TD 23 : FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

PSI 1 2024-2025 **mercredi 26 mars 2025**

23.1 Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note A la matrice de f dans la base canonique.
a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ (f(x)|x) > 0$.
b. Soit $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$.
Montrer que g admet des dérivées partielles en tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ et les expliciter.
c. Montrer que g admet un unique point critique noté z.
d. Montrer que g admet un minimum absolu en z.

23.2 Soit S la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$.
a. Quels sont les points singuliers de S ?
b. Déterminer l'intersection de S et du plan d'équation $z = 0$. Trouver une équation du plan tangent à S en chaque point de cette intersection.

23.3 Soit S la surface d'équation $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$.
Déterminer les plans tangents à S et parallèles au plan P d'équation $x + 4y + 6z = 0$.

23.4 *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 195 I*
Résoudre l'équation $(E)\ :\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = -(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Indication : on pourra passer en coordonnées polaires.

23.5 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 174 I* Extrema de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

23.6 *Centrale Maths1 PSI 2015* Alberto Alonso
a. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $a > 0$ tels que $\forall t \geqslant 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx,ty) = t^a f(x,y)$.
Montrer que f vérifie l'équation aux dérivées partielles : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = af$.
b. Réciproquement, soit f vérifiant pour un réel $a > 0$ l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = af$ sur $\mathbb{R}^2$, montrer que $\forall t \geqslant 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx,ty) = t^a f(x,y)$.
c. Trouver les fonctions de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vérifiant $(E)\ :\ x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4+y^4}$.

23.7 *Mines PSI 2015* Alberto Alonso

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$.

a. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
b. Donner les dérivées partielles de f lorsque c'est possible.
c. Étudier la continuité des dérivées partielles.

23.8 *ENS Cachan PSI 2016* Samuel Cailleaux Soit A, B deux évènements d'un univers probabilisé Ω et l'inégalité $\left|P(A\cap B) - P(A)P(B)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$ (1). Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y,z) = x(1-x-y-z) - yz$, la partie $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x+y+z \leqslant 1\}$ et F la frontière de K.
a. Démontrer (1) dans le cas où $A \cup B = \Omega$ et A et B incompatibles.
b. Démontrer (1) si A et B sont incompatibles uniquement.
c. Dessiner F. Encadrer de façon optimale h sur F.
d. Prouver que $|h(x,y,z)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour $(x,y,z) \in K$.
e. Démontrer (1) dans le cas général.

23.9 *Mines PSI 2017 (2) et 2021 et CCINP PSI 2023*

Vincent Bouget III et Vincent Meslier II et Baptiste Pozzobon II et Maddie Bisch II

Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $H(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $H(0,0) = 0$.

La fonction H est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

23.10 *ENS Cachan PSI 2021* Julien Gombert et Quentin Granier

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et une fonction $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\forall x \in [a;b],\ v(x) = (x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in U$. Soit aussi une fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(a) = g(b) = 0$. On pose, pour un réel t et $x \in [a;b]$, $\varphi_t(x) = \varphi(x) + tg(x)$ et $v_t(x) = (x, \varphi_t(x), \varphi_t'(x))$. On pose aussi $I_{\varphi_t} = \displaystyle\int_a^b f(v_t(x))dx$.

a. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [-\alpha;\alpha],\ v_t(x) \in U$.

b. Montrer que $h : t \mapsto I_{\varphi_t}$ est dérivable en 0 et que $h'(0) = \displaystyle\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(v(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))\right)\right] g(x)dx$.

c. On suppose que pour toute $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses précédentes, l'application $h : t \mapsto I_{\varphi_t}$ admet un extremum local en 0. Montrer que φ est solution d'une équation différentielle à déterminer.

23.11 *Mines PSI 2021* Antoine Faivre-Duboz I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)dt$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f(x)$. On définit aussi la partie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que g est de classe C^1 sur D et donner ses dérivées partielles.

b. Montrer que g admet des dérivées partielles d'ordre 1 au point (a,a) et que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,a) = \dfrac{f'(a)}{2}$.

c. Montrer que $\forall (x,y) \in D,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y (y-t)\big(f'(t) - f'(a)\big)dt$.

d. En déduire que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

23.12 *Centrale Maths1 PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f admette un minimum local en (x_0, y_0).

Déterminer le signe du laplacien $\Delta f(x_0, y_0)$.

23.13 *Centrale Maths1 PSI 2023* Tom Graciet et Chloé Vagner

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f(x_1, \cdots, x_n) = \Big(\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big) \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)$.

a. Trouver les points critiques de f_n.

b. On note a_n le point critique dont les coordonnées sont toutes strictement positives. Montrer que f_n admet un extremum local en a_n.

c. Que se passe-t-il en les autres points critiques ?

d. Montrer que $\lim\limits_{||x||_2 \to +\infty} f(x) = 0$.

e. Montrer que f admet en a_n un maximum global.

23.14 *Mines PSI 2023* Bader Ben Amira II Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(||x||)$. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Déterminer f.

23.15 *Mines PSI 2023* Rebecca Blé II Soit $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{a}{xy}$.

a. Montrer que f est de classe C^1 sur Ω. Calculer le gradient de f en tout point de Ω.

b. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$. Étudier les extrema de f.