DS 7.2 : extrait de MINES MP 2019 MATHS2

PSI 1 2024/2025 **mardi 18 mars 2025**

PARTIE 1 : UNE PROPRIÉTÉ DE PERRON-FROBENIUS

1.1 Comme on a $\int_0^1 t^i dt = \left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_0^1 = \frac{1}{i+1}$ si $i \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale, pour un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ comme dans l'énoncé tel que $X^T = (x_0\ x_1 \dots x_{n-1})$,

$$\boxed{\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt = \int_0^1 \Big(\sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} x_j x_k t^{j+k}\Big) dt = \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} x_j x_k \int_0^1 t^{j+k} dt = \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \frac{x_j x_k}{j+k+1}.}$$

1.2 On constate que H_n est symétrique réelle. Par calcul matriciel, $X^T H_n X = \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \frac{x_j x_k}{j+k+1} = \int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt$. Comme $\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt \geqslant 0$, on a $X^T H_n X \geqslant 0$, ce qui garantit que H_n est symétrique positive. De plus, si $X^T H_n X = 0$, alors $\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt = 0$ et, comme $\widetilde{X}^2$ est une fonction continue et positive sur $[0;1]$, on en déduit que $\widetilde{X}$ est la fonction nulle sur $[0;1]$, donc que le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} x_k X^k$ admet une infinité de racines ; il est donc nul et on a bien $X = 0$ ce qui prouve que $\boxed{H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$

1.3 D'après le théorème spectral, H_n n'admet que des valeurs propres réelles car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. De plus, soit $\lambda \in Sp(H_n)$, alors il existe un vecteur $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $H_n X = \lambda X$. Alors $X^T H_n X = \lambda X^T X = \lambda ||X||^2 > 0$ d'après la question précédente. Or $||X||^2 > 0$ car $X \neq 0$ donc $\lambda = \frac{X^T H_n X}{||X||^2} > 0$. On a bien $\boxed{Sp(H_n) \subset \mathbb{R}_+^*.}$

1.4 ($\Longrightarrow$) Si $X \in V$, alors $H_n X = \rho_n X$ par définition, donc on a directement $X^T H_n X = \rho_n X^T X = \rho_n ||X||^2$.
($\Longleftarrow$) D'après le théorème spectral, en notant $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r = \rho_n$ les différentes valeurs propres de H_n classées dans l'ordre, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(H_n)$. Ainsi, pour un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ tel que $X^T H_n X = \rho_n X^T X = \rho_n ||X||^2$, il existe $(X_1, \dots, X_r) \in E_{\lambda_1}(H_n) \times \dots \times E_{\lambda_r}(H_n)$ tel que $X = \sum_{i=1}^r X_i$, alors $X^T H_n X = \Big(\sum_{i=1}^r X_i\Big)^T \Big(\sum_{j=1}^r \lambda_j X_j\Big) = \sum_{k=1}^r \lambda_k X_k^T X_k$ par bilinéarité et car $X_i^T X_j = 0$ si $i \neq j$. La condition $X^T H_n X = \rho_n X^T X$ donne donc $\rho_n \sum_{i=1}^r ||X_i||^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i ||X_i||^2$, ou encore $\sum_{i=1}^r (\rho_n - \lambda_i)||X_i||^2 = 0$. Ces termes étant tous positifs, $\forall i \in [\![1; r-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_i)||X_i||^2 = 0$ implique $X_i = 0$. Ainsi, $X = X_r \in E_{\rho_n}(H_n) = V$.
Par double implication, on a bien prouvé que $\boxed{X \in V \text{ si et seulement si } X^T H_n X = \rho_n ||X||^2.}$
Pour ($\Longleftarrow$), on pouvait aussi dire que si $X^T H_n X = (X|H_n X) = \rho_n ||X||^2$, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\rho_n ||X||^2 \leqslant ||X||\,||H_n X||$ sauf que $||H_n X||^2 = \Big|\Big|\sum_{j=1}^r H_n X_j\Big|\Big|^2 = \Big|\Big|\sum_{j=1}^r \lambda_j X_j\Big|\Big|^2 = \sum_{j=1}^r \lambda_j^2 ||X_j||^2$ par Pythagore donc, comme $\lambda_j^2 \leqslant \lambda_r^2 = \rho_n^2$, cela donne $||H_n X||^2 \leqslant \rho_n^2 \sum_{j=1}^r ||X_j||^2 = \rho_n^2 ||X||^2$ d'où $||H_n X|| \leqslant \rho_n ||X||$. Ainsi, $\rho_n ||X||^2 \leqslant ||X||\,||H_n X|| \leqslant \rho_n ||X||^2$ et ces inégalités sont des égalités. D'après Cauchy-Schwarz, on en

déduit que (X, H_nX) est liée. Soit $X = 0$ et alors $X \in V$. Soit $X \neq 0$ et alors $H_nX = \lambda X$ mais $||H_nX|| = \rho_n||X||$ implique, comme $\lambda \geqslant 0$ d'après 1.3, que $\lambda = \rho_n$. Dans tous les cas, on a bien $X \in V$.

1.5 Comme H_n est positive, on a $X_0^T H_n X_0 = |X_0^T H_n X_0| = \left| \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \frac{x_j x_k}{j+k+1} \right|$. On utilise alors l'inégalité triangulaire pour avoir $\boxed{X_0^T H_n X_0 \leqslant \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \frac{|x_j||x_k|}{j+k+1} = |X_0|^T H_n |X_0|.}$

Comme $X_0 \in V$ par hypothèse, d'après la question 1.4, $X_0^T H_n X_0 = \rho_n||X_0||^2$ donc $\rho_n||X_0||^2 \leqslant |X_0|^T H_n|X_0|$ d'après l'inégalité ci-dessus. En décomposant comme avant $|X_0| = \sum_{i=1}^{r} V_i$ avec $V_i \in E_{\lambda_i}(H_n)$, comme la famille $(V_1, \ldots, V_r)$ est orthogonale, on a $||\,|X_0|\,||^2 = \sum_{i=1}^{r} ||V_i||^2$. De plus, comme les carrés des composantes des vecteurs X_0 et $|X_0|$ sont les mêmes, X_0 et $|X_0|$ ont même norme donc $||X_0||^2 = \sum_{i=1}^{r} ||V_i||^2$, d'où $|X_0|^T H_n|X_0| = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i^T V_i \leqslant \rho_n \sum_{i=1}^{r} ||V_i||^2 = \rho_n||X_0||^2$. On obtient donc $\rho_n||X_0||^2 \leqslant |X_0|^T H_n|X_0| \leqslant \rho_n||X_0||^2$. Ainsi, $|X_0|^T H_n|X_0| = \rho_n||\,|X_0|\,||^2$ ce qui montre, avec 1.4, que $\boxed{|X_0| \in V.}$

1.6 X_0 est non nul, or tous les coefficients de H_n étant strictement positifs et $|X_0|$ ayant des coordonnées positives et non toutes nulles, cela impose que $\boxed{\text{toutes les composantes de } H_n|X_0| \text{ sont strictement positives.}}$

Alors, comme $|X_0| \in V$ d'après la question 1.5, on a $H_n|X_0| = \rho_n|X_0|$ et, puisque $\rho_n > 0$, cela implique que $\boxed{\text{toutes les composantes de } |X_0| \text{ sont strictement positives, celles de } X_0 \text{ sont donc toutes non nulles.}}$

1.7 Soit $X_0 = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ un vecteur non nul de V. Soit $Y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$ un autre vecteur de V. Comme x_0 est non nul d'après la question 1.6, on peut former le vecteur $X = Y - \frac{y_0}{x_0}X_0$ qui appartient à V par structure d'espace vectoriel de V. Or, par construction, la première composante de X est nulle, et la question 1.6 montre alors que ce vecteur ne peut être que le vecteur nul. Ainsi, $Y = \frac{y_0}{x_0}X_0 \in \mathsf{Vect}(X_0)$. On vient de montrer que $V \subset \mathsf{Vect}(X_0)$. L'autre inclusion étant évidente, on a $\boxed{V = \mathsf{Vect}(X_0) \text{ est de dimension } 1.}$

PARTIE 2 : INÉGALITÉ DE HILBERT

2.1 Comme on a $\int_0^\pi 1\,d\theta = \pi$ et $\int_0^\pi e^{im\theta} d\theta = \left[\frac{e^{im\theta}}{im}\right]_0^\pi = \frac{e^{im\pi}-1}{im\pi} = \frac{(-1)^m - 1}{im\pi}$ si $m \in \mathbb{N}^*$, on a par linéarité,

$$\boxed{\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi \sum_{j=0}^{d} a_j e^{i(j+1)\theta} d\theta = \sum_{j=0}^{d} a_j \int_0^\pi e^{i(j+1)\theta} d\theta = -i \sum_{j=0}^{d} \frac{a_j}{(j+1)}[(-1)^{j+1} - 1].}$$

2.2 Mais on a aussi $\int_{-1}^{1} t^m dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{m+1}}{m+1}$ si $m \in \mathbb{N}$, et par linéarité de l'intégrale, on obtient les relations $\int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{j=0}^{d} a_j \int_{-1}^{1} t^j dt = \sum_{j=0}^{d} \frac{a_j}{(j+1)}[1 - (-1)^{j+1}] = i \int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta$ (pas d'intégration par parties complexe même si formellement cela coïncide).

Comme $|-i| = 1 = |e^{i\theta}|$ et par inégalité de la moyenne, $\boxed{\left|\int_{-1}^{1} P(t)dt\right| = \left|\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta\right| \leqslant \int_0^\pi |P(e^{i\theta})| d\theta.}$

2.3 Grâce à la question 1.1, $X^T H_n X = \int_0^1 |\widetilde{X}(t)|^2 dt \leqslant \int_{-1}^1 |\widetilde{X}(t)|^2 dt$ car $\widetilde{X}(t)^2 \geqslant 0$ et $-1 < 0$ où l'on a posé $\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k = Q(t)$ avec $Q = \sum_{k=0}^{n-1} x_k X^k$. En appliquant ce qui précède au polynôme $P = Q^2$, comme $|P(e^{i\theta})| = |Q(e^{i\theta})|^2 = |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2$, $\boxed{X^T H_n X \leqslant \int_{-1}^1 Q^2(t)dt \leqslant \int_0^\pi |Q^2(e^{i\theta})|d\theta = \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta.}$

2.4 Comme $|\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 = \widetilde{X}(e^{i\theta})\overline{\widetilde{X}(e^{i\theta})} = \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})$ car $\widetilde{X}$ est une fonction polynomiale réelle et que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Ainsi, $|\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 = \left(\sum_{p=0}^{n-1} x_p e^{ip\theta}\right)\left(\sum_{q=0}^{n-1} x_q e^{iq\theta}\right) = \sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1} x_p x_q e^{i(p-q)\theta}$ d'où

$$\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1} x_p x_q \int_0^\pi e^{i(p-q)\theta} d\theta = \sum_{m=0}^{n-1} x_m^2 \pi + \sum_{0 \leqslant p \neq q \leqslant n-1} x_p x_q \frac{(-1)^{p-q} - 1}{i(p-q)\pi}.$$

en distinguant selon que $p = q$ ou $p \neq q$ dans la somme précédente et avec les intégrales calculées en 2.1. Comme les x_k sont des réels, la quantité $\sum_{0 \leqslant p \neq q \leqslant n-1} x_p x_q \frac{(-1)^{p-q} - 1}{i(p-q)\pi}$ est clairement un imaginaire pur. Or, cette quantité vaut aussi $\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta - \pi \sum_{m=0}^{n-1} x_m^2$ qui est un réel, on en déduit que cette quantité est nulle (car $i\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \{0\}$) d'où $\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \sum_{m=0}^{n-1} x_m^2$. Ainsi, avec l'inégalité de la question 2.1, on obtient bien $\boxed{X^T H_n X \leqslant \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \sum_{m=0}^{n-1} x_m^2 = \pi ||X||^2.}$

<u>Autre méthode</u> : comme la fonction $\theta \mapsto |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 = \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})$ est paire, on a facilement la relation $\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta$. Or $\int_{-\pi}^\pi 1 d\theta = 2\pi$ et $\int_{-\pi}^\pi e^{im\theta} d\theta = \left[\frac{e^{im\theta}}{im}\right]_{-\pi}^\pi = 0$ si $m = 0$, donc

$$\int_{-\pi}^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1} x_p x_q \int_{-\pi}^\pi e^{i(p-q)\theta} d\theta = \sum_{m=0}^{n-1} 2\pi x_m^2.$$

Par conséquent, plus simplement qu'avant, on trouve aussi $\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2}\left(2\pi \sum_{m=0}^{n-1} x_m^2\right) = \pi ||X||^2$.

2.5 Comme la sous-matrice contenant les n premières lignes et les n premières colonnes de H_{n+1} est la matrice H_n, on va pouvoir trouver un lien entre ρ_n et ρ_{n+1}. En effet, soit $X_n \neq 0 \in V$ un vecteur propre de H_n associé à la valeur propre ρ_n, on pose alors le vecteur $X = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, alors $X \neq 0$ et on trouve $X_n^T H_n X_n = X^T H_{n+1} X$ en effectuant le calcul. D'après la question 1.4, $X_n^T H_n X_n = \rho_n ||X_n||^2$. Comme à la question 1.5, il vient aussi $X^T H_{n+1} X \leqslant \rho_{n+1} ||X||^2$. Tout ceci implique que $\rho_n ||X_n||^2 \leqslant \rho_{n+1} ||X||^2$ or il est clair que $||X|| = ||X_n||$ donc, comme $||X_n||^2 > 0$, on a $\rho_n \leqslant \rho_{n+1}$ et la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. De plus, si $X \in V$ non nul, d'après les questions 1.4 et 2.2, $X^T H_n X = \rho_n ||X||^2 \leqslant \pi ||X||^2$ donc $\rho_n \leqslant \pi$ car $||X||^2 > 0$. Ainsi, la suite $(\rho_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante et majorée par π.

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(\rho_n)_{n \geqslant 1} \text{ est croissante et converge vers un réel } \ell \leqslant \pi.}$

PARTIE 3 : UN OPÉRATEUR INTÉGRAL

3.1 Comme K_n est une fonction polynomiale donc continue sur le segment $[0;1]$, elle y est bornée et on peut définir $M = ||K_n||_{\infty,[0;1]}$. En fait, comme K_n est croissante et positive sur $[0;1[$, on a $M = K_n(1) = n$ mais c'est sans importance. Soit $f \in E$, alors pour tout réel $x \in [0;1[$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto K_n(tx)f(t)$ est continue sur $[0;1[$ et $\forall t \in [0;1[,\ |\varphi_x(t)| \leqslant M|f(t)|$ car $xt \in [0;1[$. Par conséquent, comme $\varphi_x(t) \underset{1^-}{=} O(f(t))$, le théorème de comparaison montre que φ_x est intégrable sur $[0;1[$ donc que la fonction $T_n(f)$ est bien définie sur $[0;1[$.

Pour la continuité de $T_n(f)$, on a le choix entre deux approches :

• Pour $x \in [0;1[$, alors $T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt = \int_0^1 \Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} t^k x^k\Big) f(t)dt$ or toutes les fonctions $t \mapsto t^k f(t)$ sont intégrables sur $[0;1[$ car $\forall t \in [0;1[,\ |t^k f(t)| \leqslant |f(t)|$, ainsi $T_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Big(\int_0^1 t^k f(t)dt\Big) x^k$ par linéarité de l'intégrale et la fonction $T_n(f)$ est polynomiale donc continue sur $[0;1[$.

• Soit $h : [0;1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = K_n(tx)f(t)$ de sorte que $T_n(f) = \int_0^1 h(x,t)dt$.

- Pour $t \in [0;1[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0;1[$ car K_n l'est.
- Pour $x \in [0;1[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0;1[$ (on vient de le faire).
- Pour $(x,t) \in [0;1[^2$, $|h(x,t)| \leqslant M|f(t)|$ et f est intégrable sur $[0;1[$.

Par théorème de continuité sous le signe somme, $T_n(f)$ est continue sur $[0;1[$: T_n va bien de E dans E.

De plus, si $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale, pour tout réel $x \in [0;1[$, on a

$$T_n(\lambda f + g)(x) = \int_0^1 K_n(tx)(\lambda f(t) + g(t))dt = \lambda \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt + \int_0^1 K_n(tx)g(t)dt = \lambda T_n(f)(x) + T_n(g)(x)$$

ce qui montre que $T_n(\lambda f + g) = \lambda T_n(f) + T_n(g)$ donc que T_n est linéaire.

Enfin, comme on a vu que $T_n(f)$ est une fonction polynomiale, elle est intégrable sur $[0;1[$ (sur $[0;1]$ aussi d'ailleurs car elle y est continue). Tout ce qui précède justifie bien que $\boxed{T_n \text{ est un endomorphisme de } E.}$

E est un espace de dimension infini puisqu'il contient toutes les fonctions polynomiales par exemple. En notant $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ le sous-espace de E formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$, on vient de montrer ci-dessus que $\mathrm{Im}(T_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$. L'endomorphisme T_n ne saurait donc être injectif. En effet, même sa restriction à $R_n[x] \subset E$ ne l'est pas car $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1 > n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[x])$ grâce à la formule du rang. Il existe donc une fonction non nulle $f \in E$ (et même mieux $f \in \mathbb{R}_n[x] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[x]$ donc polynomiale de degré n exactement) telle que $T_n(f) = 0$ ce qui montre que $\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } T_n.}$

Autre méthode : dans la même veine que les polynômes de Legendre, en posant $f : t \mapsto [(t(t-1))^n]^{(n)}$, f est polynomiale de degré n exactement donc non nulle, et on a, en effectuant des intégrations par parties successives, $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $\int_0^1 t^k f(t)dt = 0$ donc $T_n(f) = 0$ ce qui montre à nouveau, mais de manière constructive, l'existence d'un vecteur propre de T_n associé à la valeur propre 0.

3.2 En notant $X^T = (x_0 \ \cdots x_{n-1})$, pour $x \in [0;1[$, $T_n(\widetilde{X})(x) = \int_0^1 K_n(tx)\widetilde{X}(t)dt = \int_0^1 (\sum_{i=0}^{n-1} t^i x^i)(\sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j)dt$ donc

$$T_n(\widetilde{X})(x) = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} x^i x_j \int_0^1 t^{i+j}dt = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} \frac{x^i x_j}{i+j+1}.$$

Or on se rappelle avoir déjà vu ce style de calcul matriciel en question 1.1, et en posant $Y_x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne tel que $Y_x^T = (1 \ x \cdots x^{n-1})$, on a $T_n(\widetilde{X})(x) = Y_x^T H_n X = X^T H_n Y_x$.

On a vu en question 1.1 que H_n est définie positive, donc 0 n'est pas une valeur propre de H_n, alors qu'on a vu à la question précédente que 0 est une valeur propre de T_n.

• Soit un réel λ valeur propre de H_n, il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $X^T = (x_0 \ x_1 \ldots x_{n-1})$ et $H_n X = \lambda X$. Si on reporte ceci dans l'égalité ci-dessus, $T_n(\widetilde{X})(x) = Y_x^T H_n X = \lambda Y_x^T X = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k = \lambda \widetilde{X}(x)$, donc $T_n(\widetilde{X}) = \lambda \widetilde{X}$ avec $\widetilde{X} \neq 0$ qui est un vecteur propre de T_n : λ est une valeur propre de T_n.

• Soit un réel non nul λ valeur propre de T_n, il existe donc une fonction non nulle $f \in E$ telle que $T_n(f) = \lambda f$ ce qui justifie, comme $\lambda \neq 0$, que $f = \frac{1}{\lambda} T_n(f) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Ainsi, f est une fonction polynomiale de degré inférieur à $n-1$. On peut donc poser $\forall x \in [0;1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k = \widetilde{X}(x) = Y_x^T X$ en posant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^T = (x_0 \ x_1 \ldots x_{n-1})$. Comme f est non nulle, ses coefficients ne sont pas tous nuls donc $X \neq 0$. À nouveau, si $x \in [0;1[$, $T_n(\widetilde{X})(x) = \lambda \widetilde{X}(x) = \lambda Y_x^T X = Y_x^T H_n X$. En notant $(H_n X - \lambda X)^T = (a_0 \ a_1 \ldots a_{n-1})$, on a $\forall x \in [0;1[$, $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = 0$ ce qui prouve que le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ admet une infinité de racines ; il est donc nul et $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$ d'où $H_n X = \lambda X$ et λ est une valeur propre de H_n car $X \neq 0$.

Remarque : on a établi que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors X est un vecteur propre de H_n associé à λ si et seulement si $\widetilde{X}$ est un vecteur propre de T_n associé à λ.

Toujours est-il que, par double implication, $\boxed{T_n \text{ et } H_n \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles.}}$

3.3 • Puisque $\rho_n \neq 0$ et que c'est une valeur propre de H_n, il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul qu'on écrit $X^T = (x_0 \ldots x_{n-1})$ tel que $H_n X = \rho_n X$. Avec les notations de la partie 1, $X \in V$ mais on sait d'après les questions 1.5 et 1.7 que $|X| \in V$ et que $V = \mathrm{Vect}(X)$. Ainsi, $|X|$ et X sont colinéaires ce qui justifie d'après 1.6 que les coefficients de X ont même signe strict. Quitte à remplacer X par $-X$, on peut supposer que X a tous ses coefficients strictement positifs : $X = |X|$. On a vu à la question 3.2 qu'en posant $f = \widetilde{X} : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$, on avait $f \in E$ et $T_n(f) = \rho_n f$. La fonction f est strictement positive sur $[0;1]$ d'où $f \in \mathcal{A}$ et, puisque $T_n(f) = \rho_n f$, on a $\forall x \in]0;1[$, $\rho_n = \frac{1}{f(x)} \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt = F(x)$ donc $\underset{x \in]0;1[}{\mathrm{Sup}} \frac{1}{f(x)} \int_0^1 K_n(xt)f(t)dt = \rho_n$ (F est constante).

• Soit $\varphi \in \mathcal{A}$ quelconque, a fortiori $\varphi \in E$ donc, pour $x \in]0;1[$, $T_n(\varphi)(x) = \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt$ existe comme $\frac{1}{\varphi(x)}$ car $\varphi(x) > 0$ donc on peut considérer la quantité $\frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt$. De plus, $T_n(\varphi)$ est polynomiale donc continue sur le segment $[0;1]$, comme est continue la fonction $\frac{1}{\varphi}$ par hypothèse sur ce même segment ; ainsi, la fonction $\Phi : x \mapsto \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$, elle y est donc bornée ce qui justifie l'existence du réel $S(\varphi) = \underset{x \in]0;1[}{\mathrm{Sup}} \left(\frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt \right)$.

Pour obtenir l'inégalité de l'énoncé, il suffit de montrer que ρ_n minore $I = \{S(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}\}$, c'est-à-dire que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}$, $S(\varphi) \geqslant \rho_n$, ou encore qu'il existe $x \in]0;1[$ tel que $\Phi(x) \geqslant \rho_n = F(x)$ (voir les notations introduites ci-dessus). Pour $x \in]0;1[$, et même pour $x \in [0;1]$ puisque ces deux fonctions se prolongent par continuité au segment $[0;1]$, travaillons l'expression $\Phi(x) - \rho_n = \Phi(x) - F(x)$:

$$\Phi(x) - F(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt - \frac{1}{f(x)} \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt = \frac{1}{f(x)} \int_0^1 \varphi(t)K_n(xt)\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)}\Big)dt.$$

Or la fonction $\psi = \dfrac{f}{\varphi}$ est continue sur le segment $[0;1]$ (en tous cas elle s'y prolonge par continuité) donc elle y est bornée et y atteint ses bornes. En considérant $a \in [0;1]$ tel que $\psi(a) = \underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Max}}(\psi(t))$, on a donc $\Phi(a) - F(a) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)K_n(at)\big(\psi(a) - \psi(t)\big)dt \geqslant 0$ car $f(a) > 0$ et $\forall t \in [0;1],\ K_n(at) > 0$ et $\psi(t) \leqslant \psi(a)$. Ainsi, $\Phi(a) \geqslant \rho_n = F(a)$ donc $\underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Max}}(\Phi(x)) \geqslant \rho_n$ et, par continuité de Φ sur $[0;1]$, $S(\Phi) = \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}}(\Phi(x)) \geqslant \rho_n$. Par conséquent, l'ensemble I est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par ρ_n, sa bornée inférieure existe et, étant le plus grand des minorants, $\boxed{\mathrm{Inf}(I) = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Inf}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}} \dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Inf}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}}\ \Phi(x) \geqslant \rho_n.}$

3.4 On a vu au début de la question que si $\varphi = f \in \mathcal{A}$, on a $F : x \mapsto \rho_n$ donc $\underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}}(F(x)) = \rho_n$ donc le minorant ρ_n de I est dans I ; cette borne inférieure est donc un minimum et $\boxed{\rho_n = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Min}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}} \dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt.}$

De même, avec $b \in [0;1]$ tel que $\psi(b) = \underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Min}}(\psi(t))$, $\Phi(b) - F(b) = \dfrac{1}{f(b)} \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)K_n(bt)\big(\psi(b) - \psi(t)\big)dt \leqslant 0$ donc $\underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Min}}(\Phi(x)) \leqslant \rho_n$ qui montre à nouveau que $\underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Inf}}(\Phi(x)) \leqslant \rho_n$. Comme avant, on en déduit la majoration $\underset{f\in\mathcal{A}}{\mathrm{Sup}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Inf}}(\Phi(x)) \leqslant \rho_n$. Puisqu'on a égalité en prenant $\varphi = f$, cela donne aussi l'égalité dans la majoration précédente, à savoir $\boxed{\rho_n = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Sup}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Inf}} \dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Max}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Inf}} \dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt.}$