TD 21 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 14 mars 2025**

21.1 <u>*OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 247I*</u>

a. Trouver les fonctions développables en séries entières solutions de $(E)\ :\ x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1$.

b. Exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ à l'aide de fonctions usuelles.

c. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

21.2 <u>*ENS Cachan PSI 2017*</u> Corentin Gatellier I

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|dt$ converge et l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + gy = 0$.

a. Montrer que si y est une solution bornée de (E), alors y' tend vers 0 en $+\infty$.

b. Soit y_1 et y_2 des solutions bornées de (E). Montrer que $y_1y_2' - y_2y_1' = 0$.

c. Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

21.3 <u>*Mines PSI 2017*</u> Iñigo Saez-Casares II

Déterminer $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in]0;1[,\ f(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}dt$.

21.4 <u>*CCP PSI 2017*</u> Claire Meunier I Soit le système différentiel $(S)\ :\ \begin{cases} x' = & 3x + 2y \\ y' = & -2x - y \end{cases}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Trigonaliser A et en déduire la résolution du système (S).

21.5 <u>*Centrale Maths1 PSI 2019*</u> Thomas Brémond Soit un réel a et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit deux fonctions $u, v : [a;+\infty[\to \mathbb{R}_+$ de classe C^0 et $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C + \displaystyle\int_a^t u(s)v(s)ds$.

Montrer que $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C\exp\left(\displaystyle\int_a^t v(s)ds\right)$.

b. Soit $X : [a;+\infty[\to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^1. On note $||.||$ la norme infinie et on suppose qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que $\forall t \geqslant a,\ ||X'(t)|| \leqslant k||X(t)||$. Montrer que $\forall t \geqslant a,\ ||X(t)|| \leqslant ||X(a)||e^{k(t-a)}$.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $k \geqslant 0$ telle que pour toutes solutions X et Y de l'équation $(E)\ :\ U' = AU$ d'inconnue $U : [a;+\infty[\to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe C^1, $\forall t \geqslant a,\ ||X(t)-Y(t)|| \leqslant ||X(a)-Y(a)||e^{k(t-a)}$.

21.6 <u>*Mines PSI 2021*</u> Paul Jaïs II

a. Résoudre $(E)\ :\ x^2y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

21.7 <u>*Mines PSI 2021*</u> Guillaume Touly I Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

a. Résoudre $(E)\ :\ y' + fy = g$ avec $y(a) = b$. Y a-t-il unicité de la solution ?

b. Soit $\alpha > 0$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Résoudre $(E)\ :\ y' - \alpha y = h$. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui soit bornée sur $\mathbb{R}_+$.

21.8 *CCINP PSI 2021* Esteban Poupinet I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et telle que f soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.

a. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f' et f'' sont développables en série entière.

b. Montrer qu'il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$.

c. En déduire une solution de (E) sur $]-1;1[$.

d. Puis toutes les solutions de (E) sur $]-\infty;0[$, $]0;1[$ et $]1;+\infty[$.

21.9 *Mines-Télécom PSI 2021* Margot Reungoat II (sur 14 points) Soit $(E)\ :\ y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$.

a. Montrer que $y_0 : x \mapsto \sin(x)\int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $y : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}dt$.

c. Montrer que $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

d. Soit deux fonctions $a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ayant des limites finies ℓ_a et ℓ_b respectivement en $+\infty$. Montrer que $f : x \mapsto a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$.

e. En déduire la solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie en $+\infty$.

21.10 *X PSI 2023* Paul Picard II Soit l'équation $(E)\ :\ f(x) = f'(1/x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Trouver $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^4$ tel que $f : x \mapsto ax^\alpha + bx^\beta$ soit solution réelle non nulle de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Que dire de l'ensemble S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$?

c. Caractériser entièrement S.

21.11 *Centrale Maths1 PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier On considère $(E)\ :\ y' = 2xy + 1$ et $y(0) = 0$.

a. Justifier qu'il existe une unique solution f de (E) définie sur $\mathbb{R}$ et que f est impaire.

b. Trouver le développement en série entière de f sur $\mathbb{R}$.

c. Donner une expression de f sous forme intégrale.

d. En déduire un autre développement en série entière de f.

21.12 *Centrale Maths1 PSI 2023* Rémi Darrieumerle

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une solution sur I de l'équation $(E)\ :\ y' = y^2 + y + 1$.

a. Montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+u+1}$ et déterminer sa valeur.

b. Montrer que I est borné.

c. Trouver une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

21.13 *Mines PSI 2023* Arthur Biot II

Déterminer toutes les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$.

21.14 *Mines PSI 2023* Antoine Jeanselme I Soit l'équation $(E)\ :\ x^2y'' - 2y = 3x^2$.

a. Trouver les solutions polynomiales de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

c. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

21.15 *CCINP PSI 2023* Chloé Vagner II Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer χ_M. M est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

b. Résoudre le système $\begin{cases} x' = & 4x - 3x + 3z \\ y' = & 5x - 3y + 4z \\ z' = & -x + 2y - z \end{cases}$.