TD 21 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 14 mars 2025**

21.1 **a.** Analyse : soit $r > 0$ et $y :]-r; r[\to \mathbb{R}$ solution de (E) telle que $\forall x \in]-r; r[,\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors, $x^2 y(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n$, $xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ et $x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$. En remplaçant dans l'équation :

$$\forall x \in]-r; r[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = -1.$$

On déduit par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière (ici on a bien $r > 0$) que $6a_0 = -1$, $12a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2,\ (n(n-1) + 6n + 6) a_n = a_{n-2} \iff (n+2)(n+3) a_n = a_{n-2}$. Ainsi, par deux récurrences faciles, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = -\dfrac{1}{(2n+3)!}$ donc $y(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}$ puisque $a_0 = a_{2.0} = -\dfrac{1}{(2.0+3)!} = -\dfrac{1}{3!} = -\dfrac{1}{6}$ (la formule marche aussi pour $n = 0$).

Synthèse : la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}$ a un rayon $R = +\infty$ car, par croissances comparées, la suite $\left(\dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}\right)_{n \geqslant 0}$ est bornée pour tout réel x (on peut aussi utiliser D'ALEMBERT). On peut donc définir $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $y(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}$ et vérifier en remontant les calculs que y est bien solution de (E).

En conclusion, il existe une unique solution de (E) développable en série entière et il s'agit de $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ y(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!} = -\dfrac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \dfrac{x - \mathrm{sh}\,(x)}{x^3}$.

b. La présence du x^3 au dénominateur nous incite à effectuer un changement de fonction inconnue ! Pour $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on définit $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $z(x) = x^3 y(x)$. Alors z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $z'(x) = 3x^2 y(x) + x^3 y'(x)$ et $z''(x) = 6xy(x) + 6x^2 y'(x) + x^3 y''(x)$, on a l'équivalence suivante : $x^2 y'' + 6xy' + (6 - x^2) y = -1 \iff x^3 y'' + 6x^2 y' + (6x - x^3) y = -x \iff z'' - z = -x \ \ (F)$. Comme $z = x$ est clairement une solution particulière de (F) et que les solutions de $z'' - z = 0$ sont les fonctions $x \mapsto ae^x + be^{-x}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on en déduit par structure de l'ensemble des solutions de (E) que les solutions de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $z : x \mapsto ae^x + be^{-x} + x$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On fait de même sur $\mathbb{R}_-^*$ avec le même résultat. Ainsi, les solutions de (E) sur $I_2 = \mathbb{R}_+^*$ sont les $y : x \mapsto \dfrac{a_2 e^x + b_2 e^{-x} + x}{x^3}$ avec $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions de (E) sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ sont les $y : x \mapsto \dfrac{a_1 e^x + b_1 e^{-x} + x}{x^3}$ avec $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$.

c. Analyse : si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions à I_1 et à I_2 sont des solutions de (E) sur ces intervalles donc sont de la forme des solutions de la question **b.**. Ainsi, il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\forall x < 0,\ y(x) = \dfrac{a_1 e^x + b_1 e^{-x} + x}{x^3}$ et $\forall x > 0,\ y(x) = \dfrac{a_2 e^x + b_2 e^{-x} + x}{x^3}$.

- Or y est continue en 0 et on sait même que $y(0) = -\dfrac{1}{6}$ car $0^2.y''(0) + 6.0.y'(0) + (6 - 0^2) y(0) = -1$. y ne peut être continue, puisque le dénominateur x^3 tend vers 0 en 0, que si le numérateur fait de même, en 0^+ et en 0^-. Ceci impose donc $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 0$.
- Avec ces conditions, par exemple si $x > 0$, comme $b_2 = -a_2$, on a $y(x) = \dfrac{2a_2 \mathrm{sh}\,(x) + x}{x^3} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{2a_2 + 1}{x^2}$

si $2a_2+1 \neq 0$ ce qui contredit la continuité de y en 0. Ainsi, $a_2 = -\dfrac{1}{2}$.

De même, on trouve que $a_1 = -b_1 = -\dfrac{1}{2}$ et on en déduit que $y(x) = \dfrac{x - \mathrm{sh}\,(x)}{x^3}$ si $x \neq 0$ et $y(0) = -\dfrac{1}{6}$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par ces relations est la fonction de la question **a.** car $a_0 = -\dfrac{1}{6}$ et on a déjà vu qu'elle était deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière sur cet intervalle.

<u>Conclusion</u> : il existe donc une seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ donnée par $y(x) = \dfrac{x - \mathrm{sh}\,(x)}{x^3}$ si $x \neq 0$ et $y(0) = -\dfrac{1}{6}$.

21.2 **a.** Si y est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |g(t)y(t)| \leqslant ||y||_{\infty,\mathbb{R}_+}|g(t)|$ donc gy est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par théorème de comparaison et on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)y(t)dt$ converge. Ainsi, $\displaystyle\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x g(t)y(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Mais comme $\displaystyle\int_0^x y''(t)dt = y'(x) - y'(0)$ ceci implique que y' admet une limite finie en $+\infty$. Si on avait par exemple $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y'(t) = \ell > 0$, alors $\exists x_0 \geqslant 0,\ \forall x \geqslant x_0,\ y'(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$. On obtiendrait alors par le théorème des accroissements finis : $\forall x \geqslant x_0,\ y(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}(x - x_0) + y(x_0)$ ce qui amènerait $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ ce qui est absurde. De même, on ne peut pas avoir $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) < 0$. Par conséquent, si y est une solution bornée de (E), alors y' tend vers 0 en $+\infty$.

b. Avec ces hypothèses, posons la fonction $z = y_1y_2' - y_2y_1'$. Alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit. On dérive $z' = y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_2y_1'' = gy_1y_2 - gy_1y_2 = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, z est constante sur $\mathbb{R}$. Or d'après la question **a.**, y_1, y_2 sont bornées donc y_1' et y_2' tendent vers 0 en $+\infty$. Par produit et somme, z tend donc vers 0 en $+\infty$ ce qui implique que $z = y_1y_2' - y_2y_1'$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

c. Supposons que (E) n'admette que des solutions bornées. Comme on sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2, il existe une base (y_1, y_2) constituée de solutions bornées de (E). Alors, d'après la question **b.** : $\forall t \in \mathbb{R},\ y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = 0$ (c'est le wronskien de ces deux solutions). On en déduit par exemple que $\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = 0$ ce qui implique que les vecteurs non nuls $(y_1(0), y_1'(0))$ et $(y_2(0), y_2'(0))$ sont colinéaires. En effet, si on avait $(y_1(0), y_1'(0)) = (0,0)$, alors y_1 vérifierait $y'' + gy_1 = 0$ avec $y_1(0) = y_1'(0)$ et ce serait la fonction nulle d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz : NON !

Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}^*$ telle que $(y_2(0), y_2'(0)) = \lambda(y_1(0), y_1'(0))$. Par conséquent, $y = y_2 - \lambda y_1$ est solution de (E) et vérifie $y(0) = y'(0) = 0$ ce qui implique $y = 0$ d'après l'unicité dans Cauchy-Lipschitz. Or $y_2 = \lambda y_1$ est contradictoire avec le fait que (y_1, y_2) est libre.

Par l'absurde, on a donc montré l'existence de solutions de (E) non bornées. Mieux, on vient de montrer que les solutions bornées de (E) constitue tout au plus une droite dans le plan des solutions de (E).

21.3 Pour $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ continue, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur $[1-x;1]$ si $x \in]0;1[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1-x}^1 \dfrac{f(t)}{t}dt$ existe et le problème est bien posé. Par linéarité, l'ensemble des fonctions f solutions est un espace vectoriel.

<u>Analyse</u> : soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0;1[,\ f(x) = \displaystyle\int_{1-x}^1 \dfrac{f(t)}{t}dt$, comme $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0;1[$, le théorème fondamental de l'intégration montre que $\forall x \in]0;1[,\ f'(x) = -(-1)\dfrac{f(1-x)}{1-x}$ (1). Ainsi, la fonction f est de classe C^1 sur $]0;1[$. On dérive l'expression $(1-x)f'(x) - f(1-x) = 0$ pour avoir $-f'(x) + (1-x)f''(x) + f'(1-x) = 0$. Or l'équation (1) évaluée en $1-x$ donne $xf'(1-x) = f(x)$ (car

$1-(1-x)=x$) qu'on reporte dans la précédente pour obtenir l'équation du second ordre vérifiée par f : $(E) : -xf'(x)+x(1-x)f''(x)+xf'(1-x)=x(1-x)f''(x)-xf'(x)+f(x)=0$.

Supposons que y solution de (E) soit développable en série entière, alors il existe $r\in]0;1]$ tel que l'on ait $\forall x\in]0;r[,\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. On dérive terme à terme : $xf'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}na_nx^n$ et $x^2f''(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n$ et $xf''(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$. On reporte dans (E) et on identifie les coefficients (car $r>0$) et on a $a_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ na_{n+1}=(n-1)a_n$ donc $\forall n\geqslant 2,\ a_n=0$. On trouve donc que $f(x)=a_1x$ (ce qu'on pouvait voir instantanément). On effectue une variation de la constante pour trouver les solutions de (E) non développables en série entière : $y=\lambda x$ avec λ deux fois dérivable sur $]0;1[$. On reporte dans (E) et on obtient $\forall x\in]0;1[,\ x(1-x)\lambda''+(2-3x)\lambda'=0$. Comme $x\mapsto x(1-x)$ ne s'annule pas sur $]0;1[$ et qu'une primitive de $a : x\mapsto \dfrac{2-3x}{x(1-x)}=\dfrac{2(1-x)-x}{x(1-x)}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{1-x}$ sur $]0;1[$ est $A : x\mapsto 2\ln(x)+\ln(1-x)$, on a d'après le cours : $\lambda'=\alpha e^{-2\ln(x)-\ln(1-x)}=\dfrac{\alpha}{x^2(1-x)}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Comme $\dfrac{1}{x^2(1-x)}=\dfrac{1-x+x}{x^2(1-x)}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x(1-x)}$ donc $\dfrac{1}{x^2(1-x)}=\dfrac{1-x+x}{x(1-x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{1-x}$, on intègre (sur l'intervalle $]0;1[$) et on trouve la relation $\forall x\in]0;1[,\ \lambda=\alpha\ln(x)-\dfrac{\alpha}{x}-\alpha\ln(1-x)+\beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Les solutions de l'équation homogène linéaire du second ordre (E) sur $]0;1[$ sont les $y : x\mapsto \alpha(x\ln(x)-1-x\ln(1-x))+\beta x=\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $y_1 : x\mapsto x\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)-1$ et $y_2 : x\mapsto x$. La fonction f est donc de cette forme mais elle est continue en 1 donc, comme $\lim\limits_{x\to1^-}y_1(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}y_2(x)=1$, cela impose $\alpha=0$. Ainsi, $f : x\mapsto\beta x$.

Synthèse : si $f : x\mapsto\beta x$, alors f est continue sur $]0;1]$ et $\displaystyle\int_{1-x}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{1-x}^{1}\beta dt=\beta(1-(1-x))=\beta x=f(x)$ pour tout réel $x\in]0;1]$, donc f est solution.

Conclusion : les solutions cherchées sont donc toutes les fonctions proportionnelles à $x\mapsto x$.

21.4 Le système équivaut à $X'=AX$ si ${}^tX=(x\ y)$. Or, après calculs, on trouve $\chi_A=(X-1)^2$. Ainsi 1 est d'ordre algébrique 2 dans A alors que, comme $A-I_2=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$ est de rang 1, la multiplicité géométrique de 1 vaut 1. Ainsi, A n'est pas diagonalisable. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherche une matrice inversible P telle que $A=P\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$ ce qui revient à chercher deux vecteurs v_1 et v_2 tels que $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $Av_1=v_1$ et $Av_2=v_1+v_2$. Après calculs $Av_1=v_1$ avec $v_1=2e_1-2e_2$ et $Av_2=v_1+v_2$ avec $v_2=e_1$. Comme v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $A=PTP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}2&1\\-2&0\end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. En posant $Y=P^{-1}X$, on a $Y'=P^{-1}X'$ et $X'=AX\iff X'=PTP^{-1}X\iff Y'=TY$. En posant ${}^tY=(a\ b)$, on doit donc résoudre le système plus simple (S') : $\begin{cases}a'=&a+b\\b'=&b\end{cases}$. Or $b'=b\iff(\exists\beta\in\mathbb{R},\ b=\beta e^t)$ et $a'=a+\beta e^t\iff(\exists\alpha\in\mathbb{R},\ a=\alpha e^t+\beta te^t)$. Enfin, les solutions de (S) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ telles que $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2\alpha+\beta)e^t+2\beta te^t\\-2\alpha e^t-2\beta te^t\end{pmatrix}$.

21.5 **a.** Pour avoir la majoration, il suffit de montrer que $\forall t \in [a;+\infty[,\ C + \int_a^t u(s)v(s)ds \leqslant C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$.

• Si $C > 0$, définissons donc la fonction $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{C + \int_a^t u(s)v(s)ds}{C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)}$. Comme u et v sont continues sur $[a;+\infty[$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est dérivable sur $[a;+\infty[$ et on a $\forall t \geqslant a,\ f'(t) = \dfrac{u(t)v(t)C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right) - (C + \int_a^t u(s)v(s)ds)Cv(t)\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)}{C^2\exp\left(2\int_a^t v(s)ds\right)}$ qu'on simplifie en $f'(t) = \dfrac{v(t)\Big(u(t) - (C + \int_a^t u(s)v(s)ds)\Big)}{C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)}$. D'après l'inégalité de l'énoncé, on en déduit que $\forall t \geqslant a,\ f'(t) \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $[a;+\infty[$. Mais $f(a) = 1$ donc $\forall t \geqslant a,\ f(t) \leqslant 1$ ce qui montre bien que $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C + \int_a^t u(s)v(s)ds \leqslant C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$.

• Pour $C = 0$, d'après ce qui précède, comme on a $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant \int_a^t u(s)v(s)ds \leqslant C' + \int_a^t u(s)v(s)ds$ pour tout réel $C' > 0$, on a $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C'\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$. Il suffit ensuite de faire tendre C' vers 0 à t fixé pour avoir $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant 0$. Or comme u est positive par hypothèse, on en déduit que $\forall t \geqslant a,\ u(t) = 0$.

b. Pour utiliser la question précédente, posons $u : t \mapsto ||X(t)||$, $C = ||X(a)|| \in \mathbb{R}_+$ et $v : t \mapsto k$, alors u et v sont bien positives et continues sur $[a;+\infty[$ car X et $v \mapsto ||v||$ sont continues. Par inégalité triangulaire, $\forall t \geqslant a,\ ||X(t)|| = ||X(t)-X(a)+X(a)|| \leqslant ||X(t)-X(a)||+||X(a)||$. Or $X(t)-X(a) = \int_a^t X'(s)ds$ (on intègre coordonnée par coordonnée) et $||X(t)-X(a)|| \leqslant \int_a^t ||X'(s)||ds \leqslant \int_a^t k||X(s)||ds$: avec $X(t) = (X_1(t), \cdots, X_n(t))$, $||\int_a^t X'(s)ds|| = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\left(\left|\int_a^t X_k'(s)ds\right|\right) \leqslant \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\left(\int_a^t |X_k'(s)|ds\right) \leqslant \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\left(\int_a^t ||X'(s)||ds\right) = \int_a^t ||X'(s)||ds$, ce qui montre la majoration $u(t) \leqslant C + \int_a^t u(s)v(s)ds$. Grâce à la question **a.**, on peut donc conclure que $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$, ce qui s'écrit aussi $||X(t)|| \leqslant ||X(a)||e^{k(t-a)}$.

c. Par linéarité de l'équation (E), comme X et Y sont des solutions de (E), alors $Z = X - Y$ l'est aussi. En notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, comme $Z' = AZ$, on a $\forall i \in [\![1;n]\!],\ Z_i'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j(t)$ donc, par inégalité triangulaire, $|Z_i'(t)| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}||Z_j(t)| \leqslant \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)||Z(t)||$. Comme $||Z'(t)|| = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} |Z_i'(t)|$, en notant $k = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \geqslant 0$, on a donc $\forall t \geqslant a,\ ||Z'(t)|| \leqslant k||Z(t)||$. Ainsi, d'après la question **b.**, on peut conclure que $\forall t \geqslant a,\ ||Z(t)|| \leqslant ||Z(a)||e^{k(t-a)}$, c'est-à-dire : $\forall t \geqslant a,\ ||X(t) - Y(t)|| \leqslant ||X(a) - Y(a)||e^{k(t-a)}$.

21.6 **a.** Analyse : soit $r > 0$ et $y :]0;r[\to \mathbb{R}$ (avec $r > 0$) solution de (E) et développable en série entière qu'on écrit $\forall x \in]0;r[,\ y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n-2}$ avec $r > 0$. On sait d'après le cours que y est de classe C^∞ sur $]0;r[$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}$ et $y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$.

Pour $x \in]0;r[$, y est solution de (E) donc $x^2y''(x) - 6xy'(x) + (12+x^2)y(x) = x^2y''(x) - 6xy'(x) + 12y(x) + x^2y(x)$ qu'on écrit $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n - 6\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^n + 12\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n$. Ainsi, en isolant les deux premiers

termes, $x^2y''(x)-6xy'(x)+(12+x^2)y(x) = 12a_0+12a_1x-6a_1x+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\big[n(n-1)a_n-6na_n+12a_n+a_{n-2}\big]x^n = 0$.
Par unicité du développement en série entière, $a_0 = a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2,\ n(n-1)a_n - 6na_n + 12a_n + a_{n-2} = 0$ donc $(n-3)(n-4)a_n = -a_{n-2}$. Pour $n = 2$, on a $a_2 = 0$. Pour $n \geqslant 5,\ a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n-3)(n-4)}$ donc les termes a_{2n} pour $n \geqslant 2$ dépendent de a_4 et les termes a_{2n+1} pour $n \geqslant 1$ dépendent de a_3.
On montre par une récurrence simple que $\forall n \geqslant 2,\ a_{2n} = \dfrac{(-1)^n a_4}{(2n-3)!}$ et que $\forall n \geqslant 1,\ a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}a_3}{(2n-2)!}$.
Ainsi, $y(x) = a_4\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-3)!} + a_3\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n-2)!} = a_4x^3\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n-3}}{(2n-3)!} + a_3x^3\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}$
et on reconnaît des développements usuels d'où $y(x) = a_4x^3\sin(x) + a_3x^3\cos(x)$.

Synthèse : si $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie par $y(x) = \lambda x^3\sin(x) + \mu x^3\cos(x)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, posons la fonction $z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x^3} = \lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$ qui est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vérifie classiquement $z'' + z = 0$. Calculons $z'(x) = \dfrac{y'(x)}{x^3} - 3\dfrac{y(x)}{x^4}$ et $z''(x) = \dfrac{y''(x)}{x^3} - 6\dfrac{y'(x)}{x^4} + 12\dfrac{y(x)}{x^5}$ donc $\dfrac{y''(x)}{x^3} - 6\dfrac{y'(x)}{x^4} + 12\dfrac{y(x)}{x^5} + \dfrac{y(x)}{x^3} = 0$ ce qui, en multipliant par x^5, devient $x^2y''(x) - 6xy'(x) + (12+x^2)y(x) = 0$ et y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion : Les solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $y :\mapsto \lambda x^3\sin(x) + \mu x^3\cos(x)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Comme les fonctions $x \mapsto x^3\sin(x)$ et $x \mapsto x^3\cos(x)$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ forment une famille libre, et qu'on sait que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de cette équation différentielle (E) linéaire normalisée homogène est une plan vectoriel d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a trouvé toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, elles sont donc toutes développables en série entière.

b. De même, les solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les $y :\mapsto \lambda' x^3\sin(x) + \mu' x^3\cos(x)$ avec $(\lambda',\mu') \in \mathbb{R}^2$.

Analyse : si y est solution réelle de (E) sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et à $\mathbb{R}_-^*$ sont solutions de (E) donc, avec ce qui précède, il existe $(\lambda,\mu,\lambda',\mu') \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \lambda x^3\sin(x) + \mu x^3\cos(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \lambda' x^3\sin(x) + \mu' x^3\cos(x)$. On a aussi $y(0) = 0$ en prenant $x = 0$ dans (E).

Synthèse : soit $(\lambda,\mu,\lambda',\mu') \in \mathbb{R}^4$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \lambda x^3\sin(x) + \mu x^3\cos(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \lambda' x^3\sin(x) + \mu' x^3\cos(x)$, alors y est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = y''(0) = 0$ (avec les taux d'accroissements ou parce que y est développable en série entière sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ et que ceci donne les dérivées successives à droite et à gauche en 0) donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'espace des solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 4, il s'agit de $\mathrm{Vect}(y_1,y_2,y_3,y_4)$ avec $y_1(x) = 0$ si $x \geqslant 0$ et $y_1(x) = x^3\sin(x)$ si $x < 0$, $y_2(x) = 0$ si $x \geqslant 0$ et $y_2(x) = x^3\cos(x)$ si $x < 0$, $y_3(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $y_4(x) = x^3\sin(x)$ si $x > 0$, $y_4(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $y_4(x) = x^3\cos(x)$ si $x > 0$.

21.7 **a.** Comme f et g sont continues, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $y' + fy = g$ avec $y(a) = b$. Si on note F une primitive de f, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y' + fy = 0$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-F}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto (\lambda + \int_0^x g(t)e^{F(t)}dt)e^{-F(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Parmi celles-ci, l'unique solution qui vérifie $y(a) = b$ est telle que $(\lambda + \int_0^a g(t)e^{F(t)}dt)e^{-F(a)} = b$ d'où $\lambda = be^{F(a)} - \int_0^a g(t)e^{F(t)}dt$. C'est donc la fonction $y_0 : x \mapsto (be^{F(a)} - \int_0^a g(t)e^{F(t)}dt + \int_0^x g(t)e^{F(t)}dt)e^{-F(x)}$

ce qui se simplifie par CHASLES en $y_0(x) = e^{-F(x)} \int_a^x g(t)e^{F(t)}dt + be^{F(a)-F(x)}$.

b. En prenant $f : x \mapsto -\alpha$ et $g = h$, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ donc, d'après **a.**, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $y : x \mapsto (\lambda + \int_0^x h(t)e^{-\alpha t}dt)e^{\alpha x}$. D'abord, comme $\forall t \geqslant 0,\ |h(t)e^{-\alpha t}| \leqslant ||h||_{\infty,\mathbb{R}}e^{-\alpha t} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le cours donc, par comparaison, $\int_0^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t}dt$ converge. Pour avoir y bornée sur $\mathbb{R}_+$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x} = +\infty$ car $\alpha > 0$, on doit forcément avoir une indétermination et avoir $\lambda + \int_0^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t}dt = 0$. La seule fonction candidate est $y_1 : x \mapsto -e^{\alpha x}\int_x^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t}dt$. Pour $x \geqslant 0$, par l'inégalité de la moyenne, $|y_1(x)| \leqslant ||h||_{\infty,\mathbb{R}}\, e^{\alpha x}\int_x^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = ||h||_{\infty,\mathbb{R}}e^{\alpha x}[-e^{-\alpha t}]_x^{+\infty} = ||h||_{\infty,\mathbb{R}}$.
Par conséquent, (E) possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ qui est $y_1 : x \mapsto -e^{\alpha x}\int_x^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t}dt$.

21.8 **a.** Comme f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, d'après le cours, f y est de classe C^∞ ainsi que toutes ses dérivées avec $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}$ et $f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$.
b. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = x^2f''(x) - x^3f''(x) - x^2f'(x) - xf'(x) + f(x)$ qu'on écrit $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_nx^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$. Or $n(n-1)$ est nul pour $n = 0$ ou $n = 1$ et n est nul pour $n = 0$ donc on peut faire commencer toutes ces sommes à $n = 0$. Dans la seconde et la troisième, on effectue le changement d'indice $p = n+1$ ce qui permet d'écrire $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\big[n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-1)a_{n-1} - na_n + a_n\big]x^n$.
Par conséquent, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) - f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$ avec $b_n = (n-1)^2$ puisque $n(n-1) - n + 1 = (n-1)^2$ et $(n-1)(n-2) + (n-1) = (n-1)^2$.
c. Soit f une solution développable en série entière de (E) sur $]-1;1[$, d'après la question précédente, $a_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n = a_{n-1}$ donc $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_1x^n = \dfrac{a_1x}{1-x}$ (série géométrique). Réciproquement, si on pose $y_1 : x \mapsto \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}$, on a $y_1'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $y_1''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ donc pour tout réel $x \in]-1;1[$, on obtient $x^2(1-x)y_1''(x) - x(1+x)y_1'(x) + y_1(x) = x^2(1-x) \times \dfrac{2}{(1-x)^3} - x(1+x) \times \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{x}{1-x} = 0$ d'où $x^2(1-x)y_1''(x) - x(1+x)y_1'(x) + y_1(x) = \dfrac{2x^2 - x(1+x) + x(1-x)}{(1-x)^2} = 0$: y_1 est solution de (E) sur $]-1;1[$.
d. On vient de voir qu'en fait $y_1 : x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ est solution de (E) sur chaque intervalle où (E) est sous forme normalisée, à savoir $I_1 =]-\infty;0[$, $I_2 =]0;1[$ et $I_3 =]1;+\infty[$. Effectuons une variation de la constante, cherchons les solutions de (E) sous la forme $y : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)x}{1-x} = \lambda(x)y_1(x)$ avec λ deux fois dérivable sur l'un des intervalles I_k. En remplaçant dans (E), $x^2(1-x)\lambda''(x)y_1(x) + 2x^2(1-x)\lambda'(x)y_1'(x) - x(1+x)\lambda'(x)y_1(x) = 0$ car y_1 est solution de (E) donc les $\lambda(x)$ s'éliminent. Comme $y_1(x) = \dfrac{x}{1-x}$ et $y_1'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, après simplifications, la fonction λ vérifie $(F)\ :\ x\lambda''(x) + \lambda'(x) = 0$. Les solutions sont les fonctions λ telles que $\lambda'(x) = \dfrac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ donc $\lambda(x) = a\ln(|x|) + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (E) sur l'un des trois intervalles I_k sont les fonctions $y_k : x \to \dfrac{x\big(a_k\ln(|x|) + b_k\big)}{1-x}$ avec $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$.
À détailler mais en terme de raccord, l'équation (E)

- admet comme solutions les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{bx}{1-x}$ avec $b \in \mathbb{R}$ sur $]-\infty;1[$.
- admet comme solutions les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{a\ln(x)}{1-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.
- admet sur $\mathbb{R}$ seulement la fonction nulle.

La dimension de l'espace des solutions de (E) sur I est donc :

- 2 si $I =]-\infty;0[$ ou $I =]0;1[$ ou $I =]1;+\infty[$.
- 1 si $I =]-\infty;1[$ ou $I =]0;+\infty[$.
- 0 si $I = \mathbb{R}$.

21.9 **a.** Comme les deux fonctions $t \mapsto \cos(t)e^{-\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \sin(t)e^{-\sqrt{t}}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration et par opérations, la fonction y_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a l'expression $y_0'(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \sin(x)\cos(x)e^{-\sqrt{x}} - \cos(x)\sin(x)e^{-\sqrt{x}}$ donc $y_0'(x) = \sin(x)\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \cos(x)\int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt$. De même, y_0' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a $y_0''(x) = -\sin(x)\int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt + \sin^2(x)e^{-\sqrt{x}} + \cos^2(x)e^{-\sqrt{x}} = -y_0(x) + e^{-\sqrt{x}}$ donc y_0 est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E).

b. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène $(E_0) : y'' + y = 0$, comme les solutions de l'équation caractéristique $z^2 + 1 = 0$ sont $z = \pm i$, sont les fonctions $y : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Par théorème de structure, comme on connaît une solution particulière de (E) d'après **a.** et que, par linéarité de l'intégrale, $y_0(x) = \int_0^x (\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t))e^{-\sqrt{t}}dt = \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}dt$, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}dt$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

c. La fonction $g : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et que $g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $\lim\limits_{u\to+\infty} u^4e^{-u} = 0$ par croissances comparées, la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

d. Bien sûr, si $\ell_a = \ell_b = 0$, il est clair que $f : x \mapsto a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Réciproquement, si $f : x \mapsto a(x)\cos(x)+b(x)\sin(x)$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n\pi) = \ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n a(n\pi) = \ell$ ce qui prouve que $\ell_a = \ell = 0$. De même, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n b\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \ell$ ce qui prouve que $\ell_b = \ell = 0$. Par double implication, on a bien montré que pour deux fonctions $a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ayant des limites finies ℓ_a et ℓ_b respectivement en $+\infty$, la fonction $f : x \mapsto a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$.

e. Les deux fonctions $f_1 : t \mapsto \cos(t)e^{-\sqrt{t}}$ et $f_2 : t \mapsto \sin(t)e^{-\sqrt{t}}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $|f_1(t)| \leqslant e^{-\sqrt{t}}$ et $|f_2(t)| \leqslant e^{-\sqrt{t}}$, on en déduit que f_1 et f_2 sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison avec la question **c.**. On peut écrire $y : x \mapsto \left(a - \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt\right)\cos(x) + \left(b + \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt\right)\sin(x)$ les solutions de (E) et les fonctions $x \mapsto a - \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ et $x \mapsto b + \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ admettent respectivement pour limite $\ell_a = a - \int_0^{\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ et $\ell_b = b + \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ en $+\infty$. D'après la question **d.**, la fonction y admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$ c'est-à-dire si et seulement si on a $a = \int_0^{\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ et $b = -\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt$. Ainsi, la seule fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est la fonction y_1 dont l'expression est donnée par

$y_1 : x \mapsto \Big(\int_0^{\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \int_0^{x} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt\Big)\cos(x) - \Big(\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \int_0^{x} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt\Big)\sin(x)$ qui se simplifie en $y_1(x) = \cos(x)\int_x^{\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt = \int_x^{\infty} \sin(t-x)e^{-\sqrt{t}}dt$.

21.10 **a.** Soit $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^4$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (on aurait aussi pu considérer les fonctions à valeurs complexes) définie par $f(x) = ax^{\alpha} + bx^{\beta}$. Alors, $\forall x > 0,\ f(x) - f'(1/x) = ax^{\alpha} + bx^{\beta} - (a\alpha x^{1-\alpha} + b\beta x^{1-\beta})$. Si on suppose que la fonction f est une solution réelle de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on impose $\alpha = 1 - \beta$, on obtient $\forall x > 0,\ f(x) - f'(1/x) = (a - b\beta)x^{\alpha} + (b - a\alpha)x^{\beta} = 0$. Pour que le système $\begin{cases} +a - b\beta &= 0 \\ -a\alpha + b &= 0 \end{cases}$ n'ait pas comme seule solution $a = b = 0$, on doit avoir $1 - \alpha\beta = 0$ (déterminant nul du système). Cela donne $1 - \alpha(1 - \alpha) = 1 - \alpha + \alpha^2 = 0$ ce qui donne classiquement (à l'ordre près) $\alpha = -j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = -j = \overline{\alpha} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $\forall x > 0,\ f(x) = ae^{\alpha\ln(x)} + be^{\beta\ln(x)}$, ce qui se décompose en :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(f(x)) &= \sqrt{x}\,\Big((\mathrm{Re}\,(a) + \mathrm{Re}\,(b))\cos\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big) + (\mathrm{Im}\,(b) - \mathrm{Im}\,(a))\sin\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)\Big),\\
\mathrm{Im}\,(f(x)) &= \sqrt{x}\,\Big((\mathrm{Re}\,(a) - \mathrm{Re}\,(b))\sin\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big) + (\mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Im}\,(b))\cos\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)\Big).
\end{aligned}$$

Mais comme on a pris f à valeurs réelles, ceci implique la condition $\mathrm{Re}\,(a) - \mathrm{Re}\,(b) = \mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Im}\,(b) = 0$ car les fonctions $x \mapsto \sin\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)$ et $x \mapsto \cos\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)$ forment une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, c'est-à-dire $b = \overline{a}$ comme on pouvait s'y attendre. On résout alors le système $\begin{cases} +a - \overline{a}\,\overline{\alpha} &= 0 \\ -a\alpha + \overline{a} &= 0 \end{cases}$ qui a par exemple comme solution non nulle $a = e^{-i\pi/6}$, $b = e^{i\pi/6}$ si on impose en plus $|a| = 1$ qui s'écrit aussi $\overline{a} = \frac{1}{a}$. La fonction $f_0 : x \mapsto e^{-i\pi/6}x^{1/2+i\sqrt{3}/2} + e^{i\pi/6}x^{1/2-i\sqrt{3}/2}$ est donc solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles. Elle s'écrit aussi, $f_0 : x \mapsto 2\sqrt{x}\ \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\Big)$.

b. La fonction nulle est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $(f, g) \in S^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et on a $\forall x > 0,\ (\lambda f + g)'(1/x) = \lambda f'(1/x) + g'(1/x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$ par hypothèse donc $\lambda f + g \in S$. On vient d'établir que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ donc que S est lui-même un espace vectoriel.

c. Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de (E), comme $\forall x > 0,\ f'(x) = f(1/x)\ \ (1)$ et que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en dérivant (1), on obtient $\forall x > 0,\ f''(x) = -\frac{f'(1/x)}{x^2} = -\frac{f(x)}{x^2}$. Ainsi, f est aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $(E')\ :\ x^2y'' + y = 0$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une autre solution de (E), alors f et f_0 sont solutions de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par linéarité de (E'), la fonction $g = f - \frac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0$ est aussi solution de (E'). De plus, $g(1) = f(1) - \frac{f(1)f_0(1)}{\sqrt{3}} = 0$ car $f_0(1) = 2\cos\big(\frac{\pi}{6}\big) = \sqrt{3}$. Mais comme f et f_0 sont solutions de (E), on a aussi $g'(1/x) = f'(1/x) - \frac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0'(1/x) = f(x) - \frac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0(x) = g(x)$ donc $g'(1) = g(1) = 0$. Par l'unicité au problème de CAUCHY, il existe une unique solution y de (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ telle que $y(1) = y'(1) = 0$, et il s'agit de la fonction nulle. Ainsi, $g = 0$ donc $f = \frac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0$. On vient de montrer que $S \subset \mathrm{Vect}(f_0)$ et on a vu en **a.**, par linéarité de (E), que $\mathrm{Vect}(f_0) \subset S$. Par double inclusion, $S = \mathrm{Vect}(f_0)$.

21.11 **a.** D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et que (E) est normalisée, il existe une unique solution f de ce problème de Cauchy (E) et cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ en entier. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -f(-x)$, alors g est dérivable par opérations car f l'est et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(-x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(-x) = 2(-x)f(-x) + 1 = 2g(x) + 1$ avec $g(0) = f(-0) = 0$ car f est solution de (E). Comme f et g sont solutions de (E), par l'unicité précédente, on a $f = g$ donc f est impaire.

b. Analyse : supposons f développable en série entière sur $\mathbb{R}$, comme f est impaire, il existe $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ et, en dérivant terme à terme (l 'intervalle ouvert de convergence est ici $\mathbb{R}$), $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n}$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{2n}$. On peut identifier par unicité des coefficients d'un développement en série entière (ici $R = +\infty$) et avoir $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{2}{2n+1}a_{n-1}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{2}{2k+1}\right)a_0 = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{4k}{(2k+1)(2k)} = \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}$ par télescopage multiplicatif et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

Synthèse : Soit $a_n = \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} = \dfrac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+2)}x^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} = 0 < 1$ et le critère de d'Alembert montre que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ converge absolument. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ vaut $+\infty$. Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. On a $h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n.n!}{(2n)!}x^{2n}$ et $2xh(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{2n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4^{n-1}.(n-1)!}{(2n-1)!}x^{2n}$ donc $h = f$ d'après l'unicité de la question **a.** car $h'(x) - 2xh(x) = \dfrac{4^0.0!}{(2.0)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{4^n.n!}{(2n)!} - \dfrac{2.4^{n-1}.(n-1)!}{(2n-1)!}\right)x^{2n} = 1$ et $h(0) = 0$.

Par analyse-synthèse, f est bien développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

c. Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E)\ :\ y' = 2xy$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{x^2}$. En écrivant $y : x \mapsto \lambda(x)e^{x^2}$ avec $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, y est solution de $(E)\ :\ y' = 2xy + 1$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{x^2} + 2x\lambda(x)e^{x^2} = 2x\lambda(x)e^{x^2} + 1$ ce qui donne, après simplification habituelle des $\lambda(x)$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = e^{-x^2}$ donc $\lambda(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt + \alpha$ avec $\alpha = \lambda(0) \in \mathbb{R}$. Ainsi, les solutions de $(E)\ :\ y' = 2xy + 1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y : x \mapsto \alpha e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Comme $f(0) = 0$, on a $\alpha = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}$ et que, puisque $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$ est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$ qui s'annule en 0, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1).n!}$. Comme les rayons de convergence de ces deux dernières séries entières sont égaux à $+\infty$, par produit de Cauchy, on a $f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(n-k)!k!(2k+1)}\right)x^{2n+1}$. Par unicité du développement en série entière, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(n-k)!k!(2k+1)}$.

Par exemple, pour $n = 2$, on a $\dfrac{16 \times 2}{120} = \dfrac{4}{15} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{10}$.

21.12 **a.** La fonction $h : u \mapsto \dfrac{1}{u^2+u+1}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $u^2+u+1 = \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ et $h(u) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$. Ainsi, $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+u+1}$ existe. De plus, classiquement, $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2du}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ ce qui montre que $I = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

b. Comme $\forall x \in I,\ \dfrac{f'(x)}{f(x)^2+f(x)+1} = 1$, en intégrant cette égalité sur un segment $[a;b] \subset I$, on a $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)^2+f(x)+1}dx = \int_a^b dx = b-a$. Or f est dérivable sur I par hypothèse et même de classe C^1 sur I car $f' = f^2+f+1$ est continue sur I. Par le changement de variable $u = f(x)$, comme f est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $[a;b]$ dans $[f(a);f(b)]$ (inutile ici car on est sur un segment), on a $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} \frac{du}{u^2+u+1} = b-a$ ce qui montre avec la question précédente que $b - a \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+u+1} < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Ceci montre bien que I est borné et on peut même affirmer que sa longueur est inférieure ou égale à $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

c. Soit $x_0 \in I$ et $x \in I$, on a comme en **a.** et **b.** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)}{f(t)^2+f(t)+1}dt = \int_{x_0}^{x} dt = x - x_0$ mais aussi, en posant $u = f(t)$ comme avant, $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)}{f(t)^2+f(t)+1}dt = \int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{du}{u^2+u+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{f(x_0)}^{f(x)}$ et on obtient $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2f(x)+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2f(x_0)+1}{\sqrt{3}}\right) = x - x_0$. Comme $\operatorname{Arctan}\left(\frac{2f(x)+1}{\sqrt{3}}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on obtient $I \subset \left]-\frac{\pi}{\sqrt{3}} + x_0 - m_0; \frac{\pi}{\sqrt{3}} + x_0 - m_0\right[= J$ avec $m_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2f(x_0)+1}{\sqrt{3}}\right)$ et, pour $x \in J$, comme $\operatorname{Arctan}\left(\frac{2f(x)+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - x_0 + m_0)$, on a $\frac{2f(x)+1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x - x_0 + m_0)\right)$ ce qui donne l'expression de la fonction f, $\forall x \in J,\ f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x - x_0 + m_0)\right) - 1\right)$.

Par exemple, si $x_0 = f(x_0) = 0$, l'unique solution maximale de $(E)\ :\ y' = y^2 + y + 1$ qui s'annule en 0 est $f : J = \left]-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}; \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)$ qui se transforme par trigonométrie en $f(x) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

donc en $f(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E), posons $g : J + a \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x-a)$, alors $\forall x \in J+a,\ x - a \in I$ donc $f'(x-a) = f(x-a)^2 + f(x-a) + 1 = g'(x) = g(x)^2 + g(x) + 1$ donc g est solution de (E) sur $J + a$. Les graphes des solutions de (E) se déduisent donc toutes de celle explicitée ci-dessus par translation de $(a, 0)$.

21.13 <u>Analyse</u> : soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+\int_0^x(x-t)f(t)dt=1$ qu'on développe, par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur des segments, en $f(x)+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=1$ (1). Comme $f_1:t\mapsto f(t)$ et $f_2:t\mapsto tf(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions $F_1:x\mapsto\int_0^x f(t)dt$ et $F_2:x\mapsto\int_0^x tf(t)dt$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par le théorème fondamental de l'intégration (ce sont les primitives de f_1 ou f_2 qui s'annulent en 0). En dérivant (1), on a $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=f'(x)+\int_0^x f(t)dt=0$ (2). On dérive à nouveau (2) pour avoir $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+f(x)=0$ (3). Comme les solutions de l'équation caractéristique $z^2+1=0$ de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre sont $z=\pm i$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (3) sont les fonctions $y:x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x)$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. En prenant $x=0$ dans (1) et (2), on a $f(0)=1$ et $f'(0)=0$ donc $A=1$ et $B=0$. Ainsi, $f=\cos$.
<u>Synthèse</u> : Soit $f=\cos$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, en posant $u(t)=x-t$ et $v(t)=\sin(t)$ dans $\int_0^x(x-t)\cos(t)dt$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $\widetilde{[0;x]}$, par intégration par parties, on a la relation souhaitée, à savoir $f(x)+\int_0^x(x-t)f(t)dt=\cos(x)+[(x-t)\sin(t)]_0^x+\int_0^x\sin(t)dt=\cos(x)+[-\cos(t)]_0^x=1$.
<u>Conclusion</u> : la seule fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+\int_0^x(x-t)f(t)dt=1$ est $f=\cos$.

21.14 **a.** Soit $n\in\mathbb{N}$ et $y:x\mapsto\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ avec $a_n\neq0$ une solution polynomiale (non nulle) de $(E_0)\ :\ x^2y''-2y=0$. Le terme de degré maximal dans la fonction polynomiale $x\mapsto x^2y''(x)-2y(x)$ est d'ordre n et il vaut $(n(n-1)a_n-2a_n)x^n=(n^2-n-2)a_nx^n=(n+1)(n-2)a_nx^n$. Ainsi, puisque $x^2y''(x)-2y(x)=0$, on a $(n+1)(n-2)a_n$ et, puisque $a_n\neq0$, $(n+1)(n-2)=0$ donc $n=2$ car $n+1>0$.
Prenons donc $y:x\mapsto a_2x^2+a_1x+a_0$, alors $y''(x)=2a_2$ donc $2a_2x^2-2a_2x^2-2a_1x-2a_0=-2a_1x-2a_0=0$ pour $x\in I$ où I est l'intervalle sur lequel on résout (E_0) et ceci équivaut à la nullité du polynôme $-2a_1X-2a_0$ donc à $a_0=a_1=0$. Les solutions polynomiales de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions $y:x\mapsto a_2x^2$.
b. Soit $I=\mathbb{R}_+^*$ ou $I=R_-^*$. Pour une fonction $y:I\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable, on définit $z:I\to\mathbb{R}$ par $z(x)=\dfrac{y(x)}{x^2}$ donc $y(x)=x^2z(x)$ (méthode de Lagrange) de sorte que z est aussi deux fois dérivable sur I et qu'on a l'équivalence, puisque $y''(x)=2z(x)+2xz'(x)+x^2z''(x)$ par la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}(\forall x\in I,\ x^2y''(x)-2y(x)=3x^2) &\iff (\forall x\in I,\ x^2(2z(x)+4xz'(x)+x^2z''(x))-2x^2z(x)=3x^2)\\ &\iff (\forall x\in I,\ 4xz'(x)+x^2z''(x)=3)\\ &\iff (\forall x\in I,\ x^2a'(x)+4xa(x)=3)\ \text{ en posant } a=z'\end{aligned}$$

Les solutions de $(F_0)\ :\ x^2y'+4xy=0$ sur I sont les fonctions $y:x\mapsto\dfrac{\lambda}{x^4}$ et, par méthode de variation de la constante, puisque $\dfrac{\lambda'}{x^2}=3$ équivaut à $\lambda:x\mapsto x^3+\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$, les solutions de $(F)\ :\ x^2y'+2xy=3$ sont les fonctions $y:x\mapsto\dfrac{x^3+\alpha}{x^4}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\alpha}{x^4}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Ainsi, y est solution de (E) sur I si et seulement si $z':x\mapsto\dfrac{1}{x}+\dfrac{\alpha}{x^4}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et donc y est solution de (E) sur I si et seulement si $z:x\mapsto\ln(|x|)-\dfrac{\alpha}{3x^3}+\beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. En conclusion, les solutions réelles de (E) sur I sont les fonctions $y:x\mapsto x^2\ln(|x|)+\dfrac{A}{x}+Bx^2$ avec $A=-\dfrac{\alpha}{3}\in\mathbb{R}$ et $B=\beta\in\mathbb{R}$.
c. <u>Analyse</u> : soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont a fortiori

des solutions de (E) donc, d'après la question précédente, il existe quatre réels A_1, A_2, B_1, B_2 tels que l'on ait $\forall x < 0,\ y(x) = x^2\ln(|x|) + \dfrac{A_1}{x} + B_1x^2$ et $\forall x > 0,\ y(x) = x^2\ln(|x|) + \dfrac{A_2}{x} + B_2x^2$. Avec $x = 0$ dans (E), $y(0) = 0$.

La continuité de y en 0 montre que $A_1 = A_2 = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2\ln(|x|) + B_1x^2) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln(|x|) + B_2x^2) = 0$.

Pour tout B_1 et tout B_2, $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^-}(x\ln(|x|) + B_1x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln(|x|) + B_2x) = 0$.

On calcule $\forall x < 0,\ y'(x) = 2x\ln(|x|) + x + 2B_1x$ et $\forall x > 0,\ y'(x) = 2x\ln(|x|) + x + 2B_2x$. Mais comme $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{y'(x)-y'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}(2\ln(|x|) + x + 2B_1) = -\infty = \lim\limits_{x\to 0^+}(2\ln(|x|) + x + 2B_2) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{y'(x)-y'(0)}{x-0}$, la fonction y n'est pas deux fois dérivable en 0.

Pas besoin de synthèse puisqu'il n'y a aucune solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

21.15 **a.** $\chi_M = \begin{vmatrix} X-4 & 3 & -3 \\ -5 & X+3 & -4 \\ 1 & -2 & X+1 \end{vmatrix} = (X-4)(X+3)(X+1) - 12 - 30 + 3(X+3) + 15(X+1) - 8(X-4)$ avec Sarrus qui se développe en $\chi_M = X^3 - 3X + 2 = (X-1)(X^2+X-2) = (X-1)^2(X+2)$.

Comme χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le cours.

Comme $M - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car les deux premières colonnes sont indépendantes et les deux dernières opposées, par la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_3)) = \dim(E_1(M)) = 1$. Cette dimension n'étant pas égale à l'ordre de multiplicité de 1 dans χ_M, M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. La matrice $M - I_3$ ci-dessus montre que $E_1(M) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (0,1,1)$. De même, comme on a $M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et que $C_1 + C_2 - C_3 = 0$ dans cette matrice, on a $E_2(M) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1,1,-1)$. On cherche un vecteur $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $Mv_2 = v_2 + v_1$ qui équivaut à $(M - I_3)v_2 = v_1$. On constate que $v_2 = (1,0,-1)$ vérifie cette condition (il y en a d'autres). Posons $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $\det(P) = 1$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et, par formule de changement de base, on a $M = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (réduction de Jordan).

Le système différentiel $\begin{cases} x' = & 4x - 3x + 3z \\ y' = & 5x - 3y + 4z \\ z' = & -x + 2y - z \end{cases}$ s'écrit $X' = MX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Pour $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, on pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors a, b, c sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$ par opérations et on a $X' = MX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff Y' = TY$. Les solutions du système $\begin{cases} a' = & a + b \\ b' = & b \\ c' = & -2c \end{cases}$ sont $b : t \mapsto \beta e^t$, $c : t \mapsto \gamma e^{-2t}$ puis, en reportant, $a : t \mapsto (\alpha + \beta t)e^t$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ donc les solutions du système de l'énoncé sont, comme $X = PY$, toujours avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $x : t \mapsto b(t) + c(t) = \beta e^t + \gamma e^{-2t}$, $y : t \mapsto a(t) + c(t) = (\alpha + \beta t)e^t + \gamma e^{-2t}$, $z : t \mapsto a(t) - b(t) - c(t) = (\alpha + \beta t)e^t - \beta e^t - \gamma e^{-2t}$.