2$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in [\![1;n-1]\!]$, on applique l'inégalité de l'énoncé en remplaçant t par $m^k t$ ce qui donne $f(m^k t) \leqslant af(m^{k+1}t) + \displaystyle\int_0^t f(s)g(s)ds$ donc $a^k f(m^k t) - a^{k+1}f(m^{k+1}t) \leqslant a^k \displaystyle\int_0^t f(s)g(s)ds$ car $a^k > 0$. On somme toutes ces inégalités pour $k \in [\![0;n-1]\!]$ et il vient

$$f(t) - a^n f(m^n t) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^k f(m^k t) - a^{k+1}f(m^{k+1}t)\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^k \int_0^t f(s)g(s)ds\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right)\int_0^t f(s)g(s)ds.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} m^n = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(m^n t) = f(0) = 0$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ d'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n f(m^n t) = 0$. De plus, puisque $0 < a < 1$, la série géométrique converge et on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on trouve $f(t) \leqslant \dfrac{1}{1-a}\displaystyle\int_0^t f(s)g(s)ds$ et se ramène au cas $m = 0$ ci-dessous.

Dans tous les cas, on peut conclure que ces hypothèse entraînent f nulle sur $\mathbb{R}_+$.

13.51 **a.** D'abord, puisque l'équation est linéaire, on vérifie que l'application v_t est bien linéaire. En effet, soit $(Y_1, Y_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en notant X_1 et X_2 les solutions respectives des deux problèmes de Cauchy ($X_1'(t) = A(t)X_1(t)$ avec $X_1(0) = Y_1$) et ($X_2'(t) = A(t)X_2(t)$ avec $X_2(0) = Y_2$), alors $X_1 + \lambda X_2$ est de classe C^1 par combinaison linéaire et on a

$$(X_1 + \lambda X_2)'(t) = X_1'(t) + \lambda X_2'(t) = A(t)X_1(t) + \lambda A(t)X_2(t) = A(t)(X_1(t) + \lambda X_2(t))$$

avec $(X_1 + \lambda X_2)(0) = X_1(0) + \lambda X_2(0) = Y_1 + \lambda Y_2$.
Ainsi, par définition, $v_t(Y_1 + \lambda Y_2) = (X_1 + \lambda X_2)(t) = X_1(t) + \lambda X_2(t) = v_t(Y_1) + \lambda v_t(Y_2)$ comme attendu.
Si $t \geqslant 0$, par définition $X(t) = v_t(Y) = v_t(X(0))$ (en vecteurs de $\mathbb{R}^n$). Ainsi, comme $R(t)$ est la matrice de v_t dans la base canonique et que la colonne $X(0)$ représente les coordonnées du vecteur $X(0)$ dans la base canonique, on a $X(t) = R(t)X(0)$. (en vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
b. Pour $t = 0$, on a $v_0(Y) = X(0) = Y$ par construction donc v_0 est l'identité de $\mathbb{R}^n$ d'où $R(0) = I_n$.
En prenant $X(0) = Y = E_j$ pour $j \in [\![1;n]\!]$, la solution C_j associée à ce choix de position initiale donne l'équation $C_j(t) = R(t)E_j$ qui est la j-ième colonne de $R(t)$. Comme C_j est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ d'après Cauchy-Lipschitz, la fonction matricielle R est elle aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Pour $Y \in \mathbb{R}^n$ quelconque, avec $X(0) = Y$, on dérive la relation $\forall t \geqslant 0,\ X(t) = R(t)X(0)$, d'où $X'(t) = R'(t)Y = A(t)X(t) = A(t)R(t)Y$. Comme cette relation est vraie quel que soit le vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$ choisi, en prenant successivement les vecteurs E_j de la base canonique, on obtient comme attendu $\forall t \geqslant 0,\ R'(t) = A(t)R(t)$.

c. Suivons l'énoncé en écrivant $W(t) = \det(L_1(t), \dots, L_n(t))$ (notation). Les lignes (composées des cases) L_i sont de classe C^1 d'après la question précédente. On dérive $W(t) = \det(R(t))$ avec la formule du cours,

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_i'(t), L_{i+1}(t)), \cdots, L_n(t))$$

en adaptant l'expression quand $i = 1$ ou $i = n$. Or $R'(t) = A(t)R(t)$ ce qui donne $L_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)L_j(t)$ donc, par multilinéarité et alternance du déterminant, on obtient

$$\begin{aligned} \det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_i'(t), L_{i+1}(t)), \cdots, L_n(t)) &= \det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)L_j(t), \cdots, L_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)\det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_j(t), \cdots, L_n(t)) \\ &= a_{i,i}(t)\det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_i(t), \cdots, L_n(t)) \end{aligned}$$

car seul le terme $j = i$ apporte une contribution éventuellement non nulle.
Ainsi, $W'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(t)\det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_i(t), \cdots, L_n(t)) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(t)\Big)W(t) = \mathrm{Tr}\,(A(t))W(t)$.
En notant H la primitive de $t \mapsto \mathrm{Tr}\,(A(t))$ sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0, l'équation différentielle ci-dessus se résout, comme $W(0) = \det(I_n) = 1$, en $\forall t \geqslant 0,\ W(t) = e^{H(t)} \neq 0$ donc $R(t)$ est bien inversible.

d. Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ et X la solution de (E) telle que $X(0) = Y$. Soit aussi X_1 la solution de (E) telle que $X_1(0) = X(1)$ et $X_2 : t \mapsto X(t+1)$. Les deux fonctions X_1 et X_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, vérifient $X_1(0) = X(1) = X(0+1) = X_2(0)$. Puisque la fonction A est 1-périodique, X_2 est aussi solution de (E) car $\forall t \geqslant 0,\ X_2'(t) = X'(t+1) = A(t+1)X(t+1) = A(t)X_2(t)$. Ainsi, X_1 et X_2 sont des solutions du même problème de Cauchy, ce qui nous permet de conclure que $X_1 = X_2$.
Par conséquent, $\forall t \geqslant 0,\ X_1(t) = R(t)X_1(0) = R(t)X(1) = R(t)R(1)Y = R(t+1)Y = R(t+1)X_2(0) = X_2(t)$.
Comme $R(t)R(1)Y = R(t+1)Y$ pour tout vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$, on a bien $R(t)R(1) = R(t+1)$.

e. • Supposons que $1 \in \mathrm{Sp}(R(1))$, alors il existe un vecteur $Y \neq 0$ tel que $R(1)Y = Y$. Soit X la solution de (E) telle que $X(0) = Y$. D'après **a.** et **d.**, pour $t \geqslant 0$, on a $X(t+1) = R(t+1)Y = R(t)R(1)Y = R(t)Y = X(t)$ donc X est effectivement 1-périodique, de classe C^1 ar solution de (E) et non identiquement nulle car $X(0) = Y \neq 0$.
• Soit X une solution de (E) non identiquement nulle, de classe C^1 et 1-périodique, posons $Y = X(0)$. Si on avait $Y = 0$, alors $\forall t \geqslant 0,\ X(t) = R(t)Y = 0$ et X serait nulle : NON ! Ainsi $Y \neq 0$. Comme X est 1-périodique, on a $X(1) = R(1)X(0) = X(0)$ d'après **a.** donc $R(1)Y = Y$ et 1 est bien une valeur propre de $R(1)$ car $Y \neq 0$.
Par double implication, on a bien l'équivalence de l'énoncé.

f. Soit $t \geqslant 0$, par définition $Q(t+1) = R(t+1)P\Lambda(t+1)P^{-1}$. Or, d'après la question **d.** et l'énoncé, on a $R(t+1) = R(t)R(1) = R(t)PDP^{-1}$ et $\Lambda(t+1) = \mathrm{diag}\Big(\frac{1}{\lambda_1^{t+1}}, \dots, \frac{1}{\lambda_n^{t+1}}\Big) = D^{-1}\Lambda(t)$ par les propriétés de l'exponentielle. Comme $DP^{-1}PD^{-1} = I_n$, on a $Q(t+1) = R(t)PDP^{-1}PD^{-1}\Lambda(t)P^{-1} = R(t)P\Lambda(t)P^{-1} = Q(t)$ donc Q est bien 1-périodique.

g. On constate d'abord que Z est bien définie car Q est bien inversible puisque Λ l'est clairement et R d'après la question **c.**. De plus, ces fonctions matricielles étant de classe C^1, la fonction $t \mapsto Q(t)^{-1}$ l'est aussi (par exemple avec l'expression de l'inverse avec comatrice et déterminant). Ainsi, Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

On effectue d'abord quelques calculs. Il vient $\Lambda'(t) = -D_0\Lambda(t)$ car $(\lambda_1^{-t})' = -\ln(\lambda_1)\lambda_1^{-t}$. De plus, il vient

$Q'(t) = R'(t)P\Lambda(t)P^{-1} + R(t)P\Lambda'(t)P^{-1} = A(t)R(t)P\Lambda(t)P^{-1} - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1} = A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}$.

• Supposons maintenant que $X'(t) = A(t)X(t)$, c'est-à-dire que X est solution de (E). Les calculs sont similaires mais allons-y ! Comme $X(t) = Q(t)Z(t)$, on a $X'(t) = A(t)X(t) = Q'(t)Z(t) + Q(t)Z'(t)$ ce qui donne, avec les calculs précédents :

$$A(t)X(t) = \left[A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}\right]Z(t) + Q(t)Z'(t).$$

Or $A(t)Q(t)Z(t) = A(t)X(t)$, donc après simplification, il reste

$$Q(t)Z'(t) = R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t).$$

Mais comme $Q(t)^{-1} = P(\Lambda(t))^{-1}P^{-1}(R(t))^{-1}$, on obtient finalement, puisque $P^{-1}(R(t))^{-1}R(t)P = I_n$,

$$Z'(t) = P(\Lambda(t))^{-1}P^{-1}(R(t))^{-1}R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t) = P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t) = B(t)Z(t).$$

• Réciproquement, supposons que $Z'(t) = B(t)Z(t)$, alors, comme $X(t) = Q(t)Z(t)$, on a

$$\begin{aligned} X'(t) &= Q'(t)Z(t) + Q(t)Z'(t) \\ &= \left[A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}\right]Z(t) + Q(t)B(t)Z(t) \\ &= A(t)X(t) + \left[Q(t)B(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}\right]Z(t). \end{aligned}$$

Or $Q(t)B(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1} = R(t)P\left[\Lambda(t)P^{-1}P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1} - D_0\Lambda(t)P^{-1}\right] = 0$ après simplification ce qui montre bien qu'on a $X'(t) = A(t)X(t)$, X est solution de (E) comme attendu.

Par double implication, on a : X est solution de $(E) \Longleftrightarrow Z'(t) = B(t)Z(t)$.

13.52 **a.** Pour avoir la majoration, il suffit de montrer que $\forall t \in [a;+\infty[,\ C + \int_a^t u(s)v(s)ds \leqslant C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$.

• Si $C > 0$, définissons donc la fonction $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{C + \int_a^t u(s)v(s)ds}{C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)}$. Comme u et v sont continues sur $[a;+\infty[$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est dérivable sur $[a;+\infty[$ et on a $\forall t \geqslant a,\ f'(t) = \dfrac{u(t)v(t)C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right) - (C + \int_a^t u(s)v(s)ds)Cv(t)\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)}{C^2\exp\left(2\int_a^t v(s)ds\right)}$ qu'on simplifie en $f'(t) = \dfrac{v(t)\left(u(t) - (C + \int_a^t u(s)v(s)ds)\right)}{C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)}$. D'après l'inégalité de l'énoncé, on en déduit que $\forall t \geqslant a,\ f'(t) \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $[a;+\infty[$. Mais $f(a) = 1$ donc $\forall t \geqslant a,\ f(t) \leqslant 1$ ce qui montre bien que $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C + \int_a^t u(s)v(s)ds \leqslant C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$.

• Pour $C = 0$, d'après ce qui précède, comme on a $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant \int_a^t u(s)v(s)ds \leqslant C' + \int_a^t u(s)v(s)ds$ pour tout réel $C' > 0$, on a $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C'\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$. Il suffit ensuite de faire tendre C' vers 0 à t fixé pour avoir $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant 0$. Or comme u est positive par hypothèse, on en déduit que $\forall t \geqslant a,\ u(t) = 0$.

b. Pour utiliser la question précédente, posons $u : t \mapsto ||X(t)||$, $C = ||X(a)|| \in \mathbb{R}_+$ et $v : t \mapsto k$, alors u et v sont bien positives et continues sur $[a;+\infty[$ car X et $v \mapsto ||v||$ sont continues. Par inégalité triangulaire,

$\forall t \geqslant a,\ ||X(t)|| = ||X(t)-X(a)+X(a)|| \leqslant ||X(t)-X(a)||+||X(a)||$. Or $X(t)-X(a) = \int_a^t X'(s)ds$ (on intègre coordonnée par coordonnée) et $||X(t)-X(a)|| \leqslant \int_a^t ||X'(s)||ds \leqslant \int_a^t k||X(s)||ds$: avec $X(t) = (X_1(t),\cdots,X_n(t))$, $|| \int_a^t X'(s)ds|| = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} \left(\left| \int_a^t X_k'(s)ds\right|\right) \leqslant \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} \left(\int_a^t \left|X_k'(s)\right|ds\right) \leqslant \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} \left(\int_a^t ||X'(s)||ds\right) = \int_a^t ||X'(s)||ds$, ce qui montre la majoration $u(t) \leqslant C + \int_a^t u(s)v(s)ds$. Grâce à la question **a.**, on peut donc conclure que $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$, ce qui s'écrit aussi $||X(t)|| \leqslant ||X(a)||e^{k(t-a)}$.

c. Par linéarité de l'équation (E), comme X et Y sont des solutions de (E), alors $Z = X - Y$ l'est aussi. En notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, comme $Z' = AZ$, on a $\forall i \in [\![1;n]\!],\ Z_i'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j(t)$ donc, par inégalité triangulaire, $|Z_i'(t)| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}||Z_j(t)| \leqslant \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)||Z(t)||$. Comme $||Z'(t)|| = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |Z_i'(t)|$, en notant $k = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \geqslant 0$, on a donc $\forall t \geqslant a,\ ||Z'(t)|| \leqslant k||Z(t)||$. Ainsi, d'après la question **b.**, on peut conclure que $\forall t \geqslant a,\ ||Z(t)|| \leqslant ||Z(a)||e^{k(t-a)}$, c'est-à-dire : $\forall t \geqslant a,\ ||X(t) - Y(t)|| \leqslant ||X(a) - Y(a)||e^{k(t-a)}$.

13.53 **a.** Le domaine de définition de $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ est $\mathbb{R}_+^*$ et f est continue sur cet intervalle $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(t) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$ car $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Ainsi, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$: c'est la primitive de f qui s'annule en 0. Alors, le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+$.

b. Comme $f(t) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$, on s'attend à avoir l'équivalent $F(x) \underset{0}{\sim} \int_0^x \sqrt{t}dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^x = \frac{2}{3}x^{3/2}$, ce qui équivaut à $F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2} \underset{0}{=} o\left(x^{3/2}\right)$. Or, pour $x \geqslant 0$, $F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2} = \int_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt - \int_0^x \sqrt{t}dt = \int_0^x \left(\dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)dt$. Ainsi, $F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2} = \int_0^x \dfrac{\ln(1+t)-t}{\sqrt{t}}dt$. Définissons $g : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)-t}{\sqrt{t}} = f(t) - \sqrt{t}$ sur $[0;1]$. Comme $\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, on a $g(t) \underset{0}{\sim} -\dfrac{t^{3/2}}{2}$ donc $h : t \mapsto \dfrac{g(t)}{t^{3/2}}$ est continue sur le segment $[0;1]$ en posant $h(0) = -\dfrac{1}{2}$ donc h est bornée sur le segment $[0;1]$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi, on a l'existence d'un réel $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [0;1],\ |h(t)| \leqslant M$. Par conséquent, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a la majoration $\left|F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2}\right| \leqslant \int_0^x |g(t)|dt = \int_0^x t^{3/2}|h(t)|dt \leqslant M\int_0^x t^{3/2}dt = \dfrac{2M}{5}x^{5/2}$. On en déduit donc que $F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2} \underset{0}{=} o\left(x^{3/2}\right)$ (car $5/2 > 3/2$) et on a bien $F(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^{3/2}$.

c. L'équation homogène (E_0) associée à (E) est (E_0) : $2xy' + y = 0$ dont les solutions réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ car une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{2x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -\dfrac{\ln(x)}{2}$. On fait varier la constante pour avoir une solution particulière ce qui amène l'équation $2\sqrt{x}\,\lambda' = \ln(1+x)$ et on peut prendre $\lambda = \dfrac{F}{2}$. Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} + \dfrac{F(x)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(2\lambda + \int_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt\right)$.
Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, elle l'est à fortiori sur $\mathbb{R}_+^*$ donc de la forme ci-dessus et il existe $a = 2\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0,\ y(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(a + \int_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt\right)$. De plus, $0.y'(0) + y(0) = \ln(1+0) = 0$ donc $y(0) = 0$. D'après la question **b.**, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(2\lambda + \int_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt\right) = 0$ car $3/2 > 1/2$. De plus, si $a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{a}{2\sqrt{x}} = \pm\infty$. Ainsi, par continuité de y en 0, on a forcément $a = 0$ et $y : x \mapsto \dfrac{F(x)}{2\sqrt{x}}$. Comme

$F(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^{3/2}$, on a $y(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x$ donc $y(x) \underset{0}{=} \frac{2}{3}x + o(x)$ ce qui garantit qu'on a $y'(0) = \frac{2}{3}$ une fois prolongée la fonction par continuité en posant $y(0) = 0$. La fonction $y : x \mapsto \frac{F(x)}{2\sqrt{x}}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+$, elle est l'unique solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+$.

d. $\forall t \in]0;1]$, $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}t^{n-\frac{1}{2}}}{n}$ et cette relation est vraie aussi pour $t = 0$ car $f(0) = 0$.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}t^{n-\frac{1}{2}}}{n}$. Soit $x \in]0;1]$ fixé.

(H_1) $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $[0;x]$ (on en vient).

(H_2) Les fonctions f_n sont continues sur $[0;x]$ donc y sont intégrables.

(H_3) f est continue sur $[0;x]$ (déjà vu).

(H_4) Pour $n \geqslant 1$, $\int_0^x |f_n(t)|dt = \int_0^x \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{n}dt = \frac{2x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $\frac{2x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$. Alors, la fonction y de la question précédente vérifie $\forall x \in [0;1]$, $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$ qui s'écrit aussi $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n(2n+1)}$ et y est bien développable en série entière sur $[0;1]$.

13.54 **a.** (E) : $y'' = ay' + by$ est sous forme normalisée, d'ordre 2 avec $a : x \mapsto \frac{x}{2}$ et $b : x \mapsto \frac{1}{2}$ continues sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et on impose les valeurs de $y(0)$ et de $y'(0)$. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, il y a existence et unicité d'une fonction y vérifiant $-2y'' + xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

b. Analyse : supposons que cette unique $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est développable en série entière sur $]-r;r[$ avec $r > 0$, alors $\forall x \in]-r;r[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On peut dériver terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence et $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ donc $xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.
En reportant dans (E), on a $\forall x \in]-r;r[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n)x^n = 0$ donc, par unicité, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n = 0$ d'où $a_{n+2} = \frac{1}{2(n+2)}a_n$. Comme on impose $a_0 = y(0) = \sqrt{\pi}$ et $a_1 = y'(0) = 0$, la relation précédente montre, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.
On a donc $y(x) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2/4)^n}{n!} = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}$.
Synthèse : $y : x \mapsto \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}$ est bien C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $y'(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,x}{2} e^{\frac{x^2}{4}}$ et $y''(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{x^2}{4}} + \frac{\sqrt{\pi}\,x^2}{4} e^{\frac{x^2}{4}}$ donc $-2y''(x) + xy'(x) + y(x) = e^{\frac{x^2}{4}}\left(-\sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}\,x^2}{2} + \frac{\sqrt{\pi}\,x^2}{2} + \sqrt{\pi}\right) = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.
Ainsi, l'unique solution du problème de CAUCHY de la question **a.** est la fonction $y : x \mapsto \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}$.

c. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = e^{tx-t^2}$ de sorte que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)dt$.

(H_1) Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $e^{tx-t^2} \underset{\pm\infty}{=} o(e^{-t^2/2}) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. La fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = te^{tx-t^2}$ est aussi continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car on a encore $te^{tx-t^2} \underset{\pm\infty}{=} o(e^{-t^2/2}) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$. Enfin, $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = t^2 e^{tx-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(H_3) Pour $a > 0$, $x \in [-a;a]$ et $t \in \mathbb{R}$, $\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\Big| \leqslant t^2 e^{a|t|-t^2} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par croissances comparées comme avant.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{tx-t^2}dt$ et $f''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{tx-t^2}dt$. On a bien $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss classique) et aussi $f'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt = 0$ par imparité ou car $f'(0) = \Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. De plus, par croissances comparées, $-2f''(x) + xf'(x) + f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(-2t^2e^{tx-t^2} + xte^{tx-t^2} + e^{tx-t^2}\Big)dt = \big[te^{tx-t^2}\big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ donc f vérifie (E).
D'après les questions précédentes, on peut conclure que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}$.
Une dernière méthode consistait à écrire $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n t^n e^{-t^2}}{n!}\Big)dt$ et à intervertir terme à terme en calculant par récurrence, grâce à une intégration par parties, les intégrales $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt$.
Ce n'est pas demandé mais on pouvait trouver toutes les solutions de (E) par la méthode de Lagrange en posant, pour une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, la fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(x)e^{\frac{-x^2}{4}}$.
La fonction z est aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $y(x) = z(x)e^{\frac{x^2}{4}}$ donc, en calculant $y'(x) = \Big(\frac{xz(x)}{2} + z'(x)\Big)e^{\frac{x^2}{4}}$ et $y''(x) = \Big(\frac{z(x)}{2} + xz'(x) + z''(x) + \frac{x^2 z(x)}{4}\Big)e^{\frac{x^2}{4}}$ et en reportant dans (E), on a l'équivalence (les $z(x)$ s'éliminent) :
$(y$ solution de (E) sur $\mathbb{R}) \iff (\forall x \in \mathbb{R},\ -2\Big(\frac{z(x)}{2} + xz'(x) + z''(x) + \frac{x^2 z(x)}{4}\Big) + \frac{x^2 z(x)}{2} + xz'(x) + z(x) = 0)$.
Ainsi, $(y$ solution de (E) sur $\mathbb{R}) \iff (z$ est solution de (F) sur $\mathbb{R})$ où $(F)\ :\ 2z'' + xz' = 0)$. On résout facilement (F), et $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda + \mu\int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}dt$.

Par conséquent, les solutions de (E) sont de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{4}} + \mu e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}dt$, elles forment un plan (on le savait) engendré par les deux fonctions développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ (ce qui fait que toutes les solutions de (E) le sont) $y_1 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ (paire) et $y_2 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}dt$ (impaire).

13.55 À faire.

13.56 **a.** Analyse : soit $r > 0$ et une fonction $f :]-r;r[\to \mathbb{R}$ solution de (E) telle que $\forall x \in]-r;r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Ainsi, il vient $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ alors que l'on a $x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$ et $xf''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$ donc, en remplaçant dans $(E)\ :\ x^2f''(x) - xf''(x) + 4f'(x) + xf'(x) - f(x) = 0$, on obtient $\forall x \in]-r;r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n(n-1)a_n - (n+1)na_{n+1} + 4(n+1)a_{n+1} + na_n - a_n)x^n = 0$. Par unicité du développement en série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n-1)a_n - (n+1)na_{n+1} + 4(n+1)a_{n+1} + na_n - a_n = 0$ donc, en simplifiant, $(n+1)((n-4)a_{n+1} - (n-1)a_n) = 0$. Pour $n = 0$, on a $a_0 = 4a_1$. Pour $n = 1$, il vient $3a_2 = 0$. Pour $n = 2$, $2a_3 + a_2 = 0$ donc $a_3 = 0$. Pour $n = 3$, $a_4 + 2a_3 = 0$ donc $a_4 = 0$. Ainsi, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Comme $n + 1 \neq 0$, il vient $\forall n \geqslant 5,\ (n-4)a_{n+1} = (n-1)a_n$ donc $(n-2)(n-3)(n-4)a_{n+1} = (n-1)(n-2)(n-3)a_n$

ce qui montre que la suite $\left(\dfrac{a_n}{(n-2)(n-3)(n-4)}\right)_{n\geqslant 5}$ est constante. On en déduit donc, pour tout entier $n \geqslant 5$, on a $a_n = \dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}a_5 = \dbinom{n-2}{3}a_5$. Comme a_n est polynomiale en n, le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vaut $R = +\infty$ si $a_5 = 0$ (c'est même un polynôme) et $R = 1$ si $a_5 \neq 0$. Par conséquent, $\forall x \in]-1;1[$ (au moins), on a $f(x) = a_1(x+4) + a_5 \sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dbinom{n-2}{3} x^n = a_1(x+4) + a_5 x^5 \sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dbinom{n-2}{3} x^{n-5}$. Or pour $x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dbinom{n-2}{3} x^{n-5} = \dfrac{1}{6}\sum\limits_{p=3}^{+\infty} p(p-1)(p-2)x^{p-3}$ en posant $p = n-2$. On reconnaît la dérivée troisième $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)''' = \left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} x^p\right)''' = \sum\limits_{p=3}^{+\infty} p(p-1)(p-2)x^{p-3} = \dfrac{6}{(1-x)^4}$ donc $f(x) = a_1(x+4) + a_5\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, si f est définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = a_1(x+4)+a_5\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$, alors f est développable en série entière sur $]-1;1[$ et, en remontant les calculs, f est solution de (E).

Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sur $]-1;1[$ forment le plan $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ avec les fonctions f_1 et f_2 définies sur $]-1;1[$ par $f_1(x) = x+4$ et $f_2(x) = \dfrac{x^5}{(1-x)^4}$.

• Ces fonctions f_1 et f_2 respectivement polynomiale et rationnelle sont de classe C^∞ sur tout intervalle I qui ne contient pas 1. La fonction f_1 est clairement solution de (E) sur $\mathbb{R}$ car $f_1'' = 0$ et elle vérifie donc l'équation $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2-x)f_1''(x) + (x+4)f_1'(x) - f_1(x) = x+4-(x+4) = 0$. Si I ne contient pas 1, on a $f_2'(x) = \dfrac{(5-x)x^4}{(1-x)^5}$ et $f_2''(x) = \dfrac{20x^3}{(1-x)^6}$ donc f_2 est solution de (E) car elle vérifie l'équation $\forall x \in I$, $(x^2-x)f_2''(x) + (x+4)f_2'(x) - f_2(x) = \dfrac{-20x^4 + (x+4)(5-x)x^4 - x^5(1-x)}{(1-x)^5} = 0$.

Ainsi, si $I_1 =]-\infty;0[$, $I_2 =]0;1[$ et $I_3 =]1;+\infty[$, d'après le cours, comme (E) est normalisée sur I_k ($k \in [\![1;3]\!]$), l'ensemble des solutions de (E) sur I_k est un plan engendré par les fonctions f_1 et f_2 (restreintes à I_k).

b. Pour répondre à cette question, cherchons à raccorder les solutions en 0.

<u>Analyse</u> : soit $y :]-\infty;1[\to \mathbb{R}$ une solution de (E). D'après ce qui précède, il existe quatre constantes réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ telles que $\forall x \in]-\infty;0[$, $y(x) = \lambda_1(x+4)+\lambda_2\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ et $\forall x \in]0;1[$, $y(x) = \lambda_3(x+4)+\lambda_4\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$. Par continuité de y en 0, on a forcément $4\lambda_1 = y(0) = 4\lambda_3$ donc $\lambda_1 = \lambda_3$. Grâce au x^5 en facteur, aucune condition n'est imposée à λ_1, λ_3 et λ_4 en ce qui concerne l'aspect dérivable et deux fois dérivable de y en 0.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et la fonction $y_{a,b,c} :]-\infty;1[\to \mathbb{R}$ définie par la relation $y(x) = a(x+4) + b\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ pour $x \in]-\infty;0[$, $y(x) = a(x+4) + c\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ pour $x \in]0;1[$ et $y(0) = 4a$. Alors, y est C^∞ sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ par opérations et, comme $\lim\limits_{x\to 0^-} y'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y'(x) = a$ (calcul), on en déduit que y est de classe C^1 sur $]-\infty;1[$ avec $y'(0) = a$ par le théorème de prolongement C^1. De même, $\lim\limits_{x\to 0^-} y''(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y''(x) = 0$ donc y est de classe C^2 sur $]-\infty;1[$ avec $y''(0) = 0$.

Par conséquent, les fonctions y solutions de (E) sur $]-\infty;1[$ forment l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(g_1, g_2, g_3)$ avec $g_1(x) = x+4$, $g_2(x) = \dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ si $x \in]-\infty;0[$ et $g_2(x) = 0$ si $x \in]0;1[$ et $g_3(x) = 0$ si $x \in]-\infty;0[$ et $g_3(x) = \dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ si $x \in]0;1[$ (car la fonction y ci-dessus s'écrit $y = ag_1 + bg_2 + cg_3$).

Pour répondre à la question posée, il existe des solutions de (E) non développables en série entière sur $]-1;1[$, ce sont les fonctions $y = ag_1 + bg_2 + cg_3$ avec $b \neq c$ car les ba_n diffèrent des ca_n dès que $n \geqslant 5$ dans ce cas

(y est alors développable en série entière sur $]-1;0]$ et sur $[0;1[$ mais avec des coefficients différentes de part et d'autre de 0).
Pour être complet, l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ est la droite engendré par la fonction g_1 car aucune fonction avec du $\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ ne peut "passer" 1.

13.57 **a.** Soit $r>0$ et une fonction $f :]-r;r[\to\mathbb{R}$ solution de (E) telle que $\forall x\in]-r;r[,\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Ainsi, il vient $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $xf'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}na_nx^n$ alors que l'on a $x^2f''(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n$ et $xf''(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$ donc, en remplaçant dans $(E)\ :\ xf''(x)-x^2f''(x)+f'(x)-3xf'(x)-f(x)=0$, on obtient $\forall x\in]-r;r[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}((n+1)na_{n+1}-n(n-1)a_n+(n+1)a_{n+1}-3na_n-a_n)x^n=0$. Par unicité du développement en série entière, $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)na_{n+1}-n(n-1)a_n+(n+1)a_{n+1}-3na_n-a_n=0$ donc, en simplifiant, $(n+1)^2(a_{n+1}-a_n)=0$. Comme $n+1\neq 0$, il vient $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=a_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=a_0$. Alors $f(x)=a_0\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{a_0}{1-x}$. Réciproquement, en remontant les calculs ou en injectant dans (E), on vérifie que f ainsi définie est bien solution de (E) sur $]-1;1[$.
Les solutions développables en série entière de (E) sont les fonctions $f : x\mapsto\dfrac{\lambda}{1-x}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
b. L'équation (E) est sous forme normalisée sur les trois intervalles $I_1=]-\infty;0[$, $I_2=]0;1[$ et $I_3=]1;+\infty[$ car $x(1-x)$ ne s'y annule pas. On effectue une variation de la constante (méthode de Lagrange) pour avoir les autres solutions de (E) sur ces trois intervalles. Soit $y : I_k\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z : I_k\to\mathbb{R}$ définie par $y(x)=\dfrac{z(x)}{1-x}$. Ainsi définie, la fonction z est deux fois dérivable sur I_k si et seulement si y l'est et on a $z(x)=(1-x)y(x)$ donc $z'(x)=(1-x)y'(x)-y(x)$ et $z''(x)=(1-x)y''(x)-2y'(x)$ donc $xz''(x)=x(1-x)y''(x)-2xy'(x)$; ainsi y est solution de (E) sur I_k si et seulement si $(F)\ :\ xz''(x)+z'(x)=0$. Ceci équivaut à $z'(x)=\dfrac{\mu}{x}$ ou encore à $z(x)=\lambda+\mu\ln(|x|)$ donc les solutions de (E) sur I_k sont les fonctions $y : x\mapsto\dfrac{\lambda_k+\mu_k\ln(|x|)}{1-x}$ avec $(\lambda_k,\mu_k)\in\mathbb{R}^2$. On a bien un plan de solutions de (E) sur I_k car (E) est linéaire homogène et ce plan est engendré par les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ et $x\mapsto\dfrac{\ln(|x|)}{1-x}$ (qui n'est pas développable en série entière au voisinage de 0).
c. À faire.

13.58 **a.** Comme $t\mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$ est continue sur $[0;1]$, la fonction $T(f)$ est bien définie. De plus, en notant $g : (x,t)\mapsto\mathrm{Min}(x,t)f(t)$, on a g continue sur le compact $[0;1]^2$ donc elle y est bornée et on note $M=\underset{[0;1]^2}{\mathrm{Max}}(g)$.
Comme $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0;1]$ pout $t\in[0;1]$, que $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0;1]$ pour tout $x\in[0;1]$ et qu'on peut dominer $|g(x,t)|\leqslant M$ avec $t\mapsto M$ intégrable sur $[0;1]$, le théorème de continuité sous le signe somme permet d'affirmer que $T(f)$ est bien continue sur $[0;1]$.
On pouvait se passer de la continuité sous le signe somme en constatant que $T(f)(x)=\int_0^x\mathrm{Min}(x,t)f(t)dt+\int_x^1\mathrm{Min}(x,t)f(t)dt=\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1 f(t)dt$ et en utilisant le théorème fondamental de l'intégration pour conclure que $T(f)$ est de classe C^1 donc a fortiori continue sur $[0;1]$.
La linéarité de T provient naturellement de la linéarité de l'intégrale : T est une endomorphisme de E.
b. À nouveau, $T(f)(x)=\int_0^x\mathrm{Min}(x,t)f(t)dt+\int_x^1\mathrm{Min}(x,t)f(t)dt=\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1 f(t)dt$. D'après le

théorème fondamental de l'intégration : $g'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)dt - xf(x) = \int_x^1 f(t)dt$ d'où $g''(x) = -f(x)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, avec la notation précédente : $T(f) = \lambda f \iff T(f) = \lambda T(f)''$. Posons $g = T(f)$.

• Si $\lambda = 0$, $g = 0$ donc $f = -g'' = 0$. 0 n'est donc pas valeur propre de T.

• Si $\lambda \neq 0$, $T(f) = \lambda f \iff g'' = \frac{1}{\lambda} g$ et on distingue deux cas :

  • Si $\lambda > 0$, $g(x) = A\mathrm{ch}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + B\mathrm{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ et $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$ fournissent $A = B = 0$: NON !

  • Si $\lambda < 0$, $g(x) = A\cos\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) + B\sin\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$ et les conditions $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$ fournissent $A = 0$ et $\frac{1}{-\lambda} = (2n+1)^2\frac{\pi^2}{4}$ avec $B \neq 0$ (sinon ce n'est un vecteur propre).

Le spectre de T est donc l'ensemble $\left\{ -\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ et le sous-espace propre associé à chaque valeur propre $\lambda_n = -\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$ est la droite engendrée par la fonction $c_n : x \mapsto \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)$.

13.59 **a.** Soit $r > 0$ et une fonction $f :]-r;r[\to \mathbb{R}$ solution de (E) telle que $\forall x \in]-r;r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Ainsi, il vient $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ et $xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ alors que l'on a $x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$ et $xf''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^n$ donc, en remplaçant dans (E) : $xf''(x) - x^2f''(x) + f'(x) - 3xf'(x) - f(x) = 0$, on obtient $\forall x \in]-r;r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)na_{n+1} - n(n-1)a_n + (n+1)a_{n+1} - 3na_n - a_n)x^n = 0$. Par unicité du développement en série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)na_{n+1} - n(n-1)a_n + (n+1)a_{n+1} - 3na_n - a_n = 0$ donc, en simplifiant, $(n+1)^2(a_{n+1} - a_n) = 0$. Comme $n+1 \neq 0$, il vient $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a_0$. Alors $f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{a_0}{1-x}$. Réciproquement, en remontant les calculs ou en injectant dans (E), on vérifie que f ainsi définie est bien solution de (E) sur $]-1;1[$.
Les solutions développables en série entière de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto \frac{\lambda}{1-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. Comme l'équation (E) est sous forme normalisée sur $]0;1[$ car $x(1-x)$ ne s'y annule pas, que (E) est linéaire et sans second membre, on sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. On a trouvé une droite de solutions développables en série entière à la question précédente, il y a donc forcément d'autres solutions.

c. Ainsi définie, la fonction z est de classe C^2 sur $]0;1[$ si et seulement si y l'est et on a $z(x) = (1-x)y(x)$ donc $z'(x) = (1-x)y'(x) - y(x)$ et $z''(x) = (1-x)y''(x) - 2y'(x)$ donc $xz''(x) = x(1-x)y''(x) - 2xy'(x)$; ainsi y est solution de (E) sur $]0;1[$ si et seulement si (F) : $xz''(x) + z'(x) = 0$. Ceci équivaut à $z'(x) = \frac{\mu}{x}$ ou encore à $z(x) = \lambda + \mu\ln(x)$ donc les solutions de (E) sur $]0;1[$ sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{\lambda + \mu\ln(x)}{1-x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On a bien un plan de solutions de (E) sur $]0;1[$ engendré par les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1-x}$ (qui n'est pas développable en série entière sur $]0;1[$).

13.60 **a.** Comme $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$ et $\det(A) = 1$, on a $\chi_A = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Si A était diagonalisable, A serait semblable à I_2 donc égale à I_2 ce qui n'est pas. Ainsi, A n'est pas diagonalisable. On peut aussi dire que $\mathrm{rang}\,(A - I_2) = 1$ car $A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 1 avec la formule du rang et cette dimension n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de 1 dans χ_A.

b. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, le sous-espace $\text{Ker}(A)$ est la droite engendrée par le vecteur $v_1 = (2, -1)$ (on le voit ou on résout $AX = X$). On prend par exemple $v_2 = (1, 0)$ et $Av_2 = (-1, 1) = v_2 - v_1$. La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est clairement une base de $\mathbb{R}^2$ et, comme $Av_1 = v_1$ et $Av_2 = -v_1 + v_2$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T$ est bien triangulaire supérieure.

c. Le système (S) s'écrit $X' = AX$. Comme, par formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$ en notant $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$, en notant $Y = P^{-1}X$, on a l'équivalence $(S)\ :\ X' = AX \Longleftrightarrow X' = PTP^{-1}X \Longleftrightarrow P^{-1}X' = (P^{-1}X)' = T(P^{-1}X) \Longleftrightarrow Y' = TY$. Or, en notant $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, a et b sont dérivables et $Y' = TY \Longleftrightarrow \begin{cases} a' = & a - b \\ b' = & b \end{cases}$. Or $b' = b \Longleftrightarrow (\exists \beta \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, b(t) = \beta e^t)$ et $a' = a - \beta e^t \Longleftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ a(t) = \alpha e^t - \beta t e^t)$ (par variation de la constante). Par l'équivalence qui précède, comme $X = PY$, on en déduit que les solutions du système (S) sont, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $t \mapsto (x(t), y(t)) = (2a(t) + b(t), -a(t)) = (2(\alpha e^t - \beta t e^t) + \beta e^t, -(\alpha e^t - \beta t e^t))$.

13.61 **a.** L'équation (E) peut être mise sous forme normalisée sur les quatre intervalles $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1; 0[$, $I_3 =]0; 1[$ et $I_4 =]1; +\infty[$. On résout l'équation homogène en décomposant la fraction rationnelle $\dfrac{2}{t(1-t^2)}$ en éléments simples. Comme ses pôles sont $-1, 0, 1$, que son degré vaut $-3 < 0$ et qu'elle est irréductible, on sait qu'il existe trois constantes a, b, c réelles telles que $\forall t \notin \{-1, 0, 1\}$, $\dfrac{2}{t(1-t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$. Par identification, technique classique (de MPSI) ou par l'astuce habituelle $2 = 2t^2 + 2(1-t^2)$ ce qui donne $\dfrac{2}{t(1-t^2)} = \dfrac{2t^2 + 2(1-t^2)}{t(1-t^2)} = \dfrac{2t}{1-t^2} + \dfrac{2}{t} = \dfrac{t+1-(1-t)}{(1-t)(1+t)} + \dfrac{2}{t}$, on obtient $\dfrac{2}{t(1-t^2)} = \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{1}{1+t}$. On retient que $\dfrac{2}{t(1-t^2)} = \dfrac{2t}{1-t^2} + \dfrac{2}{t}$ et, comme une primitive de la fonction $a : t \mapsto \dfrac{2t}{1-t^2} + \dfrac{2}{t}$ est $A : t \mapsto 2\ln(|t|) - \ln(|1-t^2|)$, les solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ t(t^2-1)y' + 2y = 0$ sur chacun des intervalles I_k sont les fonctions $y : t \mapsto \dfrac{\lambda t^2}{t^2-1}$ (les valeurs absolues sont absorbées par la constante λ qui parcourt $\mathbb{R}$). On fait ensuite varier la constante en cherchant une solution particulière de (E) sous la forme $y : t \mapsto \dfrac{\lambda t^2}{t^2-1}$ avec λ dérivable sur I_k. En substituant, on trouve $\lambda'(t) = \dfrac{1}{t}$ et on prend par exemple $\lambda = \ln(|t|)$ pour avoir comme solution particulière $y_0 : t \mapsto \dfrac{t^2\ln(|t|)}{t^2-1}$ donc les solutions de (E) sur chacun des quatre intervalles sont les $y_\lambda : t \mapsto \dfrac{t^2(\lambda + \ln(|t|))}{t^2-1}$.

b. • Si y est une solution de (E) sur $]-1; 1[$, alors il existe λ_2 et λ_3 telles que $\forall t \in]-1; 0[$, $y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_2 + \ln(|t|))}{t^2-1}$ et $\forall t \in]0; 1[$, $y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_3 + \ln(|t|))}{t^2-1}$. On a forcément $y(0) = 0$ (en remplaçant t par 0 dans (E) par exemple ou par prolongement). Réciproquement, si $y :]-1; 1[\to \mathbb{R}$ est définie par $\forall t \in]-1; 0[$, $y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_2 + \ln(|t|))}{t^2-1}$ et $\forall t \in]0; 1[$, $y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_3 + \ln(|t|))}{t^2-1}$ et $y(0) = 0$, on constate que y est dérivable en 0 avec $y'(0) = 0$ en faisant une limite de taux d'accroissements (par croissances comparées) quelles que soient les constantes λ_2 et λ_3. Par conséquent, les solutions de (E) sur $]-1; 1[$ sont de la forme précédente : l'espace affine $S_{2,3}$ des solutions de (E) sur $]-1; 1[$ est de dimension 2 car les y solutions s'écrivent $y = y_0 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$ où $y_2 :]-1; 1[\to \mathbb{R}$ vérifie

$\forall t \in]-1;0[,\ y_2(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1}$ et $\forall t \in [0;1[,\ y_2(t) = 0$ et $y_3 :]-1;1[\to \mathbb{R}$ est définie par $\forall t \in]-1;0],\ y_3(t) = 0$ et $\forall t \in]0;1[,\ y_3(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1}$; $S_{2,3} = y_0 + \mathrm{Vect}(y_2, y_3)$.

• Si y est une solution de (E) sur $]0;+\infty[$, alors il existe λ_3 et λ_4 telles que $\forall t \in]0;1[,\ y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_3 + \ln(|t|))}{t^2-1}$ et $\forall t \in]1;+\infty[,\ y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_4 + \ln(|t|))}{t^2-1}$. Or on doit avoir $y(1) = \dfrac{1}{2}$ en remplaçant t par 1 dans (E) et la continuité de y en 1 impose que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ car $\lim\limits_{t\mapsto 1} \dfrac{t^2}{t^2-1} = \pm\infty$. Réciproquement, la fonction $y_0 :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \neq 1,\ y(t) = \dfrac{t^2 \ln|t|}{t^2-1}$ et $y(1) = \dfrac{1}{2}$ est solution de (E) sur $]0;+\infty[$ car elle est dérivable en 1 (effectuer un développement limité) avec $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi l'espace affine $S_{3,4}$ des solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ est de dimension 0 ; $S_{3,4} = \{y_0\} = y_0 + \{0\}$.

On fait de même sur $]-\infty;0[$ et sur $\mathbb{R}$ pour voir que seule la fonction définie par $y(t) = \dfrac{t^2\ln|t|}{t^2-1}$ est solution de (E) sur ces intervalles.

13.62 **a.** Analyse : soit $r > 0$ et $y :]0;r[\to \mathbb{R}$ (avec $r > 0$) solution de (E) et développable en série entière qu'on écrit $\forall x \in]0;r[,\ y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-2}$ avec $r > 0$. On sait d'après le cours que y est de classe C^∞ sur $]0;r[$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Pour $x \in]0;r[$, y est solution de (E) donc $x^2y''(x) - 6xy'(x) + (12+x^2)y(x) = x^2y''(x) - 6xy'(x) + 12y(x) + x^2y(x)$ qu'on écrit $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 6\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n$. Ainsi, en isolant les deux premiers termes, $x^2y''(x) - 6xy'(x) + (12+x^2)y(x) = 12a_0 + 12a_1x - 6a_1x + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \big[n(n-1)a_n - 6na_n + 12a_n + a_{n-2}\big]x^n = 0$.

Par unicité du développement en série entière, $a_0 = a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2,\ n(n-1)a_n - 6na_n + 12a_n + a_{n-2} = 0$ donc $(n-3)(n-4)a_n = -a_{n-2}$. Pour $n = 2$, on a $a_2 = 0$. Pour $n \geqslant 5$, $a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n-3)(n-4)}$ donc les termes a_{2n} pour $n \geqslant 2$ dépendent de a_4 et les termes a_{2n+1} pour $n \geqslant 1$ dépendent de a_3.

On montre par une récurrence simple que $\forall n \geqslant 2,\ a_{2n} = \dfrac{(-1)^n a_4}{(2n-3)!}$ et que $\forall n \geqslant 1,\ a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1} a_3}{(2n-2)!}$.

Ainsi, $y(x) = a_4 \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-3)!} + a_3 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n-2)!} = a_4 x^3 \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n-3}}{(2n-3)!} + a_3 x^3 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ et on reconnaît des développements usuels d'où $y(x) = a_4 x^3 \sin(x) + a_3 x^3 \cos(x)$.

Synthèse : si $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie par $y(x) = \lambda x^3 \sin(x) + \mu x^3 \cos(x)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, posons la fonction $z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x^3} = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$ qui est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vérifie classiquement $z'' + z = 0$. Calculons $z'(x) = \dfrac{y'(x)}{x^3} - 3\dfrac{y(x)}{x^4}$ et $z''(x) = \dfrac{y''(x)}{x^3} - 6\dfrac{y'(x)}{x^4} + 12\dfrac{y(x)}{x^5}$ donc $\dfrac{y''(x)}{x^3} - 6\dfrac{y'(x)}{x^4} + 12\dfrac{y(x)}{x^5} + \dfrac{y(x)}{x^3} = 0$ ce qui, en multipliant par x^5, devient $x^2y''(x) - 6xy'(x) + (12+x^2)y(x) = 0$ et y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion : Les solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $y :\mapsto \lambda x^3 \sin(x) + \mu x^3 \cos(x)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Comme les fonctions $x \mapsto x^3 \sin(x)$ et $x \mapsto x^3 \cos(x)$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ forment une famille libre, et qu'on sait que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de cette équation différentielle (E) linéaire normalisée homogène est une plan vectoriel d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a trouvé toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, elles sont donc toutes développables en série entière.

b. De même, les solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les $y :\mapsto \lambda' x^3 \sin(x) + \mu' x^3 \cos(x)$ avec $(\lambda', \mu') \in \mathbb{R}^2$.

Analyse : si y est solution réelle de (E) sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et à $\mathbb{R}_-^*$ sont solutions de (E) donc, avec ce qui précède, il existe $(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \lambda x^3 \sin(x) + \mu x^3 \cos(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \lambda' x^3 \sin(x) + \mu' x^3 \cos(x)$. On a aussi $y(0) = 0$ en prenant $x = 0$ dans (E).

Synthèse : soit $(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{R}^4$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \lambda x^3 \sin(x) + \mu x^3 \cos(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \lambda' x^3 \sin(x) + \mu' x^3 \cos(x)$, alors y est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = y''(0) = 0$ (avec les taux d'accroissements ou parce que y est développable en série entière sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ et que ceci donne les dérivées successives à droite et à gauche en 0) donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'espace des solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 4, il s'agit de $\mathrm{Vect}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ avec $y_1(x) = 0$ si $x \geqslant 0$ et $y_1(x) = x^3 \sin(x)$ si $x < 0$, $y_2(x) = 0$ si $x \geqslant 0$ et $y_2(x) = x^3 \cos(x)$ si $x < 0$, $y_3(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $y_4(x) = x^3 \sin(x)$ si $x > 0$, $y_4(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $y_4(x) = x^3 \cos(x)$ si $x > 0$.

13.63 **a.** Avec $\sin(x-t) = \sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)$ et la linéarité de l'intégrale, comme toutes les fonctions sont continues sur le segment $[0; x]$: $\forall x \geqslant 0,\ g(x) = f(x) + \sin(x) \int_0^x \cos(t)u(t)f(t)dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)u(t)f(t)dt$.

Par le théorème fondamental de l'intégration, la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_0^x \cos(t)u(t)f(t)dt$ est la fonction $x \mapsto \cos(x)u(x)f(x)$, et , avec l'abus de notation classique, $\left(\int_0^x \sin(t)u(t)f(t)dt\right)' = \sin(x)u(x)f(x)$, donc $g'(x) = f'(x) + \cos(x) \int_0^x \cos(t)u(t)f(t)dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)u(t)f(t)dt$. On recommence pour obtenir $g''(x) = f''(x) - \sin(x) \int_0^x \cos(t)u(t)f(t)dt + \cos(x) \int_0^x \sin(t)u(t)f(t)dt + \cos^2(x)u(x)f(x) + \sin^2(x)(x)f(x)$ donc $g''(x) = f''(x) + f(x) - g(x) + u(x)f(x) = -g(x)$ donc $(F)\ :\ g'' + g = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de cette équation différentielle (F) sont les fonctions $g : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ pour lesquelles $|g| \leqslant |A| + |B| = c$ donc ces solutions g sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)dt$, en passant aux valeurs absolues avec l'inégalité de la moyenne, on a $\forall x \geqslant 0,\ |f(x)| \leqslant |g(x)| + \int_0^x |\sin(x-t)||u(t)||f(t)|dt \leqslant c + \int_0^x |u(t)f(t)|dt$ car $|\sin| \leqslant 1$.

c. Posons $h : x \mapsto \int_0^x |u(t)f(t)|dt$, alors h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = |u(x)||f(x)| \leqslant c|u(x)| + |u(x)|h(x)$ d'après la question **b.**. En notant $U(x) = \int_0^x |u(t)|dt$, on a $\left(e^{-U(x)}h(x)\right)' \leqslant c|u(x)|e^{-U(x)} = c\left(-e^{-U(x)}\right)'$. On intègre cette inégalité entre 0 et x pour avoir $\forall x \geqslant 0,\ e^{-U(x)}h(x) \leqslant c\left(1 - e^{-U(x)}\right) \leqslant c$ par croissance de l'intégrale. Alors $\forall x \geqslant 0,\ h(x) \leqslant ce^{U(x)}$ et comme u est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, U est croissante et possède une limite finie en $+\infty$ donc U est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, h est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et enfin, comme on a $|f| \leqslant c + h$, la fonction f est aussi bornée sur $\mathbb{R}_+$.

13.64 **a.** Comme f et g sont continues, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $y' + fy = g$ avec $y(a) = b$. Si on note F une primitive de f, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y' + fy = 0$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-F}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto (\lambda + \int_0^x g(t)e^{F(t)}dt)e^{-F(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Parmi celles-ci, l'unique solution qui vérifie $y(a) = b$ est telle que $(\lambda + \int_0^a g(t)e^{F(t)}dt)e^{-F(a)} = b$ d'où $\lambda = be^{F(a)} - \int_0^a g(t)e^{F(t)}dt$. C'est donc la fonction $y_0 : x \mapsto (be^{F(a)} - \int_0^a g(t)e^{F(t)}dt + \int_0^x g(t)e^{F(t)}dt)e^{-F(x)}$ ce qui se simplifie par CHASLES en $y_0(x) = e^{-F(x)} \int_a^x g(t)e^{F(t)}dt + be^{F(a)-F(x)}$.

b. En prenant $f : x \mapsto -\alpha$ et $g = h$, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ donc, d'après **a.**, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $y : x \mapsto (\lambda + \int_0^x h(t)e^{-\alpha t}dt)e^{\alpha x}$. D'abord, comme $\forall t \geqslant 0,\ |h(t)e^{-\alpha t}| \leqslant ||h||_{\infty,\mathbb{R}}e^{-\alpha t} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le cours donc, par comparaison, $\int_0^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t}dt$ converge. Pour avoir y bornée sur $\mathbb{R}_+$, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha x} = +\infty$ car $\alpha > 0$, on doit forcément avoir une indétermination et avoir $\lambda + \int_0^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t}dt = 0$. La seule fonction candidate est $y_1 : x \mapsto -e^{\alpha x} \int_x^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t}dt$. Pour $x \geqslant 0$, par l'inégalité de la moyenne, $|y_1(x)| \leqslant ||h||_{\infty,\mathbb{R}}\, e^{\alpha x} \int_x^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = ||h||_{\infty,\mathbb{R}}e^{\alpha x}[-e^{-\alpha t}]_x^{+\infty} = ||h||_{\infty,\mathbb{R}}$.

Par conséquent, (E) possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ qui est $y_1 : x \mapsto -e^{\alpha x} \int_x^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t}dt$.

13.65 **a.** Comme f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, d'après le cours, f y est de classe C^∞ ainsi que toutes ses dérivées avec $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}$ et $f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = x^2f''(x) - x^3f''(x) - x^2f'(x) - xf'(x) + f(x)$ qu'on écrit $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$. Or $n(n-1)$ est nul pour $n = 0$ ou $n = 1$ et n est nul pour $n = 0$ donc on peut faire commencer toutes ces sommes à $n = 0$. Dans la seconde et la troisième, on effectue le changement d'indice $p = n+1$ ce qui permet d'écrire $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big[n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-1)a_{n-1} - na_n + a_n\big]x^n$.

Par conséquent, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) - f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$ avec $b_n = (n-1)^2$ puisque $n(n-1) - n + 1 = (n-1)^2$ et $(n-1)(n-2) + (n-1) = (n-1)^2$.

c. Soit f une solution développable en série entière de (E) sur $]-1;1[$, d'après la question précédente, $a_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n = a_{n-1}$ donc $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_1x^n = \dfrac{a_1x}{1-x}$ (série géométrique). Réciproquement, si on pose $y_1 : x \mapsto \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}$, on a $y_1'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $y_1''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ donc pour tout réel $x \in]-1;1[$, on obtient $x^2(1-x)y_1''(x) - x(1+x)y_1'(x) + y_1(x) = x^2(1-x) \times \dfrac{2}{(1-x)^3} - x(1+x) \times \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{x}{1-x} = 0$ d'où $x^2(1-x)y_1''(x) - x(1+x)y_1'(x) + y_1(x) = \dfrac{2x^2 - x(1+x) + x(1-x)}{(1-x)^2} = 0$: y_1 est solution de (E) sur $]-1;1[$.

d. On vient de voir qu'en fait $y_1 : x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ est solution de (E) sur chaque intervalle où (E) est sous forme normalisée, à savoir $I_1 =]-\infty;0[$, $I_2 =]0;1[$ et $I_3 =]1;+\infty[$. Effectuons une variation de la constante, cherchons les solutions de (E) sous la forme $y : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)x}{1-x} = \lambda(x)y_1(x)$ avec λ deux fois dérivable sur l'un des intervalles I_k. En remplaçant dans (E), $x^2(1-x)\lambda''(x)y_1(x) + 2x^2(1-x)\lambda'(x)y_1'(x) - x(1+x)\lambda'(x)y_1(x) = 0$ car y_1 est solution de (E) donc les $\lambda(x)$ s'éliminent. Comme $y_1(x) = \dfrac{x}{1-x}$ et $y_1'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, après simplifications, la fonction λ vérifie $(F)\ :\ x\lambda''(x) + \lambda'(x) = 0$. Les solutions sont les fonctions λ telles que $\lambda'(x) = \dfrac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ donc $\lambda(x) = a\ln(|x|) + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (E) sur l'un des trois intervalles I_k sont les fonctions $y_k : x \to \dfrac{x\big(a_k \ln(|x|) + b_k\big)}{1-x}$ avec $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$.

À détailler mais en terme de raccord, l'équation (E)

- admet comme solutions les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{bx}{1-x}$ avec $b \in \mathbb{R}$ sur $]-\infty; 1[$.
- admet comme solutions les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{a\ln(x)}{1-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.
- admet sur $\mathbb{R}$ seulement la fonction nulle.

La dimension de l'espace des solutions de (E) sur I est donc :

- 2 si $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; 1[$ ou $I =]1; +\infty[$.
- 1 si $I =]-\infty; 1[$ ou $I =]0; +\infty[$.
- 0 si $I = \mathbb{R}$.

13.66 **a.** Comme les deux fonctions $t \mapsto \cos(t)e^{-\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \sin(t)e^{-\sqrt{t}}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration et par opérations, la fonction y_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a l'expression $y_0'(x) = \cos(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \sin(x)\cos(x)e^{-\sqrt{x}} - \cos(x)\sin(x)e^{-\sqrt{x}}$ donc $y_0'(x) = \sin(x)\displaystyle\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \cos(x)\int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt$. De même, y_0' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a $y_0''(x) = -\sin(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \sin^2(x)e^{-\sqrt{x}} + \cos^2(x)e^{-\sqrt{x}} = -y_0(x) + e^{-\sqrt{x}}$ donc y_0 est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E).

b. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène (E_0) : $y'' + y = 0$, comme les solutions de l'équation caractéristique $z^2 + 1 = 0$ sont $z = \pm i$, sont les fonctions $y : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Par théorème de structure, comme on connaît une solution particulière de (E) d'après **a.** et que, par linéarité de l'intégrale, $y_0(x) = \displaystyle\int_0^x (\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t))e^{-\sqrt{t}}dt = \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}dt$, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}dt$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

c. La fonction $g : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et que $g(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ car $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} u^4 e^{-u} = 0$ par croissances comparées, la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

d. Bien sûr, si $\ell_a = \ell_b = 0$, il est clair que $f : x \mapsto a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Réciproquement, si $f : x \mapsto a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$, comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f(n\pi) = \ell$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n a(n\pi) = \ell$ ce qui prouve que $\ell_a = \ell = 0$. De même, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\Big(n\pi + \frac{\pi}{2}\Big) = \ell$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n b\Big(n\pi + \frac{\pi}{2}\Big) = \ell$ ce qui prouve que $\ell_b = \ell = 0$. Par double implication, on a bien montré que pour deux fonctions $a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ayant des limites finies ℓ_a et ℓ_b respectivement en $+\infty$, la fonction $f : x \mapsto a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$.

e. Les deux fonctions $f_1 : t \mapsto \cos(t)e^{-\sqrt{t}}$ et $f_2 : t \mapsto \sin(t)e^{-\sqrt{t}}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $|f_1(t)| \leqslant e^{-\sqrt{t}}$ et $|f_2(t)| \leqslant e^{-\sqrt{t}}$, on en déduit que f_1 et f_2 sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison avec la question **c.**. On peut écrire $y : x \mapsto \Big(a - \displaystyle\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt\Big)\cos(x) + \Big(b + \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt\Big)\sin(x)$ les solutions de (E) et les fonctions $x \mapsto a - \displaystyle\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ et $x \mapsto b + \displaystyle\int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ admettent respectivement pour limite $\ell_a = a - \displaystyle\int_0^\infty \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ et $\ell_b = b + \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ en $+\infty$. D'après la question **d.**, la fonction y admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$ c'est-à-dire si et seulement si on a $a = \displaystyle\int_0^{\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ et $b = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt$. Ainsi, la seule fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est la fonction y_1 dont l'expression est donnée par $y_1 : x \mapsto \Big(\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \int_0^{x} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt\Big)\cos(x) - \Big(\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \int_0^{x} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt\Big)\sin(x)$ qui se simplifie en $y_1(x) = \cos(x)\displaystyle\int_x^{\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt = \int_x^{\infty} \sin(t-x)e^{-\sqrt{t}}dt$.

13.67 Pour $u : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue, si $||u||_1 = \displaystyle\int_0^1 |u(t)|dt$, on sait que $||\,.\,||_1$ est une norme sur $C^0([0;1], \mathbb{R})$. L'exercice demande de minorer $||f' - f||_1$ sur le sous-espace affine $V = \{f \in C^1([0;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$. Comme ce n'est pas une norme euclidienne et qu'on n'est pas en dimension finie, on ne peut pas utiliser les projections orthogonales et autres outils euclidiens.

Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f'(t) - f(t)$. Alors g est continue sur $[0;1]$ et f est solution de $(E) : y' - y = g$. Les solutions de l'équation homogène $(E_0) : y' - y = 0$ sont les fonctions $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par la méthode de variation de la constante, les solutions de (E) sont les fonctions $y_\lambda : [0;1] \to \mathbb{R}$ telles que $y_\lambda(t) = \Big(\lambda + \displaystyle\int_0^t g(u)e^{-u}du\Big)e^t$. Comme $f(0) = 0$, $\forall t \in [0;1],\ f(t) = y_0(t) = e^t \displaystyle\int_0^t g(u)e^{-u}du$. On aurait aussi pu constater que $\forall u \in [0;1],\ g(u)e^{-u} = (f'(u) - f(u))e^{-u} = (f(u)e^{-u})'$ et intégrer sur $[0;t]$.
Or $f(1) = 1$, d'où la majoration $1 = e\displaystyle\int_0^1 g(t)e^{-t}dt \leqslant e\int_0^1 |g(t)|e^{-t}dt \leqslant e\int_0^1 |g(t)|dt = e\int_0^1 |f'(t) - f(t)|dt$ car $\forall t \in [0;1],\ e^{-t} \leqslant 1$ d'où la minoration $\displaystyle\int_0^1 |f'(t) - f(t)|dt \geqslant \frac{1}{e}$. Si on avait l'égalité $\displaystyle\int_0^1 |f'(t) - f(t)|dt = \frac{1}{e}$ pour une fonction $f \in V$, on aurait donc $\displaystyle\int_0^1 |g(t)|e^{-t}dt = e\int_0^1 |g(t)|dt$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 |g(t)|(1 - e^{-t})dt = 0$ mais, comme $t \mapsto |g(t)|(1 - e^{-t})$ est continue et positive sur $[0;1]$, on aurait $\forall t \in [0;1],\ |g(t)|(1 - e^{-t}) = 0$ donc $\forall t \in]0;1],\ g(t) = 0$. Par continuité de g en 0, on aurait donc $\forall t \in [0;1],\ g(t) = 0$ ce qui est impossible car alors on aurait $f(t) = \lambda e^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ serait compliqué à réaliser.
Ainsi, $\forall f \in V,\ \displaystyle\int_0^1 |f'(t) - f(t)|dt > \frac{1}{e}$ ce qui implique que $d = \operatorname*{Inf}_{f \in V} ||f' - f||_1 \geqslant \dfrac{1}{e}$.
Reste à montrer que cette constante $\dfrac{1}{e}$ est minimale !!!!!

13.68 **a.** Comme $f(a) = 0$, si on avait aussi $f'(a) = 0$, la fonction f et la fonction nulle seraient toutes les deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ avec les mêmes conditions de CAUCHY en a : c'est absurde d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ qui s'applique ici puisque les fonctions p et q sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f'(a) \neq 0$. Puisque f' est continue car f est au moins deux fois dérivable donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que solution de (E), il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a - \eta\,;a + \eta],\ f'(x) \neq 0$. Soit $x \in [a - \eta\,;a + \eta] \setminus \{a\}$, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \widetilde{]a;x[} \subset [a - \eta\,;a + \eta]$ tel que $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c) = (x - a)f(c) \neq 0$ d'après ce qui précède. On a bien établi que $\forall x \in [a - \eta\,;a + \eta] \setminus \{a\},\ f(x) \neq 0$.

b. Comme f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par opérations, W est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $t \in \mathbb{R}$, $W'(t) = f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) - f'(t)g'(t) - f''(t)g(t) = f(t)(-p(t)g'(t) - q(t)g(t)) - (-p(t)f'(t) - q'(t)f(t))g(t)$ donc $W'(t) = -p(t)(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)) = -p(t)W(t)$. Ainsi, W est solution sur $\mathbb{R}$ de $(F) : y' + py = 0$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, notons $P : t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^t p(u)du$ la primitive de p qui s'annule en t_0, on sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (F) sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-P(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En évaluant en t_0, on a bien sûr $\lambda = W(t_0)$ car

$P(t_0) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = W(t_0)e^{-P(t)}$.

c. Supposons qu'il existe un réel t_1 tel que $W(t_1) = \begin{vmatrix} f(t_1) & g(t_1) \\ f'(t_1) & g'(t_1) \end{vmatrix} = 0$. Alors les colonnes de cette matrice sont liées ce qui montre l'existence de $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda \begin{pmatrix} f(t_1) \\ f'(t_1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g'(t_1) \end{pmatrix} = 0$. Posons $h = \lambda f + \mu g$, comme l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel puisque (E) est linéaire et homogène, la fonction h est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(t_1) = h'(t_1) = 0$. L'unicité de la solution à un problème de CAUCHY montre que $h = 0$. Ainsi, comme $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ et $\lambda f + \mu g = 0$, la famille (f, g) est liée contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. Par l'absurde, on en déduit que W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

d. Comme f est continue sur $]a; b[$ et qu'elle ne s'y annule pas, elle y garde un signe constant, supposons par exemple que f est strictement positive sur $]a; b[$. Ainsi, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$ car $f(x) - f(a) = f(x) > 0$ et $x - a > 0$ si $x \in]a; b[$. De même, $f'(b) \leqslant 0$. Si on avait $f'(a) = 0$, comme en **a.**, f serait la fonction nulle ce qui n'est pas le cas. Plus précisément, on a donc $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

Comme W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par continuité, W garde aussi un signe constant. Ainsi, $W(a) = -f'(a)g(a)$ et $W(b) = -f'(b)g(b)$ sont de même signe, ce qui impose à $g(a)$ et $g(b)$ d'être de signes différents. Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque g est continue, il existe $c \in]a; b[$ tel que $g(c) = 0$.

Supposons que g s'annule au moins deux fois sur $]a; b[$, en c et en e et supposons par exemple que $e > c$. Posons $d = \text{Inf}(A)$ avec $A = \{x \in]c; e] \mid g(x) = 0\}$; d existe car A est non vide puisque $e \in A$ et A est minorée par c. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = d$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ g(a_n) = 0$, par continuité de g, on a donc $g(d) = 0$ par passage à la limite et caractérisation séquentielle de la continuité. Ainsi, $d = \text{Inf}(A) = \text{Min}(A)$. D'après la question **a.** appliquée à g, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [c - \eta\,; c + \eta] \setminus \{c\},\ g(x) \neq 0$ donc $A \subset [c + \eta; e]$ ce qui prouve que $d \geqslant c + \eta > c$. Par construction, $g(c) = g(d) = 0$ et g ne peut pas s'annuler sur $]c; d[$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on a prouvé précédemment que f s'annulait alors sur $]c; d[\subset]a; b[$, ce qui contredit l'hypothèse faite initialement sur f.

Par l'absurde, on a donc montré que g s'annulait une fois et une seule sur $]a; b[$.

13.69 **a.** Pour $f \in E$, par CHASLES, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^x \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)dt - e^x \int_0^x e^{-t} f(t)dt$. Comme $g : t \mapsto e^{-t}f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de g qui s'annule en 0. En notant $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)dt$, on a $F(x) = I\,e^x - e^x G(x)$ donc F est de classe C^1 par opérations.

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = I\,e^x - e^x G(x) - e^x G'(x) = F(x) - e^x g(x) = F(x) - e^x e^{-x} f(x) = F(x) - f(x)$ et on a bien la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F'(x) + f(x)$.

b. Soit par exemple $f : t \mapsto |t|$, alors $f \in E$ car $g : t \mapsto |t|e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur tout intervalle $[x; +\infty[$. D'après la question **a.**, on ne peut pas avoir $f = \varphi(h)$ pour $h \in E$ car f n'est pas de classe C^1 et $\varphi(h)$ l'est. Par conséquent, φ n'est pas surjective car $\text{Im}\,(\varphi) \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

c. Analyse : soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Si $\lambda=0$, on a $\varphi(f)=0.f=0$ donc, avec la question **a.**, $f=F'-F=0$ ce qui est impossible pour un vecteur propre. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de φ ce qui montre que φ est injective.

• Si $\lambda\neq 0$, alors $\varphi(f)=\lambda f$ donc, avec la question **a.**, on a $\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda f(x)=\lambda f'(x)+f(x)$ donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_\lambda\ :\ y'=\dfrac{\lambda-1}{\lambda}y$ donc $\exists\alpha\in\mathbb{R}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\alpha\, e^{\frac{(\lambda-1)x}{\lambda}}$ (car $f\neq 0$).

Mais comme $f\in E$, $\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f(t)dt$ converge pour tout x, or $e^{-t}f(t)=\alpha e^{\frac{-t}{\lambda}}$ ce qui impose $\lambda>0$.

Synthèse : soit $\lambda>0$, la fonction $f:x\mapsto e^{\frac{(\lambda-1)x}{\lambda}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $e^{-t}f(t)=e^{\frac{-t}{\lambda}}$ donc $t\mapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $[x;+\infty[$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ car $\lambda>0$ donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f(t)dt$ converge. Ainsi, $f\in E\setminus\{0\}$ et, pour $x\in\mathbb{R}$, on a $\varphi(f)(x)=e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{\frac{-t}{\lambda}}dt=e^x\big[-\lambda e^{\frac{-t}{\lambda}}\big]_x^{+\infty}=e^x\lambda e^{\frac{-x}{\lambda}}=\lambda f(x)$ donc f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ.

Ainsi, $Sp(\varphi)=\mathbb{R}_+^*$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ E_\lambda(\varphi)=\mathrm{Vect}(f_\lambda)$ avec $f_\lambda:t\mapsto e^{\frac{(\lambda-1)t}{\lambda}}$.

d. Pour $x\in\mathbb{R}$, la nature de $\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f'(t)dt$ est la même que celle de $\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f(t)dt$ par intégration par parties car les fonctions $u=f$ et $v:t\mapsto e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[x;+\infty[$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$ car f est bornée sur $\mathbb{R}$. Mais comme $f\in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f(t)dt$ converge donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f'(t)dt$ converge aussi et, comme f' est continue, ceci assure que $f'\in E$. De plus, par l'intégration par parties précédente, en notant $F=\varphi(f)$ comme avant, $\varphi(f')(x)=e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f'(t)dt=e^x\Big(\big[e^{-t}f(t)\big]_x^{+\infty}-\int_x^{+\infty}(-e^{-t})f(t)dt\Big)$ d'où $\varphi(f')(x)=-e^xe^{-x}f(x)+e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}f(t)dt=-f(x)+F(x)=F'(x)$ d'après **a.**. On a donc bien $\big(\varphi(f)\big)'=\varphi(f')$.

e. Par intersection de sous-espaces vectoriels, F est un sous-espace vectoriel de E car l'ensemble des fonctions bornées en est un et celui des fonctions de classe C^1 aussi. Soit $f\in F$, on sait d'après la question **a.** que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $f\in F$, f est bornée sur $\mathbb{R}$ et on peut définir $||f||_{\infty,\mathbb{R}}\in\mathbb{R}_+$. Pour $x\in\mathbb{R}$, par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|\varphi(f)(x)|=|F(x)|\leqslant e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}|f(t)|dt$ donc on a la majoration $|F(x)|\leqslant e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}||f||_{\infty,\mathbb{R}}dt=||f||_{\infty,\mathbb{R}}e^x[-e^{-t}]_x^{+\infty}=||f||_{\infty,\mathbb{R}}e^xe^{-x}=||f||_{\infty,\mathbb{R}}$. Ainsi, $\varphi(f)\in F$ ce qui justifie que F est stable par φ. Comme les vecteurs propres de φ_F sont a fortiori des vecteurs propres de φ, et que la fonction f_λ n'est bornée sur $\mathbb{R}$ que si $\lambda=1$ car f_1 est la fonction constante égale à 1, on en déduit que $Sp(\varphi_F)=\{1\}$. On peut dire aussi que φ_F est 1-lipschitzienne (pour $||\,.\,||_{\infty,\mathbb{R}}$) donc continue. Question de cours : si les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}b_nx^n$ sont respectivement de rayons R et R', alors la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}c_nx^n$ avec $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ est de rayon $R''\geqslant \mathrm{Min}(R,R')$ et on a la relation $\forall x\in]-\mathrm{Min}(R,R');\mathrm{Min}(R,R')[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)x^n=\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\Big)\times\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\Big)$.

13.70 **a.** Le couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ est fixé. Les solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y''-9y=0$ sont les fonctions $y:x\mapsto Ae^{3x}+Be^{-3x}$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ d'après le cours. Il est clair que les fonctions $f_1:x\mapsto-\dfrac{ax+b}{9}$ et $f_2:x\mapsto\dfrac{ax-b}{9}$ sont respectivement solutions particulières de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe d'après ce qui précède quatre scalaires réels A_1,A_2,B_1,B_2 tels que $\forall x>0,\ y(x)=A_1e^{3x}+B_1e^{-3x}-\dfrac{ax+b}{9}$ et $\forall x<0,\ y(x)=A_2e^{3x}+B_2e^{-3x}+\dfrac{ax-b}{9}$.

Par continuité de y en 0, $y(0)=\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=A_1+B_1-\dfrac{b}{9}=\lim\limits_{x\to0^-}y(x)=A_2+B_2-\dfrac{b}{9}$: $A_1+B_1=A_2+B_2$ (1).

Par continuité de y' en 0, on a $y'(0) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = 3A_1 - 3B_1 - \frac{a}{9} = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = 3A_2 - 3B_2 + \frac{a}{9}$ donc $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 + \frac{2a}{27}$ (2). En additionnant et en soustrayant (1) et (2) : $A_2 = A_1 - \frac{a}{27}$ et $B_2 = B_1 + \frac{a}{27}$.

Réciproquement, soit $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = A_1 + B_1 - \frac{b}{9}$, par $\forall x > 0,\ y(x) = A_1e^{3x} + B_1e^{-3x} - \frac{ax+b}{9}$ et $\forall x < 0,\ y(x) = \left(A_1 + \frac{a}{27}\right)e^{3x} + \left(B_1 - \frac{a}{27}\right)e^{-3x} + \frac{ax-b}{9}$. Ce qui précède prouve que y est une solution de classe C^∞ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et R_-^*. De plus, comme il vient $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = y(0) = A_1 + B_1 - \frac{b}{9}$: y est continue en 0. $\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = 3A_1 - 3B_1 - \frac{a}{9}$ donc y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = 3A_1 - 3B_1 - \frac{a}{9}$. Enfin, $\forall x > 0,\ y''(x) = 9A_1e^{3x} + 9B_1e^{-3x}$ et $\forall x < 0,\ y''(x) = 9\left(A_1 - \frac{a}{27}\right)e^{3x} + 9\left(B_1 + \frac{a}{27}\right)e^{-3x}$ donc $\lim_{x\to 0^+} y''(x) = \lim_{x\to 0^-} y''(x) = 9A_1 + 9B_1$ et y est donc deux fois dérivable en 0 (théorème de prolongement C^1 appliqué à y') avec $y''(0) = 9A_1 + 9B_1$. Ainsi $y''(0) + y(0) = 9A_1 + 9B_1 - 9\left(A_1 + B_1 - \frac{b}{9}\right) = b = a|0| + b$. Finalement, y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2$, $y(0) = A_1 + B_1 - \frac{b}{9}$, $\forall x > 0,\ y(x) = A_1e^{3x} + B_1e^{-3x} - \frac{ax+b}{9}$ et $\forall x < 0,\ y(x) = \left(A_1 + \frac{a}{27}\right)e^{3x} + \left(B_1 - \frac{a}{27}\right)e^{-3x} + \frac{ax-b}{9}$.

b. Si une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ a l'expression ci-dessus, pour que y admette une asymptote en $+\infty$, il est clair qu'il est nécessaire et suffisant qu'on ait $A_1 = 0$ et pour que y admette une asymptote en $-\infty$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait $B_1 - \frac{a}{27} = 0$. Ainsi, la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = \frac{a}{27} - \frac{b}{9}$, $\forall x > 0,\ y(x) = \frac{a}{27}e^{-3x} - \frac{ax+b}{9}$ et $\forall x < 0,\ y(x) = \frac{a}{27}e^{3x} + \frac{ax-b}{9}$ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ dont le graphe possède des asymptotes en $\pm\infty$, respectivement les droites d'équations $y = -\frac{ax+b}{9}$ et $y = \frac{ax-b}{9}$.

13.71 **a.** $\forall t \in I,\ w(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)$. Comme φ et ψ sont deux fois dérivables sur I par hypothèse, w est dérivable sur I et on a $\forall t \in I,\ w'(t) = \varphi'(t)\psi'(t) - \varphi''(t)\psi(t) + \varphi(t)\psi''(t) - \varphi'(t)\psi'(t)$ donc $w'(t) = -\big(a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t)\big)\psi(t) + \varphi(t)\big(a(t)\psi'(t) + b(t)\psi(t)\big) = a(t)w(t)$. Ainsi, la fonction w est solution sur I de l'équation $(F)\ :\ y' = ay$.

b. Si φ ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{\psi}{\varphi}$ est bien définie et dérivable sur I et on a $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{\psi'\varphi - \psi\varphi'}{\varphi^2} = \frac{w}{\varphi^2}$.

c. Supposons qu'il existe une fonction y développable en série entière qui soit solution de l'équation (E), alors $\exists R > 0,\ \forall t \in]-R;R[,\ y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n$. Alors, par théorème, $\forall t \in]-R;R[,\ y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$ et $\forall t \in]-R;R[,\ y''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}t^{n-1}$ donc $ty''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}t^n$.

Ainsi, $\forall t \in]-R;R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\big(2(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n\big)t^n = 0$ et par unicité des coefficients (comme $R > 0$), on parvient à la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n$.

Réciproquement, si $a_0 \in \mathbb{R}^*$ et si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie cette propriété, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_nt^n$ est infini par D'ALEMBERT car $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, et les calculs précédents montrent que $\forall t \in \mathbb{R},\ 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$ donc y ainsi définie est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Pour $n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \times \frac{a_{n-2}}{(n-1)(2n-3)} = \cdots = \frac{a_0}{n(2n-1)(n-1)(2n-3)\cdots 1.1}$. En

rajoutant au dénominateur les termes pairs qui manquent $a_n = \dfrac{(2n)(2n-2)\cdots 2.a_0}{n!(2n)!} = \dfrac{2^n}{(2n)!}a_0$.
Ainsi, les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) et développables en série entière sont proportionnelles à la fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = a_0\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n t^n}{(2n)!}$. Il existe donc une unique fonction φ solution de (E), développable en série entière et vérifiant $\varphi(0)=1$, il s'agit de $\varphi : t\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n t^n}{(2n)!}$.
On distingue selon le signe de t :

- si $t\geqslant 0$, on a $\varphi(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n(\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(\sqrt{2t})^{2n}}{(2n)!}=\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t})$.
- si $t\leqslant 0$, on a $\varphi(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n2^n(\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(\sqrt{-2t})^{2n}}{(2n)!}=\cos(\sqrt{-2t})$.

On vient de voir que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) et qui sont développables en série entière constitue la droite $\mathrm{Vect}(\varphi)$.

d. Comme (E) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sous forme normalisée sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, on sait que l'ensemble de ses solutions sur chacun de ces deux intervalles est un plan. On se sert du wronskien pour trouver une autre solution non proportionnelle à φ.

<u>Sur $\mathbb{R}_+^*$</u> : soit $\psi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, comme φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait d'après la question **b.** que $\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)'=\dfrac{w}{\varphi^2}$. Ici, $w'=-\dfrac{w}{2t}$ donc $w:t\mapsto\dfrac{\lambda}{\sqrt{t}}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Ainsi, $\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)'=\dfrac{\lambda}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t})^2}$.
On reconnaît, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, $\dfrac{\psi}{\varphi}=\sqrt{2}\lambda\mathrm{th}\,(\sqrt{2t})+\mu$ avec $\mu\in\mathbb{R}$. Comme on veut ψ non proportionnelle à φ, on peut prendre $\mu=0$ et $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ pour avoir $\psi(t)=\mathrm{th}\,(\sqrt{2t})\varphi(t)=\mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})$. Par théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $t\mapsto a\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t})+b\mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Pour $y:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $z(u)=y\left(\dfrac{u^2}{2}\right)$ d'où $y(t)=z(\sqrt{2t})$. Par composition, z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $z'(u)=uy'\left(\dfrac{u^2}{2}\right)$ et $z''(u)=y'\left(\dfrac{u^2}{2}\right)+u^2y\left(\dfrac{u^2}{2}\right)$.
Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ équivaut à $\forall t>0,\ 2ty''(t)+y'(t)-y(t)=0$ ou, en changeant de variable, à $\forall u>0,\ u^2y''\left(\dfrac{u^2}{2}\right)+y'\left(\dfrac{u^2}{2}\right)-y\left(\dfrac{u^2}{2}\right)=z''(u)-z(u)=0$. Or $z''=z$ si et seulement si z est combinaison linéaire de ch et sh et on retrouve bien les solutions ci-dessus.
<u>Sur $\mathbb{R}_-^*$</u> : $y:\mathbb{R}_-^*\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $z(u)=y\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)$ ce qui revient à $y(t)=z(\sqrt{-2t})$. Par composition, z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $z'(u)=-uy'\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)$ et $z''(u)=-y'\left(\dfrac{u^2}{2}\right)+u^2y\left(\dfrac{u^2}{2}\right)$. Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ équivaut à $\forall t<0,\ 2ty''(t)+y'(t)-y(t)=0$ ou, en changeant de variable, à $\forall u>0,\ -u^2y''\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)+y'\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)-y\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)=-z''(u)-z(u)=0$. Or $z''+z=0$ si et seulement si z est combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$ et les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les $t\mapsto a\cos(\sqrt{-2t})+b\sin(\sqrt{-2t})$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

e. <u>Analyse</u> : soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ solution de (E). D'après la question précédente, il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\forall t>0,\ y(t)=a\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t})+b\mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})$ et $\forall t<0,\ y(t)=c\cos(\sqrt{-2t})+d\sin(\sqrt{-2t})$. La continuité de y en 0 prouve que $a=c$ avec $y(0)=a=c$. La dérivabilité de y en 0 impose $b=d=0$ car, par exemple, si $t>0$, $\dfrac{y(t)-y(0)}{t}=\dfrac{a(\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t})+b\mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})}{t}\underset{0}{\sim}\dfrac{b\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$ qui tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers 0^+. Ainsi, $y=a\varphi$.

Synthèse : si on pose $y = a\varphi$, on a vu en question **c.** que y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : on en déduit que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions proportionnelles à φ.

13.72 **a.** Clairement, $y : x \mapsto x^2$ est une solution polynomiale de (E_0). Si on ne la voit pas, en notant n le degré d'une solution polynomiale $y : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ de (E_0) avec $a_n \neq 0$, en identifiant les termes en x^n dans (E_0), on a $n(n-1)a_n - 2a_n = 0$ donc, comme $a_n \neq 0$, il vient $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) = 0$ donc $n = 2$ car $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, s'il existe une solution polynomiale de (E_0), elle est forcément de degré 2. Ensuite, en notant $y(x) = ax^2 + bx + c$ et en reportant dans (E_0), il reste $\forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 - 2(ax^2+bx+c) = -2bx - c = 0$ donc $b = c = 0$ et on a bien $y(x) = ax^2$.

b. C'est la méthode de Lagrange. Si on se donne une fonction v de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, en posant $z(x) = \dfrac{v(x)}{x^2}$, la fonction z est aussi de classe C^2 et $v(x) = x^2 z(x)$ donc $v'(x) = 2xz(x) + x^2 z'(x)$ puis $v''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2 z''(x)$. Ainsi, v est solution de (E_0) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\forall x \in I,\ 2x^2 z(x) + 4x^3 z'(x) + x^4 z''(x) - 2x^2 z(x) = 0$ ou encore $(F)\ :\ xz''(x) + 4z'(x) = 0$. Classiquement, z' vérifie $(G)\ : xw' + 4w = 0$ sur I si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ z'(x) = \dfrac{\lambda}{x^4}$ et les solutions de (F) sont donc les fonctions $z : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x^3} + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on trouve donc $z(x) = \dfrac{1}{x^3}$ donc $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ et elle est bien indépendante de u.

c. Comme (E_0) est linéaire d'ordre 2, homogène et normalisée , d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'espace vectoriel de ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ est de dimension 2, il est donc engendré par u et v d'après les deux questions précédentes. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc toutes les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x} + \beta x^2$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On constate, comme en **a.**, que $y_p : x \mapsto \dfrac{x^3}{4}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Par structure affine des solutions, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

d. Analyse : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Les restrictions de y à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les solutions vues en **c.** donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x < 0,\ y(x) = \dfrac{\alpha_1}{x} + \beta_1 x^2 + \dfrac{x^3}{4}$ et $\forall x > 0,\ y(x) = \dfrac{\alpha_2}{x} + \beta_2 x^2 + \dfrac{x^3}{4}$. En prenant $x = 0$ dans (E), on a $y(0) = 0$. La continuité de y en 0 implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Alors on a $y'(0) = 0$ (par taux d'accroissements par exemple) et $\forall x < 0,\ y'(x) = 2\beta_1 x + \dfrac{3x^2}{4}$ et $\forall x > 0,\ y'(x) = 2\beta_2 x + \dfrac{3x^2}{4}$. Comme y est deux fois dérivable en 0, on a $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = 2\beta_1 = 2\beta_2 = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = y''(0)$ donc $\beta_1 = \beta_2$.

Synthèse : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$, alors y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$ car $y''(x) = 2\beta + \dfrac{3}{2}x$ donc $x^2 y''(x) - y(x) = 2\beta x^2 + \dfrac{3}{2}x^3 - 2\beta x^2 - \dfrac{x^3}{2} = x^3$.

Conclusion : les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. C'est un sous-espace affine de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, écrit $S = y_p + \mathrm{Vect}(y_0)$ avec $y_p : x \mapsto \dfrac{x^3}{4}$ et $y_0 : x \mapsto x^2$. S est une droite affine.

13.73 **a.** Soit $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^4$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (on aurait aussi pu considérer les fonctions à valeurs complexes) définie par $f(x) = ax^\alpha + bx^\beta$. Alors, $\forall x > 0,\ f(x) - f'(1/x) = ax^\alpha + bx^\beta - (a\alpha x^{1-\alpha} + b\beta x^{1-\beta})$. Si on suppose que la fonction f est une solution réelle de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on impose $\alpha = 1 - \beta$, on obtient $\forall x > 0,\ f(x) - f'(1/x) = (a - b\beta)x^\alpha + (b - a\alpha)x^\beta = 0$. Pour que le système $\begin{cases} +a - b\beta & = 0 \\ -a\alpha + b & = 0 \end{cases}$ n'ait pas comme seule solution $a = b = 0$, on doit avoir $1 - \alpha\beta = 0$ (déterminant nul du système). Cela donne $1 - \alpha(1 - \alpha) = 1 - \alpha + \alpha^2 = 0$ ce qui donne classiquement (à l'ordre près) $\alpha = -j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = -j = \overline{\alpha} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $\forall x > 0,\ f(x) = ae^{\alpha \ln(x)} + be^{\beta \ln(x)}$, ce qui se décompose en :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(f(x)) &= \sqrt{x}\,\Big((\mathrm{Re}\,(a) + \mathrm{Re}\,(b))\cos\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big) + (\mathrm{Im}\,(b) - \mathrm{Im}\,(a))\sin\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)\Big), \\ \mathrm{Im}\,(f(x)) &= \sqrt{x}\,\Big((\mathrm{Re}\,(a) - \mathrm{Re}\,(b))\sin\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big) + (\mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Im}\,(b))\cos\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)\Big). \end{aligned}$$

Mais comme on a pris f à valeurs réelles, ceci implique la condition $\mathrm{Re}\,(a) - \mathrm{Re}\,(b) = \mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Im}\,(b) = 0$ car les fonctions $x \mapsto \sin\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)$ et $x \mapsto \cos\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)$ forment une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, c'est-à-dire $b = \overline{a}$ comme on pouvait s'y attendre. On résout alors le système $\begin{cases} +a - \overline{a}\,\overline{\alpha} & = 0 \\ -a\alpha + \overline{a} & = 0 \end{cases}$ qui a par exemple comme solution non nulle $a = e^{-i\pi/6}$, $b = e^{i\pi/6}$ si on impose en plus $|a| = 1$ qui s'écrit aussi $\overline{a} = \frac{1}{a}$. La fonction $f_0 : x \mapsto e^{-i\pi/6}x^{1/2+i\sqrt{3}/2} + e^{i\pi/6}x^{1/2-i\sqrt{3}/2}$ est donc solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles. Elle s'écrit aussi, $f_0 : x \mapsto 2\sqrt{x}\ \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\Big)$.

b. La fonction nulle est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $(f, g) \in S^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et on a $\forall x > 0,\ (\lambda f + g)'(1/x) = \lambda f'(1/x) + g'(1/x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$ par hypothèse donc $\lambda f + g \in S$. On vient d'établir que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ donc que S est lui-même un espace vectoriel.

c. Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de (E), comme $\forall x > 0,\ f'(x) = f(1/x)$ (1) et que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en dérivant (1), on obtient $\forall x > 0,\ f''(x) = -\frac{f'(1/x)}{x^2} = -\frac{f(x)}{x^2}$. Ainsi, f est aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $(E')\ :\ x^2y'' + y = 0$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une autre solution de (E), alors f et f_0 sont solutions de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par linéarité de (E'), la fonction $g = f - \frac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0$ est aussi solution de (E'). De plus, $g(1) = f(1) - \frac{f(1)f_0(1)}{\sqrt{3}} = 0$ car $f_0(1) = 2\cos\big(\frac{\pi}{6}\big) = \sqrt{3}$. Mais comme f et f_0 sont solutions de (E), on a aussi $g'(1/x) = f'(1/x) - \frac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0'(1/x) = f(x) - \frac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0(x) = g(x)$ donc $g'(1) = g(1) = 0$. Par l'unicité au problème de Cauchy, il existe une unique solution y de (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ telle que $y(1) = y'(1) = 0$, et il s'agit de la fonction nulle. Ainsi, $g = 0$ donc $f = \frac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0$. On vient de montrer que $S \subset \mathrm{Vect}(f_0)$ et on a vu en **a.**, par linéarité de (E), que $\mathrm{Vect}(f_0) \subset S$. Par double inclusion, $S = \mathrm{Vect}(f_0)$.

13.74 **a.** D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et que (E) est normalisée, il existe une unique solution f de ce problème de Cauchy (E) et cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ en entier. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -f(-x)$, alors g est dérivable par opérations car f l'est et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(-x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(-x) = 2(-x)f(-x) + 1 = 2g(x) + 1$ avec

$g(0)=f(-0)=0$ car f est solution de (E). Comme f et g sont solutions de (E), par l'unicité précédente, on a $f=g$ donc f est impaire.

b. <u>Analyse</u> : supposons f développable en série entière sur $\mathbb{R}$, comme f est impaire, il existe $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}$ et, en dérivant terme à terme (l 'intervalle ouvert de convergence est ici $\mathbb{R}$), $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}$. Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}=1+2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^{2n}$. On peut identifier par unicité des coefficients d'un développement en série entière (ici $R=+\infty$) et avoir $a_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\dfrac{2}{2n+1}a_{n-1}$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\Big(\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{2k+1}\Big)a_0=\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{4k}{(2k+1)(2k)}=\dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}$ par télescopage multiplicatif et on a $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

<u>Synthèse</u> : Soit $a_n=\dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}$ pour $n\in\mathbb{N}$. Pour $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_nx^{2n+1}}=\dfrac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+2)}x^2\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_nx^{2n+1}}=0<1$ et le critère de D'ALEMBERT montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant0}a_nx^{2n+1}$ converge absolument. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant0}a_nx^{2n+1}$ vaut $+\infty$. Soit la fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. On a $h'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4^n.n!}{(2n)!}x^{2n}$ et $2xh(x)=2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^{2n}=2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^{n-1}.(n-1)!}{(2n-1)!}x^{2n}$ donc $h=f$ d'après l'unicité de la question **a.** car $h'(x)-2xh(x)=\dfrac{4^0.0!}{(2.0)!}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{4^n.n!}{(2n)!}-\dfrac{2.4^{n-1}.(n-1)!}{(2n-1)!}\Big)x^{2n}=1$ et $h(0)=0$.

Par analyse-synthèse, f est bien développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

c. Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E)\ :\ y'=2xy$ sont les fonctions $y:x\mapsto\lambda e^{x^2}$. En écrivant $y:x\mapsto\lambda(x)e^{x^2}$ avec $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable, y est solution de $(E)\ :\ y'=2xy+1$ si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{x^2}+2x\lambda(x)e^{x^2}=2x\lambda(x)e^{x^2}+1$ ce qui donne, après simplification habituelle des $\lambda(x)$, $\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda'(x)=e^{-x^2}$ donc $\lambda(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt+\alpha$ avec $\alpha=\lambda(0)\in\mathbb{R}$. Ainsi, les solutions de $(E)\ :\ y'=2xy+1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y:x\mapsto\alpha e^{x^2}+e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Comme $f(0)=0$, on a $\alpha=0$ donc $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. On sait que $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}$ et que, puisque $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2}dt$ est la primitive de $t\mapsto e^{-t^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nt^{2n}}{n!}$ qui s'annule en 0, on a $\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x e^{-t^2}dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1).n!}$. Comme les rayons de convergence de ces deux dernières séries entières sont égaux à $+\infty$, par produit de CAUCHY, on a $f(x)=\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}\Big)\times\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Big)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(n-k)!k!(2k+1)}\Big)x^{2n+1}$. Par unicité du développement en série entière, on a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(n-k)!k!(2k+1)}$.

Par exemple, pour $n=2$, on a $\dfrac{16\times2}{120}=\dfrac{4}{15}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{10}$.

13.75 **a.** La fonction $h:u\mapsto\dfrac{1}{u^2+u+1}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $u^2+u+1=\Big(u+\dfrac{1}{2}\Big)^2+\dfrac{3}{4}>0$ et $h(u)\underset{\pm\infty}{\sim}\dfrac{1}{u^2}$. Ainsi, $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{du}{u^2+u+1}$ existe. De plus, classiquement, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2du}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ ce qui montre que $I = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

b. Comme $\forall x \in I$, $\frac{f'(x)}{f(x)^2+f(x)+1} = 1$, en intégrant cette égalité sur un segment $[a;b] \subset I$, on a $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)^2+f(x)+1}dx = \int_a^b dx = b-a$. Or f est dérivable sur I par hypothèse et même de classe C^1 sur I car $f' = f^2+f+1$ est continue sur I. Par le changement de variable $u = f(x)$, comme f est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $[a;b]$ dans $[f(a);f(b)]$ (inutile ici car on est sur un segment), on a $\int_{f(a)}^{f(b)} \frac{du}{u^2+u+1} = b-a$ ce qui montre avec la question précédente que $b-a \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+u+1} < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Ceci montre bien que I est borné et on peut même affirmer que sa longueur est inférieure ou égale à $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

c. Soit $x_0 \in I$ et $x \in I$, on a comme en **a.** et **b.** $\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)}{f(t)^2+f(t)+1}dt = \int_{x_0}^{x} dt = x-x_0$ mais aussi, en posant $u = f(t)$ comme avant, $\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)}{f(t)^2+f(t)+1}dt = \int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{du}{u^2+u+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{f(x_0)}^{f(x)}$ et on obtient $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2f(x)+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2f(x_0)+1}{\sqrt{3}}\right) = x-x_0$. Comme $\mathrm{Arctan}\left(\frac{2f(x)+1}{\sqrt{3}}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on obtient $I \subset \left]-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+x_0-m_0;\frac{\pi}{\sqrt{3}}+x_0-m_0\right[= J$ avec $m_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2f(x_0)+1}{\sqrt{3}}\right)$ et, pour $x \in J$, comme $\mathrm{Arctan}\left(\frac{2f(x)+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-x_0+m_0)$, on a $\frac{2f(x)+1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-x_0+m_0)\right)$ ce qui donne l'expression de la fonction f, $\forall x \in J$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-x_0+m_0)\right)-1\right)$.

Par exemple, si $x_0 = f(x_0) = 0$, l'unique solution maximale de $(E)\ :\ y' = y^2+y+1$ qui s'annule en 0 est $f : J = \left]-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}};\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right)$ qui se transforme par trigonométrie en

$$f(x) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$

donc en $f(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E), posons $g : J+a \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x-a)$, alors $\forall x \in J+a,\ x-a \in I$ donc $f'(x-a) = f(x-a)^2+f(x-a)+1 = g'(x) = g(x)^2+g(x)+1$ donc g est solution de (E) sur $J+a$. Les graphes des solutions de (E) se déduisent donc toutes de celle explicitée ci-dessus par translation de $(a,0)$.

13.76 <u>Analyse</u> : soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$ qu'on développe, par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur des segments, en $f(x)+x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = 1$ (1). Comme $f_1 : t \mapsto f(t)$ et $f_2 : t \mapsto tf(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions $F_1 : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ et $F_2 : x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$

sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par le théorème fondamental de l'intégration (ce sont les primitives de f_1 ou f_2 qui s'annulent en 0). En dérivant (1), on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=f'(x)+\int_0^x f(t)dt=0$ (2). On dérive à nouveau (2) pour avoir $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x)+f(x)=0$ (3). Comme les solutions de l'équation caractéristique $z^2+1=0$ de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre sont $z=\pm i$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (3) sont les fonctions $y : x \mapsto A\cos(x)+B\sin(x)$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. En prenant $x=0$ dans (1) et (2), on a $f(0)=1$ et $f'(0)=0$ donc $A=1$ et $B=0$. Ainsi, $f=\cos$.

Synthèse : Soit $f=\cos$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, en posant $u(t)=x-t$ et $v(t)=\sin(t)$ dans $\int_0^x (x-t)\cos(t)dt$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $\widetilde{[0;x]}$, par intégration par parties, on a la relation souhaitée, à savoir $f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)dt=\cos(x)+[(x-t)\sin(t)]_0^x+\int_0^x \sin(t)dt=\cos(x)+[-\cos(t)]_0^x=1$.

Conclusion : la seule fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)dt=1$ est $f=\cos$.

13.77 **a.** Soit $n\in\mathbb{N}$ et $y : x\mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n\neq 0$ une solution polynomiale (non nulle) de $(E_0)\ :\ x^2y''-2y=0$. Le terme de degré maximal dans la fonction polynomiale $x\mapsto x^2y''(x)-2y(x)$ est d'ordre n et il vaut $(n(n-1)a_n-2a_n)x^n=(n^2-n-2)a_nx^n=(n+1)(n-2)a_nx^n$. Ainsi, puisque $x^2y''(x)-2y(x)=0$, on a $(n+1)(n-2)a_n$ et, puisque $a_n\neq 0$, $(n+1)(n-2)=0$ donc $n=2$ car $n+1>0$.

Prenons donc $y : x\mapsto a_2x^2+a_1x+a_0$, alors $y''(x)=2a_2$ donc $2a_2x^2-2a_2x^2-2a_1x-2a_0=-2a_1x-2a_0=0$ pour $x\in I$ où I est l'intervalle sur lequel on résout (E_0) et ceci équivaut à la nullité du polynôme $-2a_1X-2a_0$ donc à $a_0=a_1=0$. Les solutions polynomiales de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions $y : x\mapsto a_2x^2$.

b. Soit $I=\mathbb{R}_+^*$ ou $I=\mathbb{R}_-^*$. Pour une fonction $y : I\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable, on définit $z : I\to\mathbb{R}$ par $z(x)=\dfrac{y(x)}{x^2}$ donc $y(x)=x^2z(x)$ (méthode de LAGRANGE) de sorte que z est aussi deux fois dérivable sur I et qu'on a l'équivalence, puisque $y''(x)=2z(x)+2xz'(x)+x^2z''(x)$ par la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}(\forall x\in I,\ x^2y''(x)-2y(x)=3x^2) &\iff (\forall x\in I,\ x^2(2z(x)+4xz'(x)+x^2z''(x))-2x^2z(x)=3x^2)\\ &\iff (\forall x\in I,\ 4xz'(x)+x^2z''(x)=3)\\ &\iff (\forall x\in I,\ x^2a'(x)+4xa(x)=3)\ \text{ en posant } a=z'\end{aligned}$$

Les solutions de $(F_0)\ :\ x^2y'+4xy=0$ sur I sont les fonctions $y : x\mapsto \dfrac{\lambda}{x^4}$ et, par méthode de variation de la constante, puisque $\dfrac{\lambda'}{x^2}=3$ équivaut à $\lambda : x\mapsto x^3+\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$, les solutions de $(F)\ :\ x^2y'+2xy=3$ sont les fonctions $y : x\mapsto \dfrac{x^3+\alpha}{x^4}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\alpha}{x^4}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Ainsi, y est solution de (E) sur I si et seulement si $z' : x\mapsto \dfrac{1}{x}+\dfrac{\alpha}{x^4}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et donc y est solution de (E) sur I si et seulement si $z : x\mapsto \ln(|x|)-\dfrac{\alpha}{3x^3}+\beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. En conclusion, les solutions réelles de (E) sur I sont les fonctions $y : x\mapsto x^2\ln(|x|)+\dfrac{A}{x}+Bx^2$ avec $A=-\dfrac{\alpha}{3}\in\mathbb{R}$ et $B=\beta\in\mathbb{R}$.

c. Analyse : soit $y : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont a fortiori des solutions de (E) donc, d'après la question précédente, il existe quatre réels A_1,A_2,B_1,B_2 tels que l'on ait $\forall x<0,\ y(x)=x^2\ln(|x|)+\dfrac{A_1}{x}+B_1x^2$ et $\forall x>0,\ y(x)=x^2\ln(|x|)+\dfrac{A_2}{x}+B_2x^2$. Avec $x=0$ dans (E), $y(0)=0$. La continuité de y en 0 montre que $A_1=A_2=0$ car $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2\ln(|x|)+B_1x^2)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln(|x|)+B_2x^2)=0$.

Pour tout B_1 et tout B_2, $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^-} (x\ln(|x|) + B_1 x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(|x|) + B_2 x) = 0$. On calcule $\forall x < 0,\ y'(x) = 2x\ln(|x|) + x + 2B_1 x$ et $\forall x > 0,\ y'(x) = 2x\ln(|x|) + x + 2B_2 x$. Mais comme $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{y'(x)-y'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} (2\ln(|x|) + x + 2B_1) = -\infty = \lim\limits_{x\to 0^+} (2\ln(|x|) + x + 2B_2) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{y'(x)-y'(0)}{x-0}$, la fonction y n'est pas deux fois dérivable en 0.

Pas besoin de synthèse puisqu'il n'y a aucune solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

13.78 **a.** $\chi_M = \begin{vmatrix} X-4 & 3 & -3 \\ -5 & X+3 & -4 \\ 1 & -2 & X+1 \end{vmatrix} = (X-4)(X+3)(X+1) - 12 - 30 + 3(X+3) + 15(X+1) - 8(X-4)$ avec Sarrus qui se développe en $\chi_M = X^3 - 3X + 2 = (X-1)(X^2+X-2) = (X-1)^2(X+2)$.

b. Comme χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le cours.

c. Comme $M - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car les deux premières colonnes sont indépendantes et les deux dernières opposées, par la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_3)) = \dim(E_1(M)) = 1$. Cette dimension n'étant pas égale à l'ordre de multiplicité de 1 dans χ_M, M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

d. La matrice $M - I_3$ ci-dessus montre que $E_1(M) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (0,1,1)$. De même, comme on a $M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et que $C_1 + C_2 - C_3 = 0$ dans cette matrice, on a $E_2(M) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1,1,-1)$. On cherche un vecteur $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $Mv_2 = v_2 + v_1$ qui équivaut à $(M - I_3)v_2 = v_1$. On constate que $v_2 = (1,0,-1)$ vérifie cette condition (il y en a d'autres). Posons $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $\det(P) = 1$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et, par formule de changement de base, on a $M = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (réduction de Jordan).

Le système différentiel $\begin{cases} x' = & 4x - 3x + 3z \\ y' = & 5x - 3y + 4z \\ z' = & -x + 2y - z \end{cases}$ s'écrit $X' = MX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Pour $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, on pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors a, b, c sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$ par opérations et on a $X' = MX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff Y' = TY$. Or les solutions du système différentiel $\begin{cases} a' = & a + b \\ b' = & b \\ c' = & -2c \end{cases}$ sont simplement $b : t \mapsto \beta e^t$, $c : t \mapsto \gamma e^{-2t}$ puis, en reportant, $a : t \mapsto (\alpha + \beta t)e^t$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ donc, grâce à l'équivalence précédente, les solutions de $\begin{cases} x' = & 4x - 3x + 3z \\ y' = & 5x - 3y + 4z \\ z' = & -x + 2y - z \end{cases}$ sont, comme $X = PY$, toujours avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $x : t \mapsto b(t) + c(t) = \beta e^t + \gamma e^{-2t}$, $y : t \mapsto a(t) + c(t) = (\alpha + \beta t)e^t + \gamma e^{-2t}$, $z : t \mapsto a(t) - b(t) - c(t) = (\alpha + \beta t)e^t - \beta e^t - \gamma e^{-2t}$.

Ceci peut s'écrire matriciellement $X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \gamma e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

13.6 Officiel de la Taupe

13.79 Si $(f_1,\cdots,f_n)$ est liée et que par exemple $f_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\lambda_k f_k$, alors la colonne C_n de la matrice du wronskien s'écrit $C_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\lambda_k C_k$ donc son déterminant est nul et $W(f_1,\cdots,f_n)=0$.

Comme les fonctions f_k sont de classe C^∞ car solutions de cette équation différentielle résolue, la fonction $W(f_1,\cdots,f_n)$ est aussi de classe C^∞ et on la dérive en $W(f_1,\cdots,f_n)'(t)=$ la somme de n déterminants où l'on dérive chaque ligne successivement. Tous les déterminants sont nuls par alternance sauf le dernier qui vaut $W(f_1,\cdots,f_n)'(t)=\begin{vmatrix} f_1(t) & \cdots & \cdots & f_n(t)\\ f_1'(t) & \cdots & \cdots & f_n'(t)\\ \vdots & & & \vdots\\ f_1^{(n)}(t) & \cdots & \cdots & f_n^{(n)}(t)\end{vmatrix}$. On remplace alors $f_1^{(n)}$ par son expression en fonction des dérivées d'ordre inférieur de f_1, on fait de même pour les autres fonctions et on trouve que $W(f_1,\cdots,f_n)'(t)=-p_{n-1}(t)W(f_1,\cdots,f_n)(t)$ en ajoutant à la dernière ligne une combinaison linéaire des précédentes. Comme on est sur un intervalle, $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall t\in I,\ W(f_1,\cdots,f_n)(t)=\lambda e^{-P_{n-1}(t)}$ où P_{n-1} est une primitive de p_{n-1} : ça c'est le cours mais c'est inutile ici.

Pour la question proprement dite, comme on sait que l'application $\varphi : f\in S_E\mapsto(f(0),f'(0),\cdots,f^{(n-1)}(0))$ est un isomorphisme entre l'espace S_E des solutions de (E) et $\mathbb{R}^n$ (d'après Cauchy-Lipschitz), comme les n colonnes de la matrice correspondant à $W(f_1,\cdots,f_n)(0)$ représentent la famille de vecteurs $(\varphi(f_1),\cdots,\varphi(f_n))$ écrites dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$: la famille $(\varphi(f_1),\cdots,\varphi(f_n))$ est liée : la famille $(f_1,\cdots,f_n)$ l'est aussi.

Avec les fonctions f_1 et f_2 de l'énoncé, elles sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f_1'(t)=2t$ et $f_2'(t)=2t|t|$ (en distinguant selon que $t>0$ ou $t\leqslant 0$). Ainsi $W(f_1,f_2)(t)=\begin{vmatrix} t^2 & t|t|\\ 2t & 2t|t|\end{vmatrix}=0$.

Par ailleurs, ces deux fonctions forment une famille libre car si $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ vérifie $\lambda_1 f_2 1+\lambda_2 f_2=0$, alors en évaluant en 1 et en -1, on a $\lambda_1+\lambda_2=0$ et $\lambda_1-\lambda_2=0$ donc $\lambda_1\lambda_2=0$.

Premièrement, si $n=1$ et si $W(f_1)=0$, alors f_1 est identiquement nulle sur I par définition de W donc la récurrence est initialisée avec même $J=I$.

- Si $g(t)=0$, $W(f_1g,\cdots,f_ng)(t)=g^n(t)W(f_1,\cdots,f_n)(t)$ car la première matrice ne contient que des 0.
- Si $g(t)\neq 0$, $W(f_1g,\cdots,f_ng)(t)=g(t)\begin{vmatrix} f_1(t) & \cdots & \cdots & f_n(t)\\ f_1(t)g'(t)+g(t)f_1'(t) & \cdots & \cdots & f_n(t)g'(t)+g(t)f_n'(t)\\ \vdots & & & \vdots\\ (f_1g)^{(n-1)}(t) & \cdots & \cdots & (f_ng)^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}$ en sortant

$g(t)$ de la ligne 1. On effectue alors l'opération de Gauss $L_2\leftarrow L_2-g'(t)L_1$ et on sort $g(t)$ de la seconde ligne pour avoir $W(f_1g,\cdots,f_ng)(t)=g(t)^2\begin{vmatrix} f_1(t) & \cdots & \cdots & f_n(t)\\ f_1'(t) & \cdots & \cdots & f_n'(t)\\ (f_1g)''(t) & \cdots & \cdots & (f_ng)''(t)\\ \vdots & & & \vdots\\ (f_1g)^{(n-1)}(t) & \cdots & \cdots & (f_ng)^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}$.

Avec les formules de Leibniz pour chaque ligne, par la même méthode, on arrive au résultat demandé.

Si f_1 ne s'annule pas sur I, en posant pour $k\in[\![2;n]\!]$, $f_k=\left(\dfrac{f_k}{f_1}\right)f_1$ et en utilisant le résultat précédent avec $g=f_1$, on parvient à $W(f_1,\cdots,f_n)=f_1^nW\left(1,\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)',\cdots,\left(\dfrac{f_n}{f_1}\right)'\right)$. Mais $(1)^i=0$ dès que $i\geqslant 2$, il ne reste que 1 puis de 0 dans C_1 et on peut développer par rapport à la première colonne pour la formule espérée.

Si on suppose que le résultat est vrai jusqu'à $n-1$ fonctions, et si l'on se donne n fonctions $(f_1,\cdots,f_n)$ n fois dérivables sur I qui vérifient $W(f_1,\cdots,f_n)=0$, alors on distingue deux cas :

- Si $f_1=0$ alors la famille $(f_1,\cdots,f_n)$ est liée sur I en entier.

• Si $f_1 \neq 0$, il existe (par continuité en un point où f_1 ne s'annule pas) un "vrai" segment J (contenant au moins deux réels) inclus dans I où f_1 ne s'annule pas. D'après le résultat précédent, comme $W\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right)$ est nul sur ce segment, par hypothèse de récurrence, on a un nouveau "vrai" segment K inclus dans J donc dans I tel que les fonctions $\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'$ forment une famille liée sur K. En intégrant cette relation (intervalle), on a l'existence d'une constante $-\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et d'une famille $(\alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ telles que $\alpha_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) + \cdots + \alpha_n\left(\frac{f_n}{f_1}\right) = -\alpha_1$ sur K. Il vient alors $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0$ donc la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée sur K.

Ceci conclut l'hérédité et donc la récurrence.

Si $f_1, \cdots, f_n$ sont des fonctions polynomiales et vérifient $W(f_1, \cdots, f_n) = 0$, comme elle forment une famille liée sur un segment qui contient une infinité de valeurs, la relation linéaire les liant reste valable sur $\mathbb{R}$ en entier (seul le polynôme nul possède une infinité de racines).

13.80 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire donne l'existence et l'unicité d'une solution du système linéaire (car $X' = AX$ où ${}^tX = (x\ y\ z)$ et $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$), il dit même que cette solution maximale unique est définie sur l'intervalle total $\mathbb{R}$ en entier.

$x' = -ax$ avec $x(0) = 1$ implique $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = e^{-at}$ donc x reste strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Si y s'annulait sur $\mathbb{R}_+^*$, posons $\alpha = \mathrm{Inf}\{t > 0 \mid y(t) = 0\}$ qui existe bien car l'ensemble $E = \{t > 0 \mid y(t) = 0\}$ est non vide par hypothèse et minoré par 0. Par continuité de y, comme il existe une suite d'éléments de E qui tendent vers α, on a $y(\alpha) = 0$: cet Inf est un Min.
Alors $y'(\alpha) = ax(\alpha) - by(\alpha) > 0$ ce qui est impossible car y est positive sur $[0; \alpha[$ par construction.
Ainsi, y reste strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et alors $z' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc z strictement positive car $y(0) = 0$.
En faisant la somme des trois relations, on a $(x + y + z)' = 0$ donc $x + y + z$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et comme elle vaut 1 en $t = 0$, on a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) + y(t) + z(t) = 1$.
On a une expression exacte de $x(t)$ qui garantit que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0^+$. Comme z est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle y est strictement croissante, par le théorème de la limite monotone, on a l'existence d'une limite finie $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = z_0 \in]0; 1]$. Ainsi, d'après la relation précédente : $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 1 - z_0 = y_0 \in [0; 1[$.
Si on avait $y_0 > 0$, on aurait aussi $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = -by_0 = y_0'$. Avec le théorème des accroissements finis, on montre que si $y_0 > 0$ donc $y_0' < 0$ (direction asymptotique $y = -y_0'x$), ceci implique que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$.
Par conséquent, $y_0 = 0$ donc $z_0 = 1 - y_0 = 1$. Au final : $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 1$.

On résout en cascade en distinguant selon que $a = b$ ou $a \neq b$:

<u>$a \neq b$</u> $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = e^{-at}$ car $x(0) = 1$. En injectant dans la seconde équation, on trouve classiquement avec variation de la constante : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \dfrac{a}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$ car $y(0) = 0$.
De même, $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = 1 + \dfrac{1}{b-a}\left(ae^{-bt} - be^{-at}\right)$ car $z(0) = 0$ ou car $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 1$.

<u>$a = b$</u> $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = e^{-at}$ car $x(0) = 1$. Cette fois-ci : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = ate^{-at}$ car $y(0) = 0$.
On trouve alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = 1 - \big(at + 1\big)e^{-at}$ car $z(0) = 0$ ou car $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 1$.

<u>On fixe maintenant a et $t > 0$</u> : on a déjà vu que $x(t)$ était indépendant de b. Par croissance comparée avec les expressions précédentes (que ce soit un cas ou un autre), on voit que $\lim\limits_{b\to+\infty} y(t) = 0$ (soit $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\alpha}{u} = 0$ si $\alpha \neq 0$, soit $\lim\limits_{v\to+\infty} ve^{-v} = 0$). $\lim\limits_{b\to+\infty} z(t) = \lim\limits_{b\to+\infty} (1 - x(t) - y(t)) = 1 - x(t)$ d'après la limite précédente.

<u>On fixe maintenant b et $t > 0$</u> : il est clair que $\lim\limits_{a\to+\infty} x(t) = 0$. Encore une fois on a $\lim\limits_{a\to+\infty} y(t) = 0$ (dans les deux cas) donc $\lim\limits_{a\to+\infty} z(t) = 1 - 0 - 0 = 1$.

<u>On fixe encore b et $t > 0$</u> : il est clair que $\lim\limits_{a\to 0^+} x(t) = 1$ et que $\lim\limits_{a\to 0^+} y(t) = 0$ donc $\lim\limits_{a\to 0^+} z(t) = 1 - 1 - 0 = 0$.

13.81 Sur $]0;+\infty[$, l'équation est résolue et $(E)\ :\ y' = -\dfrac{y}{2x} + \dfrac{1}{2x(1+x)}$. Les solutions de (E_0) sont les $y : x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$ et par la méthode de variation de la constante, y solution de (E) si et seulement si $\lambda' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$; prenons $\lambda = \mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$ et les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont les $y : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})+\alpha}{\sqrt{x}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sur $]-1;0[$, l'équation est résolue et $(E)\ :\ y' = -\dfrac{y}{2x} + \dfrac{1}{2x(1+x)}$. Les solutions de (E_0) sont les $y : x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{-x}}$ et par la méthode de variation de la constante, y solution de (E) si et seulement si $\lambda' = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}(1+x)}$; on prend $\lambda = \mathrm{Argth}\,(\sqrt{-x})$ donc les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont les $y : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Argth}\,(\sqrt{-x})+\beta}{\sqrt{-x}}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Pour pouvoir recoller les solutions en 0, il faut prolonger par continuité en 0 et cela impose $\alpha = \beta = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\mathrm{Argth}\,(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} = 1$. On vérifie que f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ si $x \in]0;+\infty[$, $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{\mathrm{Argth}\,(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$ si $x \in]-1,0[$ est dérivable en 0 par DL avec $f'(0) = -\dfrac{1}{3}$ car $f(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x}{3} + o(x)$.

Il existe donc une unique fonction solution de (E) sur $]-1;+\infty[$ et c'est la fonction f ci-dessus.

Méthode 1 : Si $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, supposons qu'il existe une fonction y DSE qui soit solution de (E) : $\exists R' > 0,\ \forall x \in]-R';R'[,\ y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Alors par théorème : $\forall x \in]-R';R'[,\ y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}$ donc $xy'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n b_n x^n$ et $x^2 y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (n-1) b_{n-1} x^n$. Comme $\forall x \in]-R';R'[,\ xy(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n$:

$$\forall x \in]-R';R'[,\ b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(2nb_n + 2(n-1)b_{n-1} + b_n + b_{n-1}\big)x^n = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme $R > 0$ et $R' > 0$, par unicité des coefficients, on a $a_0 = b_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2n+1)b_n + (2n-1)b_{n-1} = a_n$. Alors, en posant $u_n = (-1)^n(2n+1)b_n$, on a $u_n - u_{n-1} = (-1)^n a_n$ ce qui donne par télescopage, comme $u_0 = b_0 = a_0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - u_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ donc $b_n = \dfrac{1}{2n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k$. La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k\Big) x^n$ s'obtient par produit de CAUCHY de la série entière $\dfrac{1}{1+x}$ de rayon 1 et de la série $f(x)$ de rayon $R \geqslant 1$, on sait qu'alors la rayon de cette nouvelle série est au moins $\mathrm{Min}(R,1) = 1$. Comme les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} (2n+1) b_n x^n$ ont le même rayon (quasi série dérivée), le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$ est au moins égal à 1 et $g :]-1;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est bien solution (DSE) de (E).

Méthode 2 : On résout l'équation différentielle classiquement par variation de la constante :

- sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lambda' = \dfrac{f(x)}{2\sqrt{x}(1+x)}$ donc le solutions sont $y : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big(a + \displaystyle\int_0^x \dfrac{f(t)dt}{2\sqrt{t}(1+t)}\Big)$ avec $a \in \mathbb{R}$ (il y a convergence de l'intégrale avec RIEMANN). Le changement de variable $u : t \mapsto \sqrt{t}$ (C^1-difféomorphisme de $]0;x[$ dans $]0;\sqrt{x}[$) permet d'écrire $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big(a + \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \dfrac{f(u^2)du}{1+u^2}\Big)$. Comme le rayon de la série entière $\dfrac{1}{1+u^2}$ est égal à 1 et celui de f est $R \geqslant 1$, par produit de CAUCHY, celui de $\dfrac{f(u)}{1+u^2}$ est supérieur ou égal à 1 donc si $x \in]0;1[$, on a $\forall u \in [0;\sqrt{x}[,\ \dfrac{f(u^2)}{1+u^2} = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n u^{2n}\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n}\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k\Big) u^{2n}$ donc $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big(a + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k\Big) \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} u^{2n} du\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big(a + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k\Big) x^n \sqrt{x}\Big)$ par convergence normale sur $[0;\sqrt{x}[$. L'unique valeur de a qui permet d'avoir une fonction DSE est $a = 0$. Même chose sur $]-1;0[$. Ainsi $y : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k\Big) x^n$ est solution et DSE avec un rayon $R' \geqslant 1$.

13.82 Les solutions de l'équation homogène sont les $y : x \mapsto ae^x + be^{-x}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Méthode 1 : Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$, on cherche une solution particulière par la méthode de double variation des constantes et on a donc le système : $a'e^x + b'e^{-x} = 0$ et $a'e^x - b'e^{-x} = e^{-x}\Big(x\ln|x| - \dfrac{1}{4x}\Big)$. On obtient alors $a'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{2}\Big(x\ln|x| - \dfrac{1}{4x}\Big)$ et $b'(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x}\Big(x\ln|x| - \dfrac{1}{4x}\Big)$ et les calculs sont très lourds.

Méthode 2 : Étant donnée la forme du second membre, il semble judicieux de poser $y = e^{-x}z$, ce qui donne $y'' = e^{-x}z - 2e^{-x}z' + e^{-x}z''$ pour que l'équation se transforme en $-2e^{-x}z' + e^{-x}z'' = e^{-x}\Big(x\ln|x| - \dfrac{1}{4x}\Big)$ ce qui équivaut, en posant $w = z'$, à $w' - 2w = x\ln|x| - \dfrac{1}{4x}$. On obtient alors $w(x) = \lambda e^{2x} - \dfrac{x\ln|x|}{2} - \dfrac{\ln|x|}{4} - \dfrac{1}{4}$ en cherchant une solution particulière sous la forme : $y_0 = ax\ln|x| + b\ln|x| + c$ (ça semble logique).
Il reste à intégrer : $z' = \lambda e^{2x} - \dfrac{x\ln|x|}{2} - \dfrac{\ln|x|}{4} - \dfrac{1}{4}$ qui devient $z = \alpha e^{2x} + \beta - \dfrac{x\ln|x|}{4} - \dfrac{x^2\ln|x|}{4} + \dfrac{x^2}{8}$. On trouve enfin $y(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + e^{-x}\Big(\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x\ln|x|}{4} - \dfrac{x^2\ln|x|}{4}\Big)$ (calculs un peu moins lourds).

13.83 Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f''(x) = g(x) \geqslant 0$, alors f est une solution de l'équation $y'' + y = g$. Or les solutions de $y'' + y = 0$ sont les $y : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$.
Double variation des constantes : $a'(x)\cos(x) + b'(x)\sin(x) = 0$ et $-a'(x)\sin(x) + b'(x)\cos(x) = g(x)$ donc, par combinaison linéaire : $a'(x) = -\sin(x)g(x)$ et $b'(x) = \cos(x)g(x)$.
On intègre pour avoir $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \cos(x)\displaystyle\int_0^x \sin(t)g(t)dt + \sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)dt$.
Ainsi, on a $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$.
Alors, $f(x+\pi) + f(x) = \displaystyle\int_0^{x+\pi} \sin(x+\pi-t)g(t)dt + \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt = \int_x^{x+\pi} \sin(t-x)g(t)dt$.
Mais on sait que $g(t) \geqslant 0$ et que $\forall t \in [x; x+\pi],\ \sin(t-x) \geqslant 0$.
Par conséquent, par positivité de l'intégrale, on a $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

13.84 Supposons qu'il existe une fonction y développable en série entière qui soit solution de l'équation (E) : $\exists R > 0,\ \forall x \in]-R; R[,\ y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors par théorème : $\forall x \in]-R; R[,\ y'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $\forall x \in]-R; R[,\ y''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}$ donc $xy''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$.
Ainsi : $\forall x \in]-R; R[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\big(2(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n\big)x^n = 0$ et par unicité des coefficients (comme $R > 0$), on parvient à : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n$.
Réciproquement, si $a_0 \in \mathbb{R}^*$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie cette propriété, le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est infini par D'ALEMBERT par exemple car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, et en remontant les calculs, la fonction y ainsi définie est bien solution de l'équation.
Par récurrence (ou calcul classique avec des factorielles), on trouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{2^n}{(2n)!}a_0$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n x^n}{(2n)!}$.
On distingue selon le signe de x : si $x > 0$, on a $y(x) = a_0\text{ch}(\sqrt{2x})$ et si $x < 0$, on a $y(x) = a_0\cos(\sqrt{-2x})$.
Bien sûr, en effectuant le changement de fonctions $y(x) = z(\sqrt{2x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y(x) = z(\sqrt{-2x})$ sur $\mathbb{R}_-^*$, on peut établir que les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $y : x \mapsto a_0\text{ch}(\sqrt{2x}) + b_0\text{sh}(\sqrt{2x})$ et aussi les $y : x \mapsto a_1\cos(\sqrt{-2x}) + b_1\sin(\sqrt{-2x})$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
Pour prolonger en 0, la continuité impose $a_0 = a_1$; comme on veut la dérivabilité en 0, cela impose $b_0 = b_1 = 0$ donc on retrouve comme seules solutions sur $\mathbb{R}$ les solutions DSE.

13.85 Si f convient, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + x\displaystyle\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$ donc f est dérivable par théorème fondamental de la dérivation. Pour x réel, il vient : $f'(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)$ qu'on re-dérive pour obtenir : $f''(x) = f(x)$. Alors : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ae^x + be^{-x}$.

Réciproquement, si f a cette expression, comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ d'après les relations précédentes, on a $a + b = 0$ et $a - b = 1$ donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$ donc $f(x) = \mathrm{sh}\,(x)$. En repartant de $f''(x) = f(x)$ et en intégrant, on obtient successivement $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$ (même dérivée et égales en 0) puis $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$ (idem).

On peut aussi calculer explicitement les intégrales pour vérifier que $f(x) = \mathrm{sh}\,(x)$ est bien l'unique solution.

13.86 $y_1 : x \mapsto x$ est bien solution de (E_0) car $(1+x^2)0 + x - x = 0$. On a $\phi'(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ après simplification.

On pose classiquement $y = xz$ pour trouver une autre solution y_2 de (E_0) et avoir un système fondamental de solutions. On obtient $y' = xz' + z$ et $y'' = xz'' + 2z'$ donc y solution de (E_0) équivaut à z' solution de $(F_0)\ :\ x(1+x^2)w' + (2+3x^2)w = 0$. Or, comme $\dfrac{2+3x^2}{x(1+x^2)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{1+x^2}$, les solutions de (F_0) sont les $w : x \mapsto \dfrac{\lambda}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. Donc les solutions z sont les les $x \mapsto \mu + \lambda\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ d'après le calcul précédent. Ainsi, les solutions de (E_0) sont les $y : x \mapsto \mu x + \lambda\sqrt{1+x^2}$.

On aurait pu les trouver en cherchant les solutions développables en série entière mais encore faut-il se rappeler du développement de $\sqrt{1+x^2}$ et ce n'est pas le plus simple.

On effectue maintenant une double variation des constantes pour chercher une solution particulière d'où le système $\begin{cases} \mu' x + \lambda'\sqrt{1+x^2} & = & 0 \\ \mu' + \lambda'\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & = & \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} \iff \left(\lambda' = -x^2 \text{ et } \mu' = x\sqrt{1+x^2}\right)$. On peut prendre $\lambda = -\dfrac{x^3}{3}$ et $\mu = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ pour avoir les solutions de (E) sous la forme $y : x \mapsto \mu x + \lambda\sqrt{1+x^2} - \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ qui se simplifie en $y : x \mapsto \mu x + \lambda\sqrt{1+x^2} + \dfrac{x\sqrt{1+x^2}}{3}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les mêmes que sur $\mathbb{R}^*$ (l'équation est résolue sur $\mathbb{R}$).

13.87 C'est une équation d'EULER, de la forme $(E)\ :\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = 0$, qu'on résout traditionnellement en effectuant sur $\mathbb{R}_+^*$ le changement de fonction inconnue $z(t) = y(e^t)$, et sur $\mathbb{R}_-^*$ le changement $z(t) = y(-e^t)$.

• Pour $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t)$. Par opérations, z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons : $\forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$. Ainsi, comme $t \mapsto e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t}y''(e^t) - e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0. \end{aligned}$$

Cette nouvelle équation différentielle $(F)\ :\ z'' - 2z' + z = 0$ est linéaire du second ordre et sans second membre et, comme 1 est racine double de $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = (at+b)e^t$. D'après l'équivalence précédente, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} : \forall x > 0,\ y(x) = z(\ln(x)) = (a\ln(x) + b)x$.

• De même, pour $y : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(-e^t)$, qui est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = -e^t y'(-e^t)$ et $z''(t) = -e^t y'(-e^t) + e^{2t} y''(-e^t)$. Ainsi, comme $t \mapsto -e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_-^*$, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} \forall x < 0,\ x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t}y''(-e^t) + e^t y'(-e^t) + y(-e^t) = 0 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0. \end{aligned}$$

Comme avant, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(F)\ :\ z''-2z'+z=0$ sont les fonctions $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $\exists(a',b')\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R},\ z(t)=(a't+b')e^t$. D'après l'équivalence précédente, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y:\mathbb{R}_-^*\to\mathbb{R}:\ \forall x<0,\ y(x)=z(\ln(-x))=(a'\ln(-x)+b')(-x)=(\alpha\ln(|x|)+\beta)x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ (en posant $\alpha=-a'$ et $\beta=-b'$).

Autre méthode : on aurait pu constater que $y:x\mapsto x$ est solution et poser $y(x)=xw(x)$ avec w deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ et alors $y'(x)=xw'(x)+w(x)$, $y''(x)=xw''(x)+2w'(x)$ ce qui transforme l'équation (E) en $x^3w''(x)+x^2w'(x)=0$ qui se résout simplement en $w'(x)=\frac{a}{x}\Longrightarrow w(x)=a\ln|x|+b$ et on retrouve par exemple $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x>0,\ y(x)=ax\ln(x)+bx$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pouvait aussi chercher les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et trouver comme seules solutions les fonctions $x\mapsto bx$.

Cherchons maintenant les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Analyse : si $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont solutions donc de la forme précédente, ce qui montre qu'il existe $(a,b,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\forall x>0,\ y(x)=(a\ln(x)+b)x$ et $\forall x<0,\ y(x)=(\alpha\ln(|x|)+\beta)x$. En remplaçant x par 0 dans l'équation (E), on trouve $y(0)=0$. Comme y est continue en 0, $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=y(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^-}y(x)=y(0)=0$ mais ceci n'impose aucune condition sur a,b,α,β car $\lim\limits_{x\to0}x\ln(|x|)=0$ par croissances comparées. Mais comme y est aussi dérivable en 0, on a aussi existence des limites $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}=y'(0)$. Or $\forall x>0,\ \dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}=a\ln(x)+b$ et $\forall x<0,\ \dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}=\alpha\ln(|x|)+\beta$, ce qui impose $a=\alpha=0$ et $b=\beta$. Par conséquent, $\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=bx$.

Synthèse : réciproquement, si on définit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $y(x)=bx$ avec $b\in\mathbb{R}$, alors la fonction y est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2y''(x)-xy'(x)+y(x)=x^2.(0)-x.(b)+bx=0$.

Au final, les seules solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y:x\mapsto bx$ avec $b\in\mathbb{R}$.

13.88 **a.** Soit y DSE de rayon $R>0$ et solution de (E) telle que $y(0)=1$, alors $\forall x\in]-R;R[$, on a $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ avec $a_0=1$. Alors $y'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $xy''(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n$. Par unicité du développement $(R>0)$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\big(n(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_{n+1}+a_n\big)x^n=0\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=-\dfrac{1}{(n+1)^2}a_n$.

On montre par une récurrence simple que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}$. Réciproquement, en définissant y par $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^n}{(n!)^2}$, on a bien $R=+\infty$ (avec D'ALEMBERT par exemple) et y solution de (E) avec $y(0)=1$.

b. $y(0)=1$ et $y(2)=1-4+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n2^n}{(n!)^2}$ et la suite $\left(\dfrac{2^n}{(n!)^2}\right)_{n\geqslant2}$ est positive, décroissante, et tend vers 0 donc, d'après le CSSA, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n2^n}{(n!)^2}$ est positif mais inférieur à son premier terme 1. Ainsi $y(2)<-1$. D'après le TVI, y s'annule au moins une fois sur $]0;2[$.

De plus, $\forall x\in\mathbb{R},\ y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nnx^{n-1}}{(n!)^2}$. Pour $x\in]0;2[$ et $n\geqslant1$, posons $u_n=\dfrac{nx^{n-1}}{(n!)^2}>0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, tend vers 0 et $\forall n\geqslant1,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n}{n+1}\times x\times\dfrac{1}{(n+1)^2}\leqslant\dfrac{x}{(n+1)^2}\leqslant\dfrac{2}{4}<1$ donc

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi décroissante. Par le CSSA, on a donc $y'(x)$ du signe du premier terme de la série qui le définit, donc $y'(x) < 0$. La fonction y est donc strictement décroissante sur $]0;2[$ donc injective et y ne s'annule donc qu'une seule fois sur $]0;2[$.

13.89 Soit y DSE de rayon $R > 0$ et solution de (E_0), alors $\forall x \in]-R;R[$, on a $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors il vient $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $xy'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$, $y''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$, $x^2y''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$.

Par unicité (ici $R > 0$), $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2}+n(n-1)a_n+4na_n+2a_n\big)x^n = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -a_n$.

Ainsi, $y(x) = a_0\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} + a_1\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1} = \dfrac{a_0+a_1x}{1+x^2}$.

Réciproquement, en définissant $y(x) = \dfrac{a_0+a_1x}{1+x^2}$, on vérifie que $y(x)$ est bien solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ (même si le rayon de convergence de la série est 1). Ceci nous fait penser à poser $z(x) = (1+x^2)y(x)$ ce qui donne $z'(x) = 2xy(x)+(1+x^2)y'(x) \Longrightarrow z''(x) = (1+x^2)y''(x)+4xy'(x)+2y(x)$ donc $(E) \iff z''(x) = 1$ et a trouvé toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$: $z(x) = \dfrac{x^2}{2} + a_0 + a_1x \iff y(x) = \dfrac{a_0+a_1x}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{2(1+x^2)}$.

13.90 L'énoncé est faux en l'état en prenant $q(x) = -1$, $y = \operatorname{sh}$ qui vérifie bien $\operatorname{sh}(0) = 0$, $\operatorname{sh}'(0) > 0$ et sh' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. On modifie donc légèrement en supposant $\ell > 0$.

Par l'absurde, si y' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, alors y' garde un signe constant (positif donc car $y'(0) > 0$) sur $\mathbb{R}_+$ car y' est continue. Ainsi y est croissante donc possède une limite $\ell' \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} y''(x) = -\infty$ et comme $y'(x) = y'(0) + \displaystyle\int_0^x y'(t)dt$, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = -\infty$ ce qui est absurde. Par conséquent : y' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$.

13.91 Comme $t \mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$ est continue sur $[0;1]$, la fonction $T(f)$ est bien définie. De plus, en notant $g : (x,t) \mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$, on a g continue sur le compact $[0;1]^2$ donc elle y est bornée et on note $M = \underset{[0;1]^2}{\mathrm{Max}}(g)$.

Comme $x \mapsto (x,t)$ est continue sur $[0;1]$ pout $t \in [0;1]$, que $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0;1]$ pour tout $x \in [0;1]$ et qu'on peut domine $|g(x,t)| \leqslant M$ avec $t \mapsto M$ intégrable sur $[0;1]$, le théorème de continuité sous le signe somme permet d'affirmer que $T(f)$ est bien continue sur $[0;1]$.

De plus, $g(x) = T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{Min}(x,t)f(t)dt + \int_x^1 \mathrm{Min}(x,t)f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt$. D'après le théorème fondamental de l'intégration : $g'(x) = xf(x) + \displaystyle\int_x^1 f(t)dt - xf(x) = \int_x^1 f(t)dt$ d'où $g''(x) = -f(x)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, avec la notation précédente : $T(f) = \lambda f \iff g = \lambda g''$.

- Si $\lambda = 0$, $g = 0$ donc $f = -g'' = 0$. 0 n'est donc pas valeur propre de T.
- Si $\lambda \neq 0$, $T(f) = \lambda f \iff g'' = \dfrac{1}{\lambda}g$ et on distingue deux cas :
  - Si $\lambda > 0$, $g(x) = A\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + B\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ et $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$ fournissent $A = B = 0$: NON !
  - Si $\lambda < 0$, $g(x) = A\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) + B\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$ et les conditions $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$ fournissent $A = 0$ et $\dfrac{1}{-\lambda} = (2n+1)^2\dfrac{\pi^2}{4}$ avec $B \neq 0$ (sinon ce n'est un vecteur propre).

Le spectre de T est donc l'ensemble $\left\{\dfrac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$.

13.92 **a.** Posons $f : t \mapsto ||X(t)||^2 = (X(t)|X(t))$. On sait que f est dérivable car X l'est par hypothèse et on a $f'(t) = (X'(t)|X(t)) + (X(t)|X'(t)) = {}^tX(t){}^tAX(t) + 2{}^tX(t)AX(t) = {}^tX(t)({}^tA + A)X(t) = 0$ car ${}^tA = -A$. Ainsi f est de dérivée nulle sur un intervalle donc elle est constante.

b. Soit $Y \in \text{Ker}(A)$, posons $g : t \mapsto (X(t)|Y) = {}^tX(t)Y$ et dérivons : $\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = {}^tX'(t)Y = -{}^tX(t)AY = 0$.
c. $\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^3\det(A)$ donc $\det(A) = 0$ et $\text{Ker}(A)$ n'est donc pas réduit au vecteur nul. Soit Y_0 un vecteur non nul de $\text{Ker}(A)$, posons $\alpha = (X(0)|Y_0)$. On vient de voir que $\forall t \in \mathbb{R},\ (X(t)|Y_0) = \alpha$ donc $X(t)$ est dans le plan affine P d'équation $P\ :\ (X|Y_0) = \alpha$.

Ainsi $X(t)$ est à la fois sur le plan affine P et sur la sphère S de centre O et de rayon $||X(0)||$. Comme S et P s'intersectent (en $X(0)$ par exemple), $X(t)$ appartient au cercle de l'espace défini par $C = S \cap P$.

13.93 Soit y DSE de rayon $R > 0$ et solution de l'équation, alors $\forall t \in]-R;R[$, on a $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Alors il vient $y'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$, $ty'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n$, $y''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$, $t^2y''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n$.
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(4(n+2)(n+1)a_{n+2} - 4n(n-1)a_n - 4na_n + a_n\big)x^n = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{(2n-1)(2n+1)}{4(n+1)(n+2)}a_n$.
Orgie de factorielles en perspective en séparant termes pairs et impairs.

13.94 **a.** Si f est de classe C^∞, il est clair que g l'est aussi. Φ est clairement linéaire.

b. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on résout l'équation différentielle $y' - xy = \lambda y \iff \Phi(y) = \lambda y$ pour trouver $y = \alpha e^{\frac{(x+\lambda)^2}{2}}$.
Comme ces fonctions sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ sans aucune condition sur λ, le spectre de Φ est $\mathbb{R}$.

$y \in \text{Ker}(\Phi^2) \iff \Phi(y) \in \text{Ker(Phi)} \iff y' - xy = \alpha e^{\frac{x^2}{2}}$. On résout cette équation avec la méthode de variation de la constante pour avoir $y = (\alpha x + \beta)e^{\frac{x^2}{2}}$ donc $\text{Ker}(\Phi^2)$ est le plan engendré par les deux fonctions $y_1 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ et $y_2 : x \mapsto xe^{\frac{x^2}{2}}$.

13.95 L'équation peut être mise sous forme résolue sur les quatre intervalles $I_1 =]-\infty;-1[$, $I_2 =]-1;0[$, $I_3 =]0;1[$ et $I_4 =]1;+\infty[$. On résout l'équation homogène en constatant que $\dfrac{2}{t(1-t^2)} = \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{1}{1+t}$ ce qui donne $y = \dfrac{\lambda t^2}{t^2-1}$ (les valeurs absolues sont absorbées par la constante).

Méthode de variation de la constante : $\lambda'(t) = \dfrac{1}{t}$ donc les solutions de (E) sur chacun des quatre intervalles sont les $y_\lambda : t \mapsto \dfrac{t^2(\lambda + \ln(|t|))}{t^2-1}$.

• Si y est une solution de (E) sur $]-1;1[$, alors il existe λ_1 et λ_2 telles que $\forall t \in]-1;0[,\ y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_1 + \ln(|t|))}{t^2-1}$ et $\forall t \in]0;1[,\ y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_2 + \ln(|t|))}{t^2-1}$. Comme on a forcément $y(0) = 0$ (en remplaçant t par 0 dans (E) par exemple ou par prolongement), on constate que y est de classe C^1 (avec $y'(0) = 0$) quelles que soient les constantes λ_1 et λ_2 : l'espace affine des solutions de (E) sur $]-1;1[$ est de dimension 2.

• Si y est une solution de (E) sur $]0;+\infty[$, alors il existe λ_1 et λ_2 telles que $\forall t \in]0;1[,\ y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_1 + \ln(|t|))}{t^2-1}$ et $\forall t \in]1;+\infty[,\ y(t) = \dfrac{t^2(\lambda_2 + \ln(|t|))}{t^2-1}$. Or on doit avoir $y(1) = \dfrac{1}{2}$ en remplaçant t par 1 dans (E) et ceci impose que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (voir les limites en 1) donc que $y(t) = \dfrac{t^2 \ln|t|}{t^2-1}$ si $t \neq 1$. Réciproquement, par DL, cette fonction est bien solution car elle est dérivable en 1 avec $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi l'espace affine des solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ est de dimension 0.

On fait de même sur $]-\infty; 0[$ et sur $\mathbb{R}$ pour voir que seule la fonction définie par $y(t) = \dfrac{t^2 \ln|t|}{t^2 - 1}$ est solution.

13.96 **a.** $g : t \mapsto e^{-t^2/2}$ est paire, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}dt = \int_{-x}^0 e^{-t^2/2}dt = -\int_0^{-x} e^{-t^2/2}dt$: f est impaire.

b. g est de classe C^∞ et $G : t \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ est la primitive de g qui s'annule en 0 donc elle est aussi de classe C^∞. Comme $h : x \mapsto e^{x^2/2}$ l'est aussi, par produit, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
De plus, $f'(x) = h'(x)G(x) + h(x)g(x) = xh(x)G(x) + 1 = 1 + xf(x)$ donc f est la solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 1 + xy$ qui vérifie aussi la condition de CAUCHY $f(0) = 0$.
c. h est DSE sur $\mathbb{R}$ car $\exp$ l'est et g l'étant aussi, G l'est encore comme primitive d'une fonction DSE. Par produit de CAUCHY, f est donc DSE sur $\mathbb{R}$ mais le développement est délicat à avoir par produit.

Il vaut mieux utiliser l'équation (E) ; si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ (puisque f est impaire) d'où $xf(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}x^{2n}$, alors $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}$ donc, par unicité du développement en série entière : $f'(x) = 1 + xf(x) \iff \big(a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ (2n+1)a_{2n+1} = a_{2n-1}\big)$.

Par récurrence, on montre que $\forall n \geqslant 0$, $a_{2n+1} = \dfrac{2^n n!}{(2n+1)!}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

13.97 Supposons qu'il existe $R > 0$ tel que $\forall t \in]-R; R[$, $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Il vient $y'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$, $ty'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n$, $y''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^t$, $t^2y''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n$. Comme $\forall |t| < \text{Min}(R, 1)$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\big(n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n\big)t^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} t^n$, $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}$.
Ainsi, $y(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}t^n}{n(n+1)(n+2)}$. Réciproquement, y définie comme ceci est de rayon 1 et solution de (E).

13.98 y_1 et y_2 sont solutions de (E_1) et (E_2) et sont donc de classe C^2 car y_1, a_1, y_2 et a_2 sont continues.
Supposons que y_2 ne s'annule pas sur $]a; b[$, par exemple on peut supposer avec le TVI que y_2 reste strictement positive sur $]a; b[$. On peut poser $z = \dfrac{y_1}{y_2}$ qui est donc de classe C^2 sur $]a; b[$.

On calcule $z' = \dfrac{y_1'y_2 - y_2'y_1}{y_2^2}$. Posons $w = y_1'y_2 - y_2'y_1$, alors $w' = y_1''y_2 - y_2''y_1 = (a_2 - a_1)y_1y_2 < 0$. Ainsi w est strictement décroissante sur $]a; b[$. De plus, $w(a) = y_1'(a)y_2(a) \geqslant 0$ et $w(b) = y_1'(b)y_2(b) \leqslant 0$. Si on avait $w(a) > 0$, on aurait $y_2(a) > 0$ et $\lim\limits_{x \to a^+} z(x) = +\infty$. Mais alors la fonction w serait strictement positive au voisinage de a, donc z strictement croissante au voisinage de a ce qui est incompatible. De même, on ne peux pas avoir $w(b) < 0$. Ainsi $w(a) = w(b) = 0$ donc w est nulle sur l'intervalle $]a; b[$ donc z est constante sur $]a; b[$ et il existe donc $\alpha > 0$ tel que $y_1 = \alpha y_2$.
Si on remplace dans les équations (E_1) et (E_2), on obtient $y_1'' + a_1y_1 = y_1'' + a_2y_1 = 0$ donc $(a_1 - a_2)y_1 = 0$ sur $]a; b[$ d'où la contradiction. Par l'absurde : $\exists c \in]a; b[$, $y_2(c) = 0$.

13.99 X_j est l'unique fonction vectorielle (définie sur $\mathbb{R}$ en entier) qui vérifie le problème de CAUCHY $X_j'(t) = AX_j(t)$ avec $X_j(0) = e_j$: X_j est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ par le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k(t_0) = 0$. Posons alors $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$. Y est dérivable comme combinaison de fonctions dérivables et $Y' = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k' = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k AX_k = A\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\Big) = AY$. Ainsi, Y vérifie $Y' = AY$ et $Y(t_0) = 0$. Par CAUCHY-LIPSCHITZ, une seule fonction vérifie ceci, or la fonction nulle est

clairement solution : $Y = 0$. Ainsi $Y(0) = 0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ par liberté de $(e_1, \cdots, e_n)$. Ainsi $(X_1(t_0), \cdots, X_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ d'où $\det\big(X(t_0)\big) = 0$: $\forall t \in \mathbb{R},\ \det\big(X(t)\big) \neq 0$.
Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction matricielle dérivable, alors en notant $C_1, \cdots, C_n$ ses colonnes, on a : $(\det M)'(t) = \det(C_1'(t), C_2(t), \cdots, C_n(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t), , \cdots, C_n(t)) + \cdots + \det(C_1(t), \cdots, C_{n-1}(t), C_n'(t))$.
Posons $f = \det(X) = \det(X_1, \cdots, X_n)$, alors $f' = \det(X_1', X_2, \cdots, X_n) + \cdots + \det(X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n')$. En posant $B(t) = X(t)^{-1}AX(t)$, on obtient $X'(t) = X(t)B(t)$. Construire $B(t)$ va nous permettre de travailler sur les colonnes de X plutôt que sur les lignes avec A. Notons $B(t) = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pour toute colonne $j \in [\![1;n]\!]$, on a $X_k'(t) = b_{1,k}X_1(t) + b_{2,k}X_2(t) + \cdots + b_{n,k}X_n(t)$. Par alternance et multilinéarité du déterminant, on trouve alors $f'(t) = (b_{1,1} + \cdots + b_{n,n})f(t)$: $\Big(\det(X(t))\Big)' = \mathrm{Tr}\ (B)\det(X(t))$.

Comme A et $B(t)$ sont semblables : $\mathrm{Tr}\ (A) = \mathrm{Tr}\ (B(t))$ donc $\Big(\det(X(t))\Big)' = \mathrm{Tr}\ (A)\det(X(t))$.
Si $\mathrm{Tr}\ (A) = 0$, alors $t \mapsto \det(X(t))$ est constante d'après la question précédente.
Comme $\det(X(0)) = 1$ par hypothèse, on a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ \det(X(t)) = \det(X(0)) = 1$.

13.100 Si y est DSE sur $]-1;1[$ et solution de (E) alors $\forall t \in]-1;1[,\ y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. On a donc aussi $ty'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_n t^n$, $t^2y''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n$ et $y''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$. En reportant dans (E), on trouve $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(4(n+2)(n+1)a_{n+2} - 4n(n-1)a_n - 4na_n + a_n\big)t^n = 0$ ce qui donne, par unicité des coefficients : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$. On prouve alors par une récurrence classique que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} = \dbinom{\frac{1}{2}}{2n}a_0$, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = \dbinom{\frac{1}{2}}{2n+1}a_1$.
Ainsi $y(t) = a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{\frac{1}{2}}{2n} t^{2n} + a_1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{\frac{1}{2}}{2n+1} t^{2n+1} = a_0(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}) + a_1(\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t})$ qu'on peut encore écrire $y(t) = (a_0 + a_1)\sqrt{1+t} + (a_0 - a_1)\sqrt{1-t}$.
Ainsi : les solutions de (E) sur $]-1;1[$ sont les $y : t \mapsto a\sqrt{1+t} + b\sqrt{1-t}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Il suffit de vérifier que les solutions de (E) sur $]1;+\infty[$ sont les $y : t \mapsto a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t-1}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On contrôle encore que les solutions de (E) sur $]-\infty;-1[$ sont les $y : t \mapsto a\sqrt{-1-t} + b\sqrt{1-t}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

13.101 Bien sûr que non, on a vu dans le cours un contre-exemple d'une fonction affine par morceaux, intégrable et qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
Avec $\sin(x-t) = \sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)$ et la linéarité de l'intégrale, comme toutes les fonctions sont continues sur le segment $[0;x]$: $\forall x \geqslant 0,\ g(x) = f(x) + \sin(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$.
La dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt$ est $x \mapsto \cos(x)a(x)f(x)$, et $\left(\displaystyle\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt\right)' = \sin(x)a(x)f(x)$, donc $g'(x) = f'(x) + \cos(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$. On recommence pour obtenir : $g''(x) = f''(x) - \sin(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt + \cos^2(x)a(x)f(x) + \sin^2(x)(x)f(x)$ donc $g''(x) = f''(x) + f(x) - g(x) + a(x)f(x) = -g(x)$ donc $g'' + g = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
On sait résoudre cette équation différentielle : $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \geqslant 0,\ g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ donc $|g| \leqslant |A| + |B| = C$ par exemple et g est bornée. Comme on a la relation $f(x) = g(x) - \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$, en passant aux valeurs absolues avec l'inégalité de la moyenne :
$\forall x \geqslant 0,\ |f(x)| \leqslant |g(x)| + \displaystyle\int_0^x |\sin(x-t)||a(t)||f(t)|dt \leqslant C + \int_0^x |a(t)f(t)|dt$ car $|\sin| \leqslant 1$.

Posons $h : x \mapsto \int_0^x |a(t)f(t)|dt$, on a h dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = |a(x)||f(x)| \leqslant C|a(x)| + |a(x)|h(x)$ d'après ce qui précède. En notant $A(x) = \int_0^x |a(t)|dt$, on a $\big(e^{-A(x)}h(x)\big)' \leqslant C|a(x)|e^{-A(x)} = C\big(-e^{-A(x)}\big)'$. On intègre cette inégalité entre 0 et x pour avoir : $e^{-A(x)}h(x) \leqslant C\big(1 - e^{-A(x)}\big) \leqslant C$.
Alors $\forall x \geqslant 0,\ h(x) \leqslant Ce^{A(x)}$ et comme a est intégrable, A est croissante et possède une limite finie en $+\infty$ donc A est bornée, d'où h est bornée et enfin $f \leqslant C + h$ donc f est aussi bornée.

13.102 Une récurrence simple montre que si f est solution de l'équation $(E)\ :\ f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$, alors f est de classe C^∞. En effet f est de classe C^1 par hypothèse donc, par composition et somme : $x \mapsto \alpha f(x) + f(\lambda x)$ l'est aussi donc f' est de classe C^1 et f est donc de classe C^2. Ainsi de suite.
S'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in]-r;r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $\lambda x \in]-r;r[$ aussi. On injecte dans l'équation (E) et on obtient la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+1)a_{n+1} - \alpha a_n - \lambda^n a_n\big) = 0$ donc, en identifiant : $\forall n \geqslant 0,\ a_{n+1} = \dfrac{\alpha + \lambda^n}{n+1}$.
Réciproquement, si on pose $a_n = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{\alpha + \lambda^k}{k+1}$, la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est de rayon $+\infty$ s'il existe k tel que $\lambda^k = -\alpha$, car elle est alors polynomiale. Mais même dans le cas contraire, le rayon de cette série vaut $+\infty$ par D'ALEMBERT car $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = 0$ si $x \neq 0$. En remontant les calculs f est solution de (E).
Les solutions DSE de (E) sont les fonctions de $\mathrm{Vect}(f_0)$ avec $f_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ en posant $b_n = \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{\alpha + \lambda^k}{k+1}$.
Par récurrence, on montre que si $f(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k+1)}(0) = \alpha f^{(k)}(0) + \lambda^k f^{(k)}(\lambda x)$.
Soit $a > 0$, posons $M_p = \underset{[-a;a]}{\mathrm{Max}} |f^{(p)}|$ (continuité sur un segment). D'après la relation précédente, comme $|\lambda| < 1$, on a $M_{p+1} \leqslant (|\alpha| + 1)M_p$ donc $M_p \leqslant (|\alpha| + 1)^p M_0$. D'après l'égalité de TAYLOR reste intégral et l'inégalité de la moyenne : $\forall x \in [-a;a]\ |f(x)| = \left|\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t))}{n!}\right| \leqslant \dfrac{(|\alpha| + 1)^n}{(n+1)!} M_0$. On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que la fonction f est nulle sur $[-a;a]$, donc que f est nulle sur $\mathbb{R}$.
Soit $f \in E$, posons $g = f - f(0)f_0$, $g(0) = 0$ car $f_0(0) = 1$. Ainsi, par linéarité de (E), g est aussi solution de (E) et $g(0) = 0$ donc g est nulle. On en déduit que $S_E = \mathrm{Vect}(f_0)$.

13.103 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ diagonale (les α_k sont les valeurs propres de A éventuellement répétées) telles que $A = PDP^{-1}$.
Alors, pour $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, posons $Y = P^{-1}X$: on a $Y = P^{-1}X \Longleftrightarrow X = PY$ donc X de classe C^1 si et seulement si Y de classe C^1. Posons ${}^tX = (x_1\ \cdots\ x_n)$ et ${}^tY = (y_1\ \cdots\ y_n)$ où toutes les fonctions x_k et y_k sont donc de classe C^1 si X (et donc Y) sont supposés de classe C^1. Nous avons l'équivalence :
$X' = AX = PDP^{-1}X \Longleftrightarrow P^{-1}X' = (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \Longleftrightarrow Y' = DY \Longleftrightarrow (\forall k \in [\![1;n]\!],\ y_k' = \alpha_k y_k)$.
Par conséquent : $X' = AX \Longleftrightarrow (\forall k \in [\![1;n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y_k(t) = \lambda_k e^{\alpha_k t})$ et les solutions X de ce système différentiel sont donc les $X = PY$ avec cette écriture exponentielle des coordonnées de Y.

13.104 Si y est une solution polynomiale de degré n et s'écrit $y(x) = a_n x^n + \cdots$ avec $a_n \neq 0$, alors on a $x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \Longleftrightarrow (n(n-1) + n - 1)a_n x^n + \cdots = 0$. Ainsi, $n^2 - 1 = 0$ donc $n = 1$. Par conséquent, on cherche une solution polynomiale de degré 1 sous la forme $y(x) = ax + b$. En remplaçant, on a $ax - (ax + b) = 0 \Longleftrightarrow b = 0$. Ainsi $y(x) = \lambda x$ est solution de l'équation $(E)\ :\ x^2y'' + xy' - y = 0$.
Méthode de variation de la constante, soit $\lambda : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 (où $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$), alors $y(x) = \lambda(x)x$ est solution de (E) si et seulement si $x^2(\lambda''(x)x + 2\lambda'(x)) + x(\lambda'(x)x + \lambda(x)) - \lambda(x)x = 0 \Longleftrightarrow x\lambda''(x) + 3\lambda'(x) = 0$ ou

encore ssi $\lambda'(x) = \dfrac{\mu}{x^3} \iff \lambda(x) = \dfrac{\alpha}{x^2} + \beta$ avec $-2\alpha = \mu$. Ainsi les solutions de (E) sur I sont les $y(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \beta x$.

Supposons que les rayons de convergence des deux séries sont supérieurs à $r > 0$ et que $\forall x \in]-r;r[$, on a les relations $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $x^2 g''(x) + xg'(x) - g(x) = f(x)$. On sait que $x^2 g''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1) b_n x^n$ et $xg'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n b_n x^n$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n - 1) b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En identifiant, on a $\forall n \geqslant 0$, $(n^2 - 1) b_n = a_n$ donc $a_1 = 0$ et $\forall n \neq 1$, $b_n = \dfrac{a_n}{n^2 - 1}$.

Réciproquement, si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est de rayon strictement positif R et si $a_1 = 0$, alors en posant $b_1 = 0$ et $\forall n \neq 1$, $b_n = \dfrac{a_n}{n^2 - 1}$, le rayon de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} b_n x^n$ est au moins égal à R car $b_n \underset{+\infty}{=} o(a_n)$ et en remontant les calculs on a $x^2 g''(x) + xg'(x) - g(x) = f(x)$ en posant $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Ainsi il existe une solution développable en série entière de l'équation $x^2 y'' + xy' - y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ si et seulement si $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est de rayon strictement positif et si $a_1 = 0$.

13.105 Si $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$, alors $X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ x''' \end{pmatrix}$ donc l'équation différentielle de l'énoncé se traduit par $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$. Si on en croît l'énoncé, 1 et 3 sont valeurs propres de A (et de u canoniquement associé à A) donc pas besoin de calculer le polynôme caractéristique. $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ et $v_1 = (1,1,1) \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$ car visiblement la somme des trois colonnes de $A - I_3$ est nulle. De même $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = (1,3,9) \in \mathrm{Ker}(A - 3I_3)$. Il ne reste qu'à trouver un vecteur v_2 tel que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que $u(v_2) = v_1 + v_2$ (ce qu'indique la matrice T si on doit avoir $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$). On cherche donc un vecteur colonne V tel que $(A - I_3)V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient simplement. Ainsi en posant $v_2 = (-1, 0, 1)$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et comme $u(v_1) = v_1$, $u(v_2) = v_1 + v_2$ et $u(v_3) = 3v_3$ par construction, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$ donc A et T sont semblables : $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Alors on résout $X' = AX = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = (P^{-1}X)' = T(P^{-1}X) \iff Y' = TY$ en posant $Y = P^{-1}X$.
Si ${}^tY = (y_1\ y_2\ y_3)$, alors $Y' = TY \iff (y_3' = 3y_3,\ y_2' = y_2$ et $y_1' = y_1 + y_2)$. Ceci se résout simplement : $y_3(t) = \lambda_3 e^{3t}$, $y_2(t) = \lambda_2 e^t$ et $y_1(t) = (\lambda_2 t + \lambda_1)e^t$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ or on connaît la relation $X = PY$ donc $x(t) = y_1(t) - y_2(t) + y_3(t) = (\lambda_2 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^t + \lambda_3 e^{3t}$.

Réciproquement si $x(t) = (at + b)e^t + ce^{3t}$, on reporte dans l'équation et x est bien solution (faire les calculs).

Les solutions de cette équation sont donc les fonctions $x : t \mapsto (at + b)e^t + ce^{3t}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

13.106 **a.** Posons $a_n = \dfrac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} > 0$. Soit un réel $x \neq 0$, alors $\left| \dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} \right| = \left| \dfrac{(n+1)x^2}{2n+3} \right|$ ce qui montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} \right| = \dfrac{x^2}{2} = \ell$ et on a deux cas avec la règle de D'ALEMBERT :

- si $|x| < \sqrt{2}$, alors $\ell < 1$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ converge absolument donc $R \geqslant \sqrt{2}$.
- si $|x| > \sqrt{2}$, alors $\ell > 1$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ diverge grossièrement donc $R \leqslant \sqrt{2}$.

Ainsi, $R = \sqrt{2}$. On pouvait aussi écrire $a_n = \dfrac{n! 2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n) \times (2n+1)} = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$ et, avec STIRLING, avoir $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^n (2\pi n) n^{2n} e^{2n}}{e^{2n} (2n) \sqrt{4\pi n} (2n)^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{n}}$ et conclure par croissances comparées que la suite $(a_n x^{2n})_{n \geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant \sqrt{2}$ car, si $x \neq 0$, $a_n x^{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \Big(\dfrac{x}{\sqrt{2}} \Big)^{2n}$.

b. Pour $x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$, en écrivant que $(x^2-2)f'(x) + xf(x) + 2 = x^2 f'(x) - 2f'(x) + xf(x) + 2$, on a la relation $(x^2-2)f'(x) + xf(x) + 2 = 2 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n+2} - 2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$. Comme $a_0 = 1$ et que $2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} = 2a_0 + 2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n+3) a_{n+1} x^{2n+2}$ en changeant d'indice, cela devient, puisque $2 - 2a_0 = 0$, $(x^2-2)f'(x) + xf(x) + 2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big[(2n+1)a_n - 2(2n+3)a_{n+1} + a_n \big] x^{2n+2} = 0$ en regroupant les termes. Or, $(2n+1)a_n - 2(2n+3)a_{n+1} + a_n = (2n+2) \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!} - 2(2n+3) \dfrac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)(2n+2)!}$ donc $(2n+1)a_n - 2(2n+3)a_{n+1} + a_n = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \Big(2n+2 - 2(n+1) \Big) = 0$. Ainsi, $(x^2-2)f'(x) + xf(x) + 2 = 0$.

c. Comme $x \mapsto \dfrac{x}{2-x^2}$ admet pour primitive $x \mapsto -\dfrac{1}{2} \ln(2-x^2)$ sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$, les solutions de l'équation homogène (E_0) : $(x^2-2)y' + xy = 0$ sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ sont les $y : x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On utilise maintenant la méthode de variation de la constante pour chercher les solutions de (E) sous la forme $y = \dfrac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}}$ avec λ dérivable sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$. En ré-injectant dans (E), on a l'équation

$$(x^2-2) \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{2-x^2}} + (x^2-2) \frac{x\lambda(x)}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} + x \frac{\lambda(x)}{\sqrt{2-x^2}} + 2 = 0 \iff \lambda'(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Il suffit d'écrire $\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(x^2/2)}} = 2 \dfrac{(1/\sqrt{2})}{\sqrt{1-(x^2/2)}}$ pour voir que $\lambda : x \mapsto 2\,\mathrm{Arcsin}\,\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)$ convient.

Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2 \dfrac{\mathrm{Arcsin}\,\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)}{\sqrt{2-x^2}}$ est une solution particulière de (E). Par théorème de structure, les solutions de (E) sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ sont les $y : x \mapsto \dfrac{\Big(2\,\mathrm{Arcsin}\,\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big) + \alpha \Big)}{\sqrt{2-x^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. D'après **b.**, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$, $f(x) = \dfrac{\Big(2\,\mathrm{Arcsin}\,\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big) + \beta \Big)}{\sqrt{2-x^2}}$. Comme $f(0) = 0$, $\beta = 0$ et $f(x) = 2 \dfrac{\mathrm{Arcsin}\,\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)}{\sqrt{2-x^2}}$.

13.107 L'existence et l'unicité de cette décomposition s'obtient par analyse/synthèse (classique en sup.) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit donc $f(x) = p(x) + i(x)$ avec $p : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ paire et $i : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ impaire.

De plus, f est dérivable sur I si et seulement si p et i le sont.
Si f solution de (E) sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 : $2x(p'(x)+i'(x))-2(p(-x)+i(-x)) = \dfrac{x}{x^2+1}$ donc $2xp'(x)+2xi'(x)-2p(x)+2i(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \iff 2xp'(x)-2p(x) = -2xi'(x)-2i(x)+\dfrac{x}{x^2+1}$. Comme p est paire, p' est impaire ; de même i est impaire donc i' est paire. Ainsi, $x \mapsto 2xp'(x)-2p(x)$ est paire et $x \mapsto -2xi'(x)-2i(x)+\dfrac{x}{x^2+1}$ est impaire. Ces deux fonctions sont donc nulles car les deux sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires. Alors :

- $xp'(x)-p(x) = 0 \iff \big(\forall x > 0,\ p(x) = \alpha_1 x \text{ et } \forall x < 0,\ p(x) = \alpha_2 x\big)$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ mais comme p est une fonction paire par hypothèse, ceci impose : $p = 0$.
- $xi'(x)+i(x) = \dfrac{x}{2(x^2+1)} \iff \left(\forall x > 0,\ i(x) = \dfrac{\beta_1}{x}+\dfrac{\ln(x^2+1)}{4x} \text{ et } \forall x < 0,\ i(x) = \dfrac{\beta_2}{x}+\dfrac{\ln(x^2+1)}{4x}\right)$ avec $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ par la méthode de variation de la constante.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{4x} = 0$, le raccord en 0 impose $\beta_1 = \beta_2 = 0$ donc la seule solution de cette équation définie sur $\mathbb{R}$ est $y : x \mapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{4x}$.

13.108 Comme $\mathrm{Tr}\,(A(t)) = 2$ et $\det(A(t)) = 1-t^2$, $\chi_{A(t)} = X^2-2X+1-t^2 = (X-1-t)(X-1+t)$.

- Si $t = 0$, $\mathrm{Sp}(A(0)) = \{1\}$ et, comme $A(0) \neq I_2$, $A(0)$ n'est pas diagonalisable.
- Si $t \neq 0$, $\chi_{A(t)}$ est scindé à racines simples donc $A(t)$ est diagonalisable, et en résolvant deux petits systèmes, on trouve que $E_{1+t}(A(t)) = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $E_{1-t}(A(t)) = \mathrm{Vect}(u_2)$ avec $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (2,1)$. Alors $A = PD(t)P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D(t) = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}$.

$Y' = A(t)Y$ équivaut à $Y' = PD(t)P^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = (P^{-1}Y)' = D(t)(P^{-1}Y) \iff Z' = D(t)Z$ en posant $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. On résout $u' = (1+t)u$ et $v' = (1-t)v$ et on trouve $u = \alpha e^{t+\frac{t^2}{2}}$ et $v = \beta e^{t-\frac{t^2}{2}}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi les solutions Y de $Y' = A(t)Y$ sont les $Y = PZ = \begin{pmatrix} \alpha e^{t+\frac{t^2}{2}} + 2\beta e^{t-\frac{t^2}{2}} \\ \alpha e^{t+\frac{t^2}{2}} + \beta e^{t-\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

13.109 $\dfrac{3x+c}{x(x+1)} = \dfrac{c}{x}+\dfrac{3-c}{x+1}$ donc les solutions de (E_c) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $y : x \mapsto \lambda x^c(x+1)^{3-c}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
ϕ va bien de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ car ϕ est linéaire et $\phi(1) = -3X$, $\phi(X) = -X^2+X$, $\phi(X^2) = -X^3+2X^2$ et $\phi(X^3) = 3X^3$ donc la matrice de ϕ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Comme M est diagonale à termes diagonaux distincts deux à deux donc ϕ est diagonalisable et les valeurs propres de ϕ sont $0, 1, 2, 3$ et, pour $c \in [\![0;3]\!]$, $\phi(P) = cP$ si et seulement la fonction P est solution de (E_c) donc une base de vecteurs propres est $((X+1)^3, X(X+1)^2, X^2(X+1), X^3)$.

13.110 **a.** Analyse : soit $r > 0$ et $y :]-r;r[\to \mathbb{R}$ solution de (E) telle que $\forall x \in]-r;r[,\ y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors, $x^2y(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n$, $xy'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_nx^n$ et $x^2y''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n$. En remplaçant dans l'équation :

$$\forall x \in]-r;r[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n + 6\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n = -1.$$

On déduit par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière (ici on a bien $r > 0$) que $6a_0 = -1$, $12a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2,\ (n(n-1)+6n+6)a_n = a_{n-2} \iff (n+2)(n+3)a_n = a_{n-2}$. Ainsi, par deux récurrences faciles, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = -\dfrac{1}{(2n+3)!}$ donc $y(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}$ puisque $a_0 = a_{2.0} = -\dfrac{1}{(2.0+3)!} = -\dfrac{1}{3!} = -\dfrac{1}{6}$ (la formule marche aussi pour $n = 0$).

Synthèse : la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}$ a un rayon $R = +\infty$ car, par croissances comparées, la suite $\left(\dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée pour tout réel x (on peut aussi utiliser D'ALEMBERT). On peut donc définir $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $y(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}$ et vérifier en remontant les calculs que y est bien solution de (E).
En conclusion, il existe une unique solution de (E) développable en série entière et il s'agit de $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ y(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!} = -\dfrac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \dfrac{x - \mathrm{sh}\,(x)}{x^3}$.
b. La présence du x^3 au dénominateur nous incite à effectuer un changement de fonction inconnue ! Pour $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on définit $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $z(x) = x^3 y(x)$. Alors z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $z'(x) = 3x^2y(x) + x^3y'(x)$ et $z''(x) = 6xy(x) + 6x^2y'(x) + x^3y''(x)$, on a l'équivalence suivante : $x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1 \iff x^3y'' + 6x^2y' + (6x - x^3)y = -x \iff z'' - z = -x\ \ (F)$. Comme $z = x$ est clairement une solution particulière de (F) et que les solutions de $z'' - z = 0$ sont les fonctions $x \mapsto ae^x + be^{-x}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on en déduit par structure de l'ensemble des solutions de (E) que les solutions de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $z : x \mapsto ae^x + be^{-x} + x$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On fait de même sur $\mathbb{R}_-^*$ avec le même résultat. Ainsi, les solutions de (E) sur $I_2 = \mathbb{R}_+^*$ sont les $y : x \mapsto \dfrac{a_2e^x + b_2e^{-x} + x}{x^3}$ avec $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions de (E) sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ sont les $y : x \mapsto \dfrac{a_1e^x + b_1e^{-x} + x}{x^3}$ avec $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$.
c. Analyse : si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions à I_1 et à I_2 sont des solutions de (E) sur ces intervalles donc sont de la forme des solutions de la question **b.**. Ainsi, il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\forall x < 0,\ y(x) = \dfrac{a_1e^x + b_1e^{-x} + x}{x^3}$ et $\forall x > 0,\ y(x) = \dfrac{a_2e^x + b_2e^{-x} + x}{x^3}$.

- Or y est continue en 0 et on sait même que $y(0) = -\dfrac{1}{6}$ car $0^2.y''(0) + 6.0.y'(0) + (6 - 0^2)y(0) = -1$. y ne peut être continue, puisque le dénominateur x^3 tend vers 0 en 0, que si le numérateur fait de même, en 0^+ et en 0^-. Ceci impose donc $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 0$.
- Avec ces conditions, par exemple si $x > 0$, comme $b_2 = -a_2$, on a $y(x) = \dfrac{2a_2\mathrm{sh}\,(x) + x}{x^3} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{2a_2 + 1}{x^2}$ si $2a_2 + 1 \neq 0$ ce qui contredit la continuité de y en 0. Ainsi, $a_2 = -\dfrac{1}{2}$.

De même, on trouve que $a_1 = -b_1 = -\dfrac{1}{2}$ et on en déduit que $y(x) = \dfrac{x - \mathrm{sh}\,(x)}{x^3}$ si $x \neq 0$ et $y(0) = -\dfrac{1}{6}$.
Synthèse : réciproquement, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par ces relations est la fonction de la question **a.** car $a_0 = -\dfrac{1}{6}$ et on a déjà vu qu'elle était deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière sur cet intervalle.
Conclusion : il existe donc une seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ donnée par $y(x) = \dfrac{x - \mathrm{sh}\,(x)}{x^3}$ si $x \neq 0$ et $y(0) = -\dfrac{1}{6}$.

13.111 **a.** On sait que $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sont DSE avec un rayon 1 donc f est aussi DSE avec un rayon au moins égal à 1 par produit de CAUCHY.
b. On dérive f et on trouve $\forall x \in]-1;1[,\ (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ par calculs.
c. On note $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ ce développement en série entière car f est impaire. Alors on a : $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)a_{n-1}x^{2n-2}$ donc $x^2f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)a_{n-1}x^{2n}$

et $xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n}$ d'où, en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient : $a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((2n+1)a_n - (2n-1)a_{n-1} - a_{n-1})x^{2n} = 1$ donc $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}$. Par récurrence, on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ et on vérifie que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ donc f est bien DSE avec un rayon $R = 1$ et on a $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.