DS 7.2 : extrait de MINES MP 2019 MATHS2

PSI 1 2024/2025 **mardi 18 mars 2025**

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $||\,.\,||$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels.

On note $X^T = (x_0\ x_1 \cdots x_{n-1})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale, associée à X, définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$.

L'objet du problème est l'étude du rayon spectral (la plus grande valeur absolue des valeurs propres) de la matrice de Hilbert $H_n = (h^{(n)}_{j,k})_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par*

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h^{(n)}_{j,k} = \dfrac{1}{j+k+1}$ pour $j, k \in \{0,\ 1, \cdots,\ n-1\}$.

PARTIE 1 : UNE PROPRIÉTÉ DE PERRON-FROBENIUS

1.1 Déterminer $\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt$ en fonction des réels $x_0, \cdots, x_{n-1}$.

1.2 Montrer que la matrice H_n est définie positive ; c'est-à-dire que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0 \Longrightarrow X^T H_n X > 0$.

1.3 En déduire que les valeurs propres de H_n sont toutes strictement positives.

On note V le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n.

1.4 Montrer que $X \in V$ si et seulement si $X^T H_n X = \rho_n ||X||^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de V. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

1.5 Établir l'inégalité $X_0^T H_n X_0 \leqslant |X_0|^T H_n |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in V$.

1.6 Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.

1.7 En déduire la dimension du sous-espace propre V.

PARTIE 2 : INÉGALITÉ DE HILBERT

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *et* $P = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ *un polynôme à coefficients réels.*

2.1 Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$ en fonction des $a_0, \cdots, a_d$.

2.2 En déduire l'inégalité

$$\left|\int_{-1}^{1} P(t)dt\right| \leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta,$$

2.3 Montrer que $X^T H_n X \leqslant \int_0^{\pi} |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

2.4 En déduire que $X^T H_n X \leqslant \pi ||X||^2$.

2.5 Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.

PARTIE 3 : UN OPÉRATEUR INTÉGRAL

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ *et tout réel* x*, on pose*

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Soit E *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur* $[0;1[$ *et* $T_n : E \to E$ *l'application définie par*

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt.$$

3.1 Montrer que T_n est un endomorphisme de E, dont 0 est valeur propre.

3.2 Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

On note $\mathcal{A}$ *l'ensemble des fonctions* $\varphi \in E$ *à valeurs strictement positives sur* $]0;1[$ *telles que* $\frac{1}{\varphi}$ *admette un prolongement continu sur* $[0;1]$*. On rappelle que* ρ_n *est la plus grande valeur propre de* H_n*.*

3.3 En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n, montrer que

$$\rho_n \leqslant \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\mathcal{A}} \operatorname*{Sup}_{x\in]0;1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt.$$

3.4 En utilisant la partie 1, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.