ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 4 ESPACES VECTORIELS NORMÉS

4.1 Normes et équivalence

4.1 *Compléments OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 533I*

Pour x et y réels, on pose $u = (x, y)$ et $N(u) = \underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Sup}} |xt + y|$.

a. Montrer que $N(u) = \mathrm{Max}(|y|, |x + y|)$ puis que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b. Soit $B = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid N(u) \leqslant 1\}$. Trouver la plus petite boule fermée de centre $(0, 0)$ (pour la norme $||.||_2$ classique dans le plan $\mathbb{R}^2$) contenant B puis la plus grande boule fermée de centre $(0, 0)$ contenue dans B.

4.2 *Centrale MP*

Soit $E = \left\{f \in C^1\big([0; 1], \mathbb{R}\big) \mid f(0) = 0\right\}$ et N l'application définie sur E par $N(f) = ||3f + f'||_{\infty,[0;1]}$.

a. Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe $k > 0$ tel que $||f||_\infty \leqslant kN(f)$.

b. Les normes $||\,.\,||_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

4.3 Soit $E = \left\{f \in C^1\big([0; 1], \mathbb{R}\big) \mid f(0) = 0\right\}$ et N_1, N_2 les deux applications définies sur E par $N_1(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ et $N_2(f) = ||f + f'||_\infty$. Montrer que ce sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

4.4 *Mines PSI 2010 d'après RMS* Soit l'espace vectoriel $E = \left\{f \in C^2\big([0; 1], \mathbb{R}\big) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$.

Pour toute fonction $f \in E$, on pose $N(f) = ||f + 2f' + f''||_\infty$.

a. Montrer que N est une norme.

b. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall f \in E,\ ||f||_\infty \leqslant c\,N(f)$.

4.5 Soit $E = C^0\big([0; 1], \mathbb{R}\big)$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$, on pose $\forall f \in E,\ ||f||_\varphi = \underset{[0;1]}{\mathrm{Sup}}\big(|f(t)|\varphi(t)\big)$.

a. Montrer que $||\,.\,||_\varphi$ est une norme.

b. Si φ_1 et φ_2 sont strictement positives sur $[0; 1]$, montrer que $||\,.\,||_{\varphi_1}$ et $||\,.\,||_{\varphi_2}$ sont équivalentes.

c. Les normes $||\,.\,||_x$ et $||\,.\,||_{x^2}$ (abus de notation) sont-elles équivalentes ?

4.6 *Mines MP* Soit $E = C^0\big([0; 1], \mathbb{R}\big)$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$, on pose $\forall f \in E,\ ||f||_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\varphi(t)dt$.

a. Montrer que $||\,.\,||_\varphi$ est une norme.

b. Si φ_1 et φ_2 sont strictement positives sur $[0; 1]$, montrer que $||\,.\,||_{\varphi_1}$ et $||\,.\,||_{\varphi_2}$ sont équivalentes.

c. Les normes $||\,.\,||_x$ et $||\,.\,||_{x^2}$ (abus de notation) sont-elles équivalentes ?

4.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$, $N_1(M) = \sum_{j=1}^{n} \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} |m_{i,j}|$ et $N_2(M) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \Big(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|\Big)$.

a. Montrer que N_1 est une norme sur E. On admet que N_2 est aussi une norme sur E.

b. Déterminer les constantes optimales α et β telles que $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$.

4.8 *Normes p matricielles* Soit $(p,q) \in]1;+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ deux matrices carrées. On note bien sûr $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

a. Montrer que : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ ab \leqslant \dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q$.

b. En déduire que si $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^p = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}|^q=1$, alors $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}b_{i,j}| \leqslant 1$.

c. En déduire l'inégalité de Hölder : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}b_{i,j}| \leqslant \Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^p\Big)^{1/p} \times \Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}|^q\Big)^{1/q}$.

d. Vérifier que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}||a_{i,j}+b_{i,j}|^{p-1} \leqslant \Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p\Big)^{1/q}$. En déduire l'inégalité de Minkowski : $\Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}|^p\Big)^{1/p}$.

Ainsi, $||\,.\,||_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ définie par $||A||_p = \Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^p\Big)^{1/p}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e. Justifier que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ ||A||_\infty \leqslant ||A||_p \leqslant n^{2/p}||A||_\infty$. Que vaut donc $\lim\limits_{p\to+\infty}||A||_p$?

f. Établir $\forall 1 \leqslant p < q,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ ||A||_q \leqslant ||A||_p \leqslant n^{2/p-2/q}||A||_q$. Ces constantes sont-elles optimales ?

4.9 *Normes p* Soit $(p,q) \in]1;+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et x,y deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note bien sûr $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $y=(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

a. Montrer que : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ ab \leqslant \dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q$.

b. En déduire que si $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p = \sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^q = 1$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_ky_k| \leqslant 1$.

c. En déduire l'inégalité de Hölder : $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_ky_k| \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\Big)^{1/p} \times \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^q\Big)^{1/q}$.

d. Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k||x_k+y_k|^{p-1} \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\Big)^{1/q}$. En déduire l'inégalité de Minkowski : $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^p\Big)^{1/p}$.

e. Prouver que $||\,.\,||_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par $||x||_p = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\Big)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

f. Justifier que $\forall x \in \mathbb{K}^n,\ ||x||_\infty \leqslant ||x||_p \leqslant n^{1/p}||x||_\infty$. Que vaut donc $\lim\limits_{p\to+\infty}||x||_p$?

g. Établir, si $1 \leqslant r < s$, $\forall x \in \mathbb{K}^n,\ ||x||_s \leqslant ||x||_r \leqslant n^{1/r-1/s}||x||_s$. Ces constantes sont-elles optimales ?

4.10 *Fonctionnelle de Minkowski* Centrale PSI 2013 Soit $(E,||\,.\,||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

a. Montrer que la boule unité fermée de E, notée $\mathcal{B}_E = \{x \in E \mid ||x|| \leqslant 1\}$, est une partie convexe, fermée, bornée, symétrique par rapport à 0_E (c'est-à-dire que $\forall x \in E,\ x \in \mathcal{B}_E \Longrightarrow -x \in \mathcal{B}_E$) et que $0_E \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_E$.

Réciproquement, soit K une partie de E vérifiant toutes ces propriétés. Pour $x \in E$, on pose $j_K(x) = \mathrm{Inf}(I_x)$ où $I_x = \big\{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\big\}$: j_K est appelée jauge de K (ou associée à K).

b. Montrer que j_K est bien définie sur E et que c'est une norme sur E.

c. Établir que K est la boule unité fermée pour cette norme.

d. Que peut-on dire des deux normes j_K et $||\,.\,||$?

4.11 *Centrale PSI 2013* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la subdivision régulière $x_0 = 0 < x_1 = 1 < \cdots < x_n = n$ de $[0;n]$.

On définit aussi E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : [0;n] \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[0;n]$ et qui sont affines sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$.

On munit E_n des normes (admis) $||\,.\,||_\infty$ et $||\ ||_1$ telles que $||f||_\infty = \underset{x\in[0;n]}{\text{Sup}} |f(x)|$ et $||f||_1 = \int_0^n |f(x)|dx$.

a. Justifier que E_n est de dimension finie et en déterminer la dimension en fonction de n.

b. Justifier qu'il existe α_n, β_n optimales avec $\forall f \in E_n,\ \alpha_n||f||_\infty \leqslant ||f||_1 \leqslant \beta_n||f||_\infty$. Donner β_n.

c. Déterminer la valeur exacte de α_1 et justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{1}{2}$.

d. Pour $f \in E_n$, montrer que si $||f||_\infty = 1$ et $||f||_1 < \frac{1}{2}$ alors le maximum de f est atteint en 0 ou n.

En déduire, pour $n \geqslant 2$, que : $\alpha_n = 2\sqrt{\alpha_{n-1} + \frac{1}{2}} - 1 - \alpha_{n-1}$. Que vaut donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$?

4.12 Soit E l'espace formé des fonctions lipschitziennes $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ telles que $f(a) = 0$. Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que $N(f) = \text{Inf}\left\{k \in \mathbb{R}_+ \ \middle|\ \forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|\right\}$ est une norme sur E.

Indication : on pourra montrer que cette borne inférieure est en fait un minimum.

4.13 *Centrale PSI 2007 et 2013*

Soit $\alpha \in [0;1]$. Pour $f \in C^0\big([0;1], \mathbb{R}\big)$ on pose $N_\alpha(f) = \int_0^\alpha |f| + \underset{[\alpha;1]}{\text{Sup}}\,|f|$.

a. Montrer que N_α est une norme sur $E = C^0\big([0;1], \mathbb{R}\big)$.

b. Comparer les N_α entre elles : sont-elles équivalentes ?

4.2 Suites dans un espace vectoriel normé

4.14 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice antisymétrique telle que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Que peut-on dire de B ?

4.15 Soit $\big(E, ||\,.\,||\big)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de vecteurs de E telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ et v_n sont colinéaires. On note $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $v = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Montrer que u et v sont colinéaires (raisonner par l'absurde et compléter (u,v) en une base de E).

4.16 *Centrale MP 2012* Soit E un espace normé de dimension quelconque et u un endomorphisme de E vérifiant $\forall x \in E,\ ||u(x)|| \leqslant ||x||$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u^k$.

a. Simplifier $v_n \circ (u - \text{id}_E)$.

b. Montrer que $\text{Im}\,(u - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(u - \text{id}_E) = \{0_E\}$.

c. On suppose ici que E de dimension finie, établir que $\text{Im}\,(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \text{id}_E) = E$.

d. On suppose de nouveau E de dimension quelconque. Montrer que si $\text{Im}\,(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \text{id}_E) = E$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et que le sous-espace $\text{Im}\,(u - \text{id}_E)$ est une partie fermée de E.

e. Étudier la réciproque.

4.17 *Classique* Soit $p \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On pose $M_n = \dfrac{A^n}{n!} = (m_{i,j}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et $S_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} M_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A^k}{k!}$.

a. Montrer que : $\forall (U,V) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{K}))^2,\ ||UV||_\infty \leqslant p||U||_\infty ||V||_\infty$.

b. En déduire une majoration de $|m_{i,j}^{(n)}|$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout couple $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$.

c. Que peut-on donc dire de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} m_{i,j}^{(n)}$ pour (i,j) fixé ?

d. En déduire la convergence dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de la suite de matrices $(S_n(A))_{n\geqslant 0}$.

On pose $\exp(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(A)$ qu'on note classiquement $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A^n}{n!}$.

e. Calculer $\exp(D)$ si D est diagonale. En déduire que si A est diagonalisable, alors $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}\,(A)}$.

4.3 Topologie

4.18 Soit $E = C^0([0;1],\mathbb{R})$ normé par $||\,.\,||_\infty$ et $A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geqslant 1 \right\}$.

a. Montrer que A est une partie fermée et vérifier que $\forall f \in A,\ ||f||_\infty > 1$.

b. Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A.

4.19 *Centrale PC 2008* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, à valeurs propres strictement positives.

a. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0 = I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(X_n + AX_n^{-1}\Big)$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n$ est diagonalisable (on pourra utiliser une base de vecteurs propres de A).

b. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite X vérifie $X^2 = A$. On la note $\sqrt{A}$.

c. Montrer que si A est symétrique alors $\sqrt{A}$ est symétrique.

4.20 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

4.21 Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = P$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} B^n = Q$.

On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que $PQ = QP$.

4.22 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

Montrer que l'ensemble P des projecteurs de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

4.23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$, on pose $\rho(A) = \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{\lambda\in Sp(A)} |\lambda|$ (**rayon spectral de** A).

On va montrer que pour toute norme $||\,.\,||$ de E, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

a. Montrer que si le résultat est vrai pour une norme, alors il est vrai pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Montrer que si le résultat est vrai pour une matrice A alors il est vrai pour toute matrice semblable à A.

Dans la suite, on considère la norme $||A||_\infty = \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} |a_{i,j}|$.

c. Montrer que si T est triangulaire et que ses coefficients diagonaux valent 1 alors $\lim\limits_{k\to+\infty} ||T^k||_\infty^{1/k} = 1$.
Indication : écrire $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ nilpotente.

d. Si $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ vérifie $|a_{i,j}| \leqslant b_{i,j}$, montrer $||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$. Conclure en trigonalisant $\dfrac{A}{\rho(A)}$.

4.24 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la partie $S = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \mathtt{deg}(P) = n$ et P scindé à racines simples dans $\mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in S$ et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ ses n racines distinctes réelles. On suppose que le coefficient dominant de P est strictement positif (le cas $\mathtt{dom}(P) < 0$ est similaire). On se donne aussi des réels $\beta_0, \cdots, \beta_n$ tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \cdots < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n$.

a. Déterminer les signes de $P(\beta_k)$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.

b. Que dire des applications $\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_k(R) = R(\beta_k)$ pour $k \in [\![0; n]\!]$?

b. En considérant $\varphi_0^{-1}((-1)^n\,\mathbb{R}_+^*) \cap \cdots \cap \varphi_{n-1}^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \cap \varphi_n^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, que dire de l'aspect topologique de S ?

4.25 Soit E un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, $x \in E$ et $d(x, A) = \mathrm{Inf}\Big(\{||x - a|| \mid a \in A\}\Big)$.

a. Montrer l'application $d : x \in E \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

b. Établir que : $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

c. Justifier que si A est fermée, il existe un vecteur $a_0 \in A$ tel que $d(x, A) = ||x - a_0||$.

4.26 Soit B l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $||(u_n)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Sup}}(|u_n|)$ et F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

F est-elle convexe ? ouverte ? fermée ? compacte ? bornée ? Déterminer $\overline{F}$, $\overset{\circ}{F}$.

4.4 Suites récurrentes réelles

4.27 <u>*Centrale PSI 2008 d'après RMS*</u> Rappeler le domaine de définition de la fonction Arccos.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\big(u_{n+1}\big)$. Que dire de u_0 ?

4.28 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n^2}$.

Indication : étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$, et étudier la fonction $f \circ f$.

4.29 Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 - 1}{u_n^2 + 1}$.

4.30 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n}$.

4.31 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n-1} + \cdots + \sqrt{u_0}}}$.

4.5 Applications linéaires continues

4.32 Soit $E = C^0\big([0; 1], \mathbb{R}\big)$ muni de $||\,.\,||_\infty$, une fonction $\varphi \in E$ fixée et $T : E \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \displaystyle\int_0^1 f\varphi$.

Montrer que T est continue et déterminer $|||T|||_\infty$.

4.33 Soit $E = C^0\big([0; 1], \mathbb{R}\big)$ muni de $||\,.\,||_1$, une fonction $\varphi \in E$ fixée et $T : E \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \displaystyle\int_0^1 f\varphi$.

Montrer que T est continue et déterminer $|||T|||_1$.

4.34 *Centrale PSI 2012*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||P||_\infty = \underset{k\in\mathbb{N}}{\text{Max}}|a_k|$ si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Soit aussi l'application $||.||_1 : E \to \mathbb{R}_+$ définie par $||P||_1 = \underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{\text{Sup}} |P(t)|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit $f : E \to \mathbb{R}$ par : $\forall P \in E,\ f(P) = P(x_0)$.

a. Justifier que $||.||_1$ est aussi une norme sur E. Est-elle équivalente à $||.||_\infty$?

Dorénavant, pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la restriction de f à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

b. Dans $(E_n, ||.||_\infty)$, calculer $u_n = |||f_n|||_\infty = \underset{P\in E_n, ||P||_\infty=1}{\text{Sup}} |f_n(P)|$ en fonction de x_0. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c. On définit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ (ce sont les fameux polynômes de TCHEBYCHEV). Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_n\big(\cos(x)\big) = \cos(nx)$ et $T_n\big(\text{ch}\,(x)\big) = \text{ch}\,(nx)$.

d. Dans $(E_n, ||.||_1)$, on pose $v_n = |||f_n|||_1 = \underset{P\in E_n, ||P||_1=1}{\text{Sup}} |f_n(P)|$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ en fonction de x_0.

4.35 *Mines PSI 2010 d'après RMS*

On munit $E = C^0\big([0;1], \mathbb{R}\big)$ de la norme de la convergence uniforme $||\,.\,||_\infty$.

Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f) : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $T(f)(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

a. Montrer que T est continu. Déterminer la constante α optimale telle que $\forall f \in E,\ ||T(f)||_\infty \leqslant \alpha||f||_\infty$.

b. Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer que : $\exists x_0 \in]0;1],\ \forall x \in [0;x_0[,\ |f(x)| < |f(x_0)| = ||f||_\infty$.

c. En déduire que l'espace propre de T associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

4.36 Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de $||\,.\,||_\infty$. Montrons que $u : f \mapsto u(f)$ où $u(f)(x) = f(0) + x\big(f(1) - f(0)\big)$ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

4.37 On note $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme $||\,.\,||_\infty$.

Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ on pose $\Delta(u)$ la suite définie par $\Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$.
Montrer que Δ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

4.38 Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de $||\,.\,||_\infty$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt - f(a)$ avec $a \in [0;1]$ fixé. Montrer que φ est continue et calculer $|||\varphi|||$.

4.39 Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ et $F = C^1([0;1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par $N_1(f) = ||f||_\infty$ et $N_2(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$. On définit $T : E \to F$ par $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Montrer que T est continue et calculer la norme de T.

4.40 On considère $\mathbb{C}^n$ muni de la norme $||\,.\,||_\infty$, soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, et soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sa matrice dans les bases canoniques. Montrer que $|||u||| = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

4.41 On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne $||\,.\,||_2$ associée au produit scalaire $(A|B) = \text{Tr}\,(A^tB)$. Établir que : $\forall A \in E,\ \text{Tr}\,(A)^2 \leqslant n\text{Tr}\,(A^tA)$. Justifier la continuité de $\text{Tr} : E \to \mathbb{R}$ et calculer $|||\text{Tr}\,|||$.

4.42 Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel normé, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ continus tels que $u\circ v - v\circ u = \alpha\,\text{id}_E$.

a. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u\circ v^{n+1} - v^{n+1}\circ u = (n+1)\alpha v^n$. En déduire que $\alpha = 0$.
b. Si E est de dimension finie, donner un argument plus simple.

4.43 Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On pose $F = \{f \in E \mid \int_0^1 f = 0\}$.

a. Montrer que tout $u \in E$ admet une unique primitive $T(u)$ dans F.

b. Montrer que T est linéaire, continue et calculer $|||T|||$.

4.6 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

4.44 *ENS Cachan PSI 2013* Marine DC.

Théorème de MARKOV-KAKUTANI : soit E un espace vectoriel normé et C une partie de E.
On dit que C est convexe si $\forall (x,y) \in C^2,\ \forall t \in [0;1],\ tx + (1-t)y \in C$. Une application $T : C \to C$ est dite une transformation affine de C si $\forall (x,y) \in C^2,\ \forall t \in [0;1],\ T(tx+(1-t)y) = tT(x) + (1-t)T(y)$.

a. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall (t_1, \cdots, t_p) \in [0;1]^p,\ \forall (x_1, \cdots, x_p) \in C^p$ si $\sum\limits_{k=1}^{p} t_k = 1$:

(i) : $\sum\limits_{k=1}^{p} t_k x_k \in C$; (ii) : $T\Big(\sum\limits_{k=1}^{p} t_k x_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{p} t_k T(x_k)$.

On admet le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS : "si C est un fermée borné non vide, de toute suite d'éléments de C on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément $x \in C$".
Soit C une partie convexe fermée et bornée non vide de E et $a \in C$, alors on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} T^k(a)$. On suppose T continue.

b. Montrer qu'il existe $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \in C$ et que x est un point fixe de T.

c. Donner un exemple de couple (C, T) tel que T admette un unique point fixe et un autre exemple tel que T admette plusieurs points fixes.

d. Soit $(T_1, \cdots, T_N)$ N transformations affines continues sur C qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe au moins un point fixe commun à toutes les transformations affines. Indication : on pourra faire une récurrence en montrant au préalable que $C' = \{x \in C \mid \forall k \in [\![1; N-1]\!],\ T_k(x) = x\}$ est un convexe fermé borné non vide. Donner un tel exemple $(C, T_1, \cdots, T_N)$.

4.45 *Mines PSI 2015* François-Xavier Solvar

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. A et B deux points distincts de la courbe de f tel que B appartienne à la tangente de f au point A. Montrer qu'il existe M distinct de A tel que A appartienne à la tangente de f au point M.

4.46 *ENS Cachan PSI 2016* Romain Morgavi

a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1+\lambda e^{i\theta}} d\theta = 0$.

b. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$. Supposons que Q ne possède aucune racine dans $D(a, r)$ (disque fermé de centre a et de rayon r) avec $r > 0$. Montrer que $I(Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{Q'(a+re^{i\theta})}{Q(a+re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta = 0$.

c. Que vaut $I(Q)$ si Q ne possède que a comme racine dans $D(a, r)$ d'ordre de multiplicité m ?
Soit $(P_k)_{k\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_n[X])^{\mathbb{N}}$ une suite de polynômes scindés dans $\mathbb{R}$ convergeant vers P. Le but est de montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $\exists a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ P(a) = 0$. Posons $r > 0$.

d. Montrer que $P \mapsto ||P|| = \underset{z\in D(a,r)}{Max} |P(z)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

e. Montrer qu'il existe une constante M telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ ||P'|| \leqslant M||P||$.
Soit $C(a, r)$ le cercle de centre a et de rayon r et posons $\mu = Min\big(\{|P(z)| \mid z \in C(a,r)\}\big)$.

f. Montrer que $\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant k_0,\ \forall z \in C(a,r),\ |P_k(z)| \geqslant \dfrac{\mu}{2}$.

g. Montrer que $\forall k \geqslant k_0,\ \dfrac{2\pi}{r}|I(P_k) - I(P)| \leqslant \dfrac{2}{\mu^2}.(2\pi).(||P'|| + M||P||)||P - P_k||$ et conclure.

4.47 *Centrale Maths1 PSI 2016* Léo Fusil

Si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, soit $||M||_\infty = \underset{1\leqslant i,j\leqslant n}{\mathrm{Max}} |m_{i,j}|$, $||X||_\infty = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_i|$.

a. Montrer que $||\,.\,||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $||MX||_\infty \leqslant n||M||_\infty||X||_\infty$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $\mathrm{Im}\,(A - I_n)$ sont supplémentaires en utilisant $B_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

c. Montrer que la suite $(B_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(A - I_n)$.

4.48 *X PSI 2017* Vincent Bouget I

Soit I un segment et $f : I \to I$ continue telle que $f(I) \subset I$.

a. Montrer que f admet un pont fixe sur I.

b. Montrer que pour tout segment $[a; b] \subset f(I)$, il existe $[c; d] \subset I$ tel que $f([c; d]) = [a; b]$.

4.49 *ENS Cachan PSI 2017* Clément Maurel I

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit C un convexe de E et $u \in E$; on dit que u est un point extrémal de C si et seulement si $C \setminus \{u\}$ est encore convexe.

a. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $||\,.\,||_2$?

b. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $||\,.\,||_1$?

c. Montrer qu'un point de C est extrémal si et seulement s'il n'est pas le milieu de deux points de C.

Soit E un espace euclidien qui est donc un espace vectoriel normé si on prend pour norme la norme euclidienne associée au produit scalaire de E. On note B la boule unité de E.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $|||u||| = \underset{x\in B}{\mathrm{Sup}}\, ||u(x)||$ et $C = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid |||u||| \leqslant 1\}$.

d. Montrer que les points extrémaux de C sont les automorphismes orthogonaux de E. Indication : on pourra utiliser sans démonstration la décomposition suivante : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists O \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists S \in S_n^+(\mathbb{R}),\ A = OS$.

4.50 *Mines PSI 2017* Maxime Pouvereau II

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Soit $f : [0; 1] \to E$ une fonction continue telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$. Prouver qu'il existe $t \in [0; 1]$ tel que $f(t)$ soit sur la frontière de A.

4.51 *X PSI 2018* Emeric Benoist

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^d$ euclidien canonique. Soit B_1 et B_2 deux boules fermées de centres x_1 et x_2 et de même rayon $r > 0$.

a. Trouver r_{min} le rayon minimal d'une boule qui contient $B_1 \cap B_2$.

b. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, r la borne inférieure de tous les rayons des boules fermées qui contiennent K.

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules fermées de rayon r_n et de centre x_n telles que B_n contient K pour tout entier n et $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r$.

Soit $z_n = \underset{k>n}{\mathrm{Sup}}(||x_k - x_n||)$. Vers quoi tend la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4.52 *X PSI 2018* Oihana Piquet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites reliées par la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b. Soit une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Est-ce que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge forcément ?

c. Soit une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ et qui possède une suite extraite convergente. Est-ce que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge forcément ?

4.53 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Antoine Secher

Soit E l'espace des fonctions continues, 1-périodiques, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}(|f(x)|$.

Soit g la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^*,\ g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+x)^2}+\frac{1}{(n-x)^2}\right)$.

a. Montrer que g est continue sur $]-1;1[$. Calculer $g(0)$.

b. Montrer que $\varphi \in E$ si $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + g(x)$ si $x \notin \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = 0$ si $n \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que $L \in \mathcal{L}(E)$ et L continue si $L(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Calculer $|||L||| = \operatorname*{Sup}_{f\in E, f\neq 0}\frac{||L(f)||_\infty}{||f||_\infty}$.

d. Montrer que $\forall x \notin \mathbb{Z},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

4.54 *Centrale Maths1 PSI 2018* Maëlle Casas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On note $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités au moins égales à 1. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?

b. Donner un polynôme annulateur P de degré p de A.

c. Soit Q un polynôme annulateur de A. Montrer que toute valeur propre de A est racine de Q.

En déduire que $(I_n, A, \cdots, A^{p-1})$ est libre.

d. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{C}_{p-1}[X],\ A^k = P_k(A)$.

e. Montrer qu'il existe un polynôme $U \in \mathbb{C}[X]$ tel que $L = U(A)$.

4.55 *Mines PSI 2018* Vincent Barreau et Peio Betbeder II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0,\cdots,a_n$ des complexes distincts deux à deux et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}^{n+1}$ définie par $\Phi(P) = (P(a_0),\cdots,P(a_n))$ est un isomorphisme.

b. En déduire que, pour tout entier $i \in [\![0;n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $L_i(a_i) = 1$ et $\forall j \in [\![1;n]\!]\setminus\{i\},\ L_i(a_j) = 0$.

c. Exprimer le polynôme caractéristique χ_A de A comme combinaison linéaire des polynômes précédents.

d. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[X]$ définie par $f(M) = \chi_M$ est continue.

Remarque : il doit manquer une question sur une certaine densité !!

4.56 *Mines PSI 2018* Florian Gaboriaud I

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+...}}}}$ (il y a n radicaux).

Par exemple $u_1 = \sqrt{a}$, $u_2 = \sqrt{a+\sqrt{b}}$ et $u_3 = \sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a}}}$.

a. Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Indication : on pourra s'intéresser au cas $a = b$.

b. Trouver un polynôme de degré 4 (dont les coefficients dépendent de a et b) admettant $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ comme racine.

4.57 *Mines PSI 2018* Claire Raulin I

Soit $(f,g) \in C^0([0;1],[0;1])^2$ tel que $f\circ g = g\circ f$.

a. On suppose que $\forall x \in [0;1],\ f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, ici $f^n(x)$ représente $f\circ\cdots\circ f$ composée n fois, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \geqslant n\alpha$. En déduire une contradiction.

b. En déduire qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

4.58 *Mines PSI 2018* Titouan Sancier I

Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*) \mid f \text{ bijective et } f' = f^{-1}\}$.

a. Trouver une fonction $f \in E$ de la forme $f : x \mapsto cx^\alpha$ où c et α sont réels.

b. Soit $f \in E$, donner la limite de f en 0. Prouver que f et f^{-1} sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que $f \in E$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.59 *Mines PSI 2019* Axel Brulavoine II

Soit E un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls a et b de E.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = ||a + tb||$.

a. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle lipschitzienne ?

b. Si elles existent, calculer $\lim\limits_{t \to \pm\infty} f(t)$.

c. Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a + tb \in B(0_E, 1)\}$ est un intervalle borné et ouvert ou que I est vide.

4.60 *CCP PSI 2019* Carla Chevillard II

Soit $E = C^2([0;1], \mathbb{R})$. On associe à toute fonction $f \in E$ les trois réels suivants :

$$N_0(f) = \int_0^1 |f(t)|dt,\ \ N_1(f) = \left|\int_0^1 f(t)dt\right| + \int_0^1 |f'(t)|dt \ \text{ et } \ N_2(f) = \left|\int_0^1 f(t)dt\right| + \left|\int_0^1 f'(t)dt\right| + \left|\int_0^1 f''(t)dt\right|.$$

a. Donner la définition d'une norme sur un espace vectoriel.

b. Les applications N_0, N_1, N_2 sont-elles des normes sur E ?

c. Montrer que $\forall f \in E,\ \exists c \in [0;1],\ f(c) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

d. Montrer que $\forall f \in E,\ N_0(f) \leqslant N_1(f)$. Existe-t-il $f \in E$ non nulle telle que $N_0(f) = N_1(f)$?

e. Existe-t-il une constante $k > 0$ telle que $\forall f \in E,\ N_1(f) \leqslant kN_0(f)$?

4.61 *TPE, EIVP PSI 2019* Maël Classeau I

Soit $S = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2 = I_3\}$.

a. L'ensemble S est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

b. L'ensemble S est-il stable par produit ?

c. L'ensemble S est-il fermé ?

d. L'ensemble S est-il borné ?

4.62 *X PSI 2020* Louis Carillo II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considère une famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_m)$ génératrice de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $N(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathrm{Max}}(|(v_i|x)|)$.

a. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b. Trouver une famille $\mathcal{F}$ telle que N soit la norme infini classique.

c. Trouver une famille $\mathcal{F}$ telle que N soit la norme 1 classique.

d. Montrer que la norme 2 classique n'est pas une norme N obtenue comme ceci.

4.63 *X PSI 2021* Clément Lopez II

a. Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

4.64 *X PSI 2021* Arthur Riché II

Soit $a \in \mathbb{C}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2$.
Trouver les valeurs de a telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Indication : traiter d'abord le cas réel.

4.65 *ENS Cachan PSI 2021* Titouan Nguyen

Pour une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, on pose $V(f) = \underset{n\geqslant 1}{\text{Sup}}\left(\underset{0\leqslant t_0\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant 1}{\text{Sup}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|f(t_k)-f(t_{k-1})\right|\right)\right)$. On note aussi $BV = \{f : [0;1] \to \mathbb{R} \mid V(f) < +\infty\}$. Pour une fonction $f \in BV$, on dit que f est à variations bornées.

a. Une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ lipschitzienne appartient-elle à BV ?

b. Une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ monotone appartient-elle à BV ?

c. Donner un exemple de fonction continue $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f \notin BV$.

d. Soit $f \in BV$, la fonction f est-elle bornée ?

e. L'application $N : BV \to \mathbb{R}_+$ définie par $N(f) = |f(0)| + V(f)$ fait-elle de BV un espace vectoriel normé ?

f. Si $(f, g) \in BV^2$ a-t-on nécessairement $fg \in BV$?

g. Soit $(f, g) \in BV^2$ avec $g : [0;1] \to [0;1]$ monotone, montrer que $f \circ g \in BV$.

h. Soit $(f, g) \in BV^2$ avec $g : [0;1] \to [0;1]$, la condition f monotone implique-t-elle que $f \circ g \in BV$?

4.66 *Centrale Maths1 PSI 2021* Tinaël Gelpe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ avec $p \geqslant 2$.

On suppose de plus que $\forall i \in [\![2;p]\!],\ |\lambda_i| < |\lambda_1| \quad (*)$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Tr}\ (A^k) \neq 0$, on pose $t_k = \dfrac{\text{Tr}\ (A^{k+1})}{\text{Tr}\ (A^k)}$.

a. Montrer que les t_k sont définis à partir d'un rang k_0 et que $(t_k)_{k\geqslant k_0}$ converge vers une limite à déterminer.

b. Les résultats de la question **a.** sont-ils encore vérifiés si $(*)$ ne l'est plus ?

c. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{A^k}{k}$.

4.67 *Mines PSI 2021* Esteban Poupinet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\exp_p(A) = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{A^k}{k!}$ pour $p \in \mathbb{N}$.

a. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E. Montrer que F est fermé.

b. Montrer que la suite $(\exp_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge. On note $\exp(A)$ sa limite.

c. Montrer que $\exp(A) \in \underset{k\in[\![0;n-1]\!]}{\text{Vect}}(A^k)$.

4.68 *ENS Cachan PSI 2022* Colin Herviou-Laborde I

Soit I un segment de $\mathbb{R}$, $E = C^0(I, \mathbb{R})$ et $f \in E$. On se donne une forme linéaire $u : E \to \mathbb{R}$. On dit que u est positive si on a $u(f) \geqslant 0$ pour toute fonction positive $f \in E$. On pose $e : x \to 1 \in E$.

a. Si u est positive, montrer que $\forall f \in E,\ |u(f)| \leqslant u(|f|)$.

b. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall f \in E,\ |u(f)| \leqslant C||f||_{\infty,I}$.

c. Calculer $\underset{\substack{f\in E\\ f\neq 0}}{\text{Sup}} \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}}$.

4.69 *ENS Cachan PSI 2022* Colin Herviou-Laborde II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $p_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $p_2(M) = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2}$ si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer p_2 est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Est-ce qu'on peut munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace euclidien telle que la norme euclidienne associée soit p_2. Si oui, donner ce produit scalaire.

c. Démontrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||MX||_2 \leqslant p_2(M)||X||_2$.

d. Calculer $\underset{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2}$.

4.70 *ENS Cachan PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a. Montrer que si f est lipschitzienne, alors f est continue.

b. Est-ce que le fait que f soit lipschitzienne implique que f soit dérivable ?

4.71 *ENS Cachan PSI 2022* Camille Pucheu I

Soit C une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

a. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C qui converge vers $\mathrm{Sup}(C)$.

On pose $X = \{|x - y| \mid (x, y) \in C^2\}$.

b. Montrer que X admet une borne inférieure et une borne supérieure.

c. Exprimer $\mathrm{Sup}(X)$ en fonction de $\mathrm{Sup}(C)$ et de $\mathrm{Inf}(C)$.

4.72 *ENS Cachan PSI 2022* Camille Pucheu II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et le produit scalaire défini dans $\mathbb{R}^n$ par $< x, y >= \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$.
On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour ce produit scalaire canonique).

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que si $\forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + bt \geqslant 0$, alors $b = 0$.

b. Soit B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < Bx, x >\geqslant 0$. Montrer que pour un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $< Bx_0, x_0 >= 0$, on a $Bx_0 = 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique à laquelle on associe $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $F(x) =< Ax, x >$.

c. Montrer que $\underset{x \in S}{\mathrm{Inf}}\, F(x)$ existe et que cette borne inférieure est atteinte.

d. Soit $\lambda_1 = \underset{x \in S}{\mathrm{Min}}\, F(x)$ et $e_1 \in S$ tel que $\lambda_1 =< Ae_1, e_1 >$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < (A - \lambda_1 I_n)x, x >\geqslant 0$.

e. Montrer que λ_1 est la plus petite valeur propre de A.

4.73 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Courmont II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. On suppose de plus que toutes les matrices M_k sont diagonalisables.

a. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$ et P unitaire, montrer que l'on a l'équivalence

$$(P \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]) \iff (\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^n).$$

c. La matrice M est-elle trigonalisable ?

4.74 *Centrale Maths1 PSI 2022* Florian Picq

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(A,B) \in E^2$ telles que $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose $< A, B >= \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$ et $||A|| = \sqrt{< A, A >}$.

a. Montrer que $\forall (A,B) \in E^2,\ < A, B >= \mathrm{Tr}\ (A^T B)$.

b. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^m$. En déduire que $\forall (A,B) \in E^2,\ ||AB|| \leqslant ||A||\,||B||$.

Soit $A \in E$ inversible et $F : E \to E$ définie par $F(M) = 2M - MAM$.

On considère une suite de matrices $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $AM_0 = M_0A$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ M_{p+1} = F(M_p)$.

c. Montrer que si $||I_n - AM_0|| < 1$ alors $\lim\limits_{p\to+\infty} M_p = A^{-1}$.

4.75 *Mines PSI 2022* Amandine Darrigade II

Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$, $f \in E$ et $\phi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$.

a. Montrer que ϕ définit un endomorphisme de E.

b. Déterminer le plus petit réel K_1 tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_1||f||_\infty$.

c. Déterminer le plus petit réel K_2 tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_2||f||_1$.

4.76 *Mines PSI 2022* Paul Lafon I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n(A) = I_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}A^k$.

a. Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $|a| < 1$ et $|b| < 1$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b. Si $A = \lambda I_2 + N$ avec $|\lambda| < 1$, $N \neq 0$ et $N^2 = 0$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c. Si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ |\lambda| < 1$, montrer que $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = I_2 + A$.

4.77 *Mines PSI 2022* Thibault Le Gal II

Soit f et g deux fonctions continues de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

On pose $A = \{x \in [0;1] \mid f(x) = x\}$.

a. Montrer que $A \neq \emptyset$ et que A admet un minimum et un maximum.

b. En déduire l'existence d'un réel $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

4.78 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, N est dite nilpotente d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ si $N^k = 0$ et $N^{k-1} \neq 0$.
On pose J_n la matrice dont tous les coefficients sont nuls à part ceux de la sur-diagonale qui valent 1.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle de la matrice M, notée $\exp(M)$ ou e^M, par $e^M = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{M^k}{k!}$.

a. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice k, montrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(X, NX, \cdots, N^{k-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En déduire que $k \leqslant n$.

b. On suppose que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice n, montrer que N est semblable à J_n.

c. Soit A, B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.
Montrer que $A + B$ est nilpotente et que $I_n + A$ est inversible.

d. Montrer que e^{J_n} est inversible.

e. Montrer que $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'indice n.

f. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que $Pe^{J_n}P^{-1} = e^{PJ_nP^{-1}}$.

g. Montrer qu'il existe une matrice $\tilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n = \tilde{N}e^{\tilde{N}}$.

4.79 *Mines PSI 2023* Pierre Dobeli II

a. Montrer que $O(n)$ n'est pas convexe.
b. Montrer que $O(n)$ est un fermé borné.
c. Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4.80 *Mines PSI 2023* Maxence Prieur I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour $n+1$ complexes distincts $a_0, a_1, \cdots, a_n$, on définit $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}^{n+1}$ par $\Phi(P) = \big(P(a_0), \cdots, P(a_n)\big)$.
a. Montrer que Φ est une bijection.
b. En déduire que $\forall i \in [\![0;n]\!],\ \exists! L_i \in \mathbb{C}_n[X],\ \big(L_i(a_i) = 1 \text{ et } \forall j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\},\ L_i(a_j) = 0\big)$.
c. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, trouver une expression de χ_M en fonction de $L_0, \cdots, L_n$.
d. Montrer que l'application $f : M \to \chi_M$ est continue.
e. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

4.81 *Mines PSI 2023* Antoine Vallade I

Soit E un espace normé, X une partie de E et C un convexe de E.
a. Montrer que $\overset{\circ}{X} \subset X \subset \overline{X}$.
b. Montrer que $\overset{\circ}{C}$ et $\overline{C}$ sont aussi des convexes.

4.82 *CCINP PSI 2023* Olivier Farje I

Soit $E = \big\{f \in C^1\big([0;1], \mathbb{R}\big) \mid f(0) = 0\big\}$ et N_1, N_2 les deux applications définies sur E par $N_1(f) = ||f + f'||_\infty$ et $N_2(f) = ||f'||_\infty$ (les normes infinies sont calculées sur $[0;1]$).
a. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.
b. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

4.7 Officiel de la Taupe

4.83 *OdlT Centrale PSI 2012/2013 planche 128II*

Soit $f :]0;1[\to \mathbb{R}$, dérivable et telle que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} xf'(x) = \mu \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mu = 0$.

4.84 *OdlT Mines PSI 2012/2013 planche 174I*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et convexe sur un intervalle I.
Montrer que : $\forall a \in I,\ \forall r \in \mathbb{R}_+,\ [a-r; a+r] \subset I \Longrightarrow \int_{a-r}^{a+r} f(t)dt \geqslant 2rf(a)$.
On suppose maintenant f de classe C^2 sur I et $f''(a) < 0$. Montrer que la propriété précédente n'est pas vérifiée. Indication : on pourra étudier les variations de $g(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t)dt - 2xf(a)$. Conclure.

4.85 *OdlT 2013/2014 X-Cachan PSI planche 72*

a. Montrer que l'ensemble E des fonctions lipschitziennes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un sous-espace de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
b. Montrer que $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Donner un supplémentaire de F.
c. Soit $0 < t < 1$; montrer que ϕ, qui à $f \in F$ associe g telle que $g(x) = f(x) - f(tx)$, est bien défini et que c'est un endomorphisme. Est-il injectif ?
d. Soit $(f, g) \in F^2$ tel que $g = \phi(f)$. Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(t^k x)$. Montrer que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$. Conclure.
e. Déterminer toutes les fonctions $f \in F$ telle que $f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x$.

4.86 *OdlT Mines PSI 2013/2014 planche 196II*

Soit un réel p. Montrer que : $\left(\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ |x^p-y^p|\leqslant|x-y|^p\right)\iff p\leqslant 1$.

4.87 *OdlT ENSAM PSI 2013/2014 planche 288III*

Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ transformant tout segment en un segment de même longueur.

4.88 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 165*

a. Montrer que $N : f\mapsto N(f)=\underset{[0;1]}{\text{Sup}}\,|f''+2f'+f|$ est une norme sur $E=\{f\in C^2([0;1],\mathbb{R})\mid f(0)=f'(0)=0\}$.

b. Soit $h(t)=f(t)e^t$ avec $f\in E$; montrer que $\forall t\in[0;1],\ h(t)=\displaystyle\int_0^t(t-u)h''(u)du$.

c. Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $||f||_\infty\leqslant aN(f)$ et minimiser a.

4.89 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 566II*

Montrer que si $0<p<1$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x+y|^p\leqslant|x|^p+|y|^p$ (on pourra montrer que $\forall t\geqslant 0$, $(1+t)^p\leqslant 1+t^p$).
$N(x)=|x|^p$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}$?

4.90 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 574II*

Donner l'égalité des accroissements finis et en faire une interprétation géométrique.
Soit f dérivable de I dans $\mathbb{R}$; montrer que si f' est bornée, f est lipschitzienne.