Problème : espaces euclidiens

(Extrait de CCP MP 2014 maths 2)

Notations, rappels et objectifs du problème

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée.
On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ |\ \rangle$ et de la norme euclidienne $\|\ \|$ associée.
On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes autadjoints de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \ \langle s(x)|y\rangle = \langle x|s(y)\rangle.$$

Un endomorphisme autoadjoint s de E est dit autoadjoint positif (respectivement autoadjoint défini positif) si :

$$\forall x \in E,\ \ \langle s(x)|x\rangle \geq 0\ \ (\text{respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\},\ \ \langle s(x)|x\rangle > 0).$$

Une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ X^T SX \geq 0\ \ (\text{respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \ X^T SX > 0).$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est autoadjoint (respectivement autoadjoint positif, autoadjoint défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \cdots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Partie I - Questions préliminaires

1. Énoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes autoadjoints de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

2. *Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, ϵ_i est un vecteur propre de s associé à la valeur propre λ_i. Pour tout vecteur x de E, on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x)|x\rangle.$$

a) Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.

b) En déduire, pour $x \in E$,

$$\lambda_1\|x\|^2 \leqslant R_s(x) \leqslant \lambda_n\|x\|^2.$$

c) Soit $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_n]$, montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $R_s(x) = \lambda||x||^2$ en considérant $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = R_s(\cos(t)\epsilon_1 + \sin(t)\epsilon_n)$.

3. a) On suppose dans cette question que s est autoadjoint positif (respectivement autoadjoint défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives). Montrer la réciproque.

b) Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ \ \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.$$

Partie II - Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \ \ |a_{i,j}| \leq 1.$$

2. *Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.*
Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = Tr(AS)$.

a) Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta).$$

b) Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \mathrm{Tr}(S)$, puis déterminer $\max\limits_{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} T(A)$.

Partie III - Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

1. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S)\right)^n \quad (*).$$

2. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = D^T S D$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{Tr}(S_\alpha)$.

3. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

4. Montrer que le résultat de la question précédente reste valable dans le cas où les coefficients diagonaux de S sont seulement positifs ou nuls. *On pourra utiliser* **I.3.b**.

5. En déduire l'inégalité d'Hadamard :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

Partie IV - Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, et $\Delta = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega \Delta \Omega^T$.
On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

1. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = \Omega^T A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta).$$

2. Démontrer que $\{\mathrm{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

3. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\mathrm{Tr}(B\Delta) \geq n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}.$$

4. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{1/n}$.

5. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(S))^{1/n}$ et $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$.

Déterminer le réel m.