ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 5 SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

5.1 Modes de convergence

5.1 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)^{-n^2}$. On rappelle qu'en posant les intégrales de Wallis $W_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^p(\theta)d\theta$ pour $p \in \mathbb{N}$, on a $W_p \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2p}}$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f à déterminer.

b. Justifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x)dx$.

c. En effectuant le changement de variables $x = n\tan(\theta)$ dans I_n, trouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

d. Établir que : $\forall t \geqslant 0,\ t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$. En déduire que $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[0\,;\,\sqrt[4]{n}]} \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \left(e^{\frac{1}{2n}} - 1\right)$.

Majorer $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[\sqrt[4]{n}\,;+\infty]} \left|f_n(x) - f(x)\right|$ pour montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f est même uniforme.

5.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \neq 0,\ f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{1+n^2x^2}$.

a. Étudier la convergence simple, uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^*$.

b. Justifier l'existence, pour $n \in \mathbb{N}$, de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

5.3 *Centrale PSI 2012*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables définies sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
a. Donner la définition de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.
b. Montrer par un exemple qu'il est possible que la fonction f ne soit pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
Dorénavant f intégrable et il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant g(x)$.
c. Établir (sans utiliser le théorème de convergence dominée) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

5.4 Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n\cos(x)\sin^n(x)$.

5.5 *Mines PSI 2008 d'après RMS* Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie par les relations : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{f_n(t)}dt$.

5.6 *CCP PSI 2008 d'après RMS* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right)$. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$, puis uniforme sur $[-a; a]$ avec $a > 0$, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

5.7 *ENTPE PSI 2008 d'après RMS* Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \mapsto (\sin x)^{1/n}$.

a. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

b. Étudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$.

5.8 *Centrale PSI 2012* On pose, pour $n \geqslant 1$: $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{H_n}$.

Préciser l'ensemble de définition de $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ et que la convergence est normale sur $]0; a]$ pour tout $a \in]0; 1[$ mais qu'elle n'est pas normale sur $]0; 1]$. Prouver néanmoins que la convergence est uniforme sur $]0; 1]$.

5.9 *Théorème de* DINI Soit des fonctions $f_n : [a; b] \to \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. On suppose que pour tout $x \in [a; b]$, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme.

a. Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_\infty$.

b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a; b]$ tel que $||f_n||_\infty = f_n(x_n)$.

c. En observant que pour tout $p \leqslant n$, $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_\infty = 0$ et conclure.

5.2 Fonctions définies par une série de fonctions

5.10 Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

a. Quel est le domaine de définition de f ? Étudier la continuité de f sur celui-ci.

b. Montrer que f est strictement décroissante. Étudier la limite de f en $+\infty$.

c. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

5.11 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2^n x}$.

a. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; plus précisément trouver le rationnel r tel que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{r}{x}$.

5.12 *Centrale PSI 2012* Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

a. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Établir aussi que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner $f'(x)$ sous forme d'une somme.

c. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et, plus précisément, que $f(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\ln(2)}{x}$.

d. Prouver que l'on peut écrire, pour $x > 0$: $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{x}{(2px+1)\big((2p+1)x+1\big)}$.

Par une comparaison avec une intégrale, prouver l'existence et trouver la valeur de $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

5.13 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 282 II*

On définit, la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2 \ln(1+n)}$.

a. Trouver le domaine de convergence D de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

b. Montrer que $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe C^1 sur D.

5.14 On pose, pour $x > 0$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

a. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier sa monotonie.

b. Déterminer la limite puis un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

5.15 On pose, pour $x > -1$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

a. Montrer que S est définie et continue sur $]-1;+\infty[$. Étudier sa monotonie.
b. Pour $x > -1$, calculer $S(x+1) - S(x)$. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers -1^+.
c. Établir que $\forall p \in \mathbb{N},\ S(p) = H_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$. En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

5.16 On pose, pour $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

a. Montrer que S est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier sa monotonie.
b. Établir que : $\forall x > 0,\ S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.
c. Déduire des deux questions précédentes un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

5.17 On pose, pour $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$. On rappelle que : $\forall a \in \mathbb{R},\ e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$.

a. Montrer que S est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier sa monotonie.
b. Établir que : $\forall x > 0,\ xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.
c. Trouver aussi un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

5.18 Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = \left(1 - \frac{k}{x}\right)^x$ si $x \geqslant k$ et $f_k(x) = 0$ si $x < k$.

a. Étudier la convergence de $\sum_{k \geqslant 0} f_k$ sur $\mathbb{R}_+$.
b. En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$ si $u_n = \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{p}{n}\right)^n$ (on pourra commencer par poser $p = n - k$).

5.19 Soit $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ telle que $f_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k}$ si $x \geqslant k$ et $f_k(x) = 0$ si $x < k$.

a. En utilisant le binôme de Newton, montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p)$.
b. Quel est le mode de convergence de $\sum_{k \geqslant 0} f_k$ sur $\mathbb{R}_+$? En déduire que $\lim_{p \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

5.20 *CCP PSI 2008 d'après RMS* Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}$.

a. Quel est le domaine de définition de f ? En quels points f est-elle dérivable ?
b. Calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$. On rappelle que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5.3 Convergence dominée

5.21 *ENSAM PSI 2007 d'après RMS* Soient $f \in C^0([0;1], \mathbb{R})$ et $g \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ intégrable.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = n \int_0^1 f(t)\, g(nt) dt$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

5.22 *Mines PSI 2008 d'après RMS* Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt$.

En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} \left[\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$.

5.23 *Centrale PSI 2012* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue qui vérifie $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ et $\ell' = \lim_{x \to -\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-1}^{1} f(nx) dx$. Justifier f est bornée sur $\mathbb{R}$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

5.24 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n^2}dx$. Indication : on pourra introduire les fonctions $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n^2}$ si $x \in [0; n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

5.25 Donner les 2 premiers termes du développement asymptotique de I_n quand $n \to +\infty$ si $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

5.26 Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ continue, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 nf(t)e^{-nt}dt$.

5.27 <u>*Centrale PSI 2013*</u> Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2+\cdots+t^n}}$.

a. Montrer que la suite est définie et calculer u_1.
b. Montrer que cette suite tend vers $\frac{2}{3}$.
c. Montrer que $u_n - \frac{2}{3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{I}{n^{\frac{3}{2}}}$ avec $I > 0$ qu'on ne cherchera pas à calculer.

5.4 Intégration terme à terme (différentes méthodes)

5.28 Montrer que $\int_0^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

5.29 Pour tout $\alpha > 0$, établir que $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}$.

5.30 Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\int_0^{+\infty}\frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}$.

5.31 Établir que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.

5.32 Établir que pour tout $x > 0$, $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

5.33 Soit $\alpha > 0$. On pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{e^t-1}dt$.

a. Montrer la convergence de $I(\alpha)$.
b. Donner une expression de $I(\alpha)$ en fonction de Γ et ζ.

5.34 <u>*Mines PC*</u> Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right]^n dx$.

Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

5.35 Calculer, pour $p \in \mathbb{Z}$, $I_p = \int_0^{2\pi}\frac{e^{ip\theta}}{2+e^{i\theta}}d\theta$.

5.36 Pour tout $\alpha > 0$, établir que $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}$.

5.37 Établir que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t-1}dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

5.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

5.38 *Centrale PSI 2013* Nicolas

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = nx^a e^{-nx^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
a. Étudier en fonction de a la convergence simple puis normale de $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver un équivalent de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ quand x tend vers 0.

5.39 *Centrale PSI 2014* Thibault

On pose $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + n^2 x}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de S.

b. Montrer que S est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$. Justifier que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Trouver un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

d. Montrer que $S(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

5.40 *Centrale PSI 2014* Aymeline

Soit Δ une partie de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de Δ dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément vers $g : \Delta \to \mathbb{C}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Δ qui converge vers un élément $y \in \Delta$.
Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \big(f_n(x_n) - g(y)\big) = 0$.

5.41 *Mines PSI 2014* Mathias

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - i\theta} d\theta$.

5.42 *Mines PSI 2014* Lucie

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{1 + n^2}$.
a. Trouver l'ensemble de définition de f.
b. Donner la classe de f.
c. Trouver une équation différentielle dont f est solution.

5.43 *CCP PSI 2014* Mohammed

Étude de $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln(n + x)}{n^2}$. Montrer la convergence de la série, qu'elle est C^1 sur $\mathbb{R}_+$, puis montrer que la fonction somme est strictement croissante.

5.44 *CCP PSI 2014* Soufiane

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1 + e^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1 + n^2}$.

5.45 *E3A PSI 2014* Jean-Baptiste

On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{1 + kx}}$.
a. Prouver que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0; +\infty[$, puis uniformément sur $]1; +\infty[$.
b. On note S la limite de cette suite de fonctions. Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 1$.

5.46 *Centrale Maths1 PSI 2015* Arnaud Dubessay

Soit $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n+x}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Donner le domaine de définition de f. Où f est-elle continue ?

b. f peut-elle coïncider avec une fonction polynomiale sur un segment ?

5.47 *Mines PSI 2015* Jean-Baptiste Biehler et Mathieu Gaultier

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|x-a_n|}{3^n}$.

Étudier la définition de f, sa continuité et sa dérivabilité.

5.48 *Mines PSI 2015* Mathieu Dubes

Soit $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ si $n \geqslant 2$.

a. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer l'inégalité suivante pour $x > 0$: $0 \leqslant R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \leqslant \dfrac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$.
Que peut-on dire de la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$?

5.49 *Mines PSI 2015* Adrien Gruson

On note $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et on pose $u_n(t) = \dfrac{t^n \ln(t)}{H_n}$.

a. À quelle condition sur t la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(t)$ converge-t-elle ?

b. Montrer que pour tout $a \in]0;1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $]0;a]$, mais pas sur $]0;1]$.

c. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $]0;1]$.

5.50 *Mines PSI 2015* Paul Mondou

Soit un segment $[a;b]$, et une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a;b]$ qui converge uniformément.
Étudier la convergence des suites $(\underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

5.51 *Mines PSI 2015* Gaël Pérez

Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^2}\,dt$.

a. Convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$? On note $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ s'il y a convergence.

b. f est-elle continue en -1 ?

c. Équivalent simple de f en 1.

5.52 *Mines PSI 2015* Guillaume Soustrade

Étude de la convergence de la suite puis de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$.

5.53 *Mines PSI 2015* Julien Venne

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon R et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ de rayon R'.

a. Que dire de la valeur de R' par rapport à R ? Calculer R' si $R > 0$.

b. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ pour $x \in]-R'; R'[$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

5.54 *CCP PSI 2015* Oriana Peltzer

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$.

a. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

b. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme.

5.55 *Petites Mines PSI 2015* Marin de Bonnières

Soit $a \in]0;1[$ et $u_n = \int_0^a x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ et $v_n = \int_0^1 x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que u_n et v_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Écrire $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ sous forme d'une intégrale.

c. Reprendre la question précédente avec v_n. $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge-t-elle ?

5.56 *Centrale Maths1 PSI 2016* Antoine Badet

I Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{nx}{x^2 + n^a}$.

a. Déterminer $\Delta = \{a \in \mathbb{R}_+^* \mid \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}\}$.

b. Montrer que $u = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ si $a \in \Delta$.

c. Déterminer $\Delta' = \{a \in \mathbb{R}_+^* \mid \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}\}$.

Y a-t-il convergence uniforme ailleurs ?

5.57 *Centrale Maths1 PSI 2016* Pauline Bourda

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in [0;+\infty[$ et $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$. On note alors $S_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Trouver une CNS sur α pour que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

b. Trouver une CNS sur α pour que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ pour tout α.

5.58 *Mines PSI 2016* Erwann Alric I

On définit $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}dx$.

a. Donner l'ensemble des valeurs de α sur lequel I est définie et de classe C^1.

b. Donner deux réels a et b tels que $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b}{n^2 + a}$.

c. Déterminer la limite de I en $+\infty$.

5.59 *Mines PSI 2016* Thomas Corbères I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$.

a. Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément ?

b. Pour quelles valeurs de α la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle uniformément ?

5.60 *Mines PSI 2016* Jean Migliorini II

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f y est continue. f est-elle de classe C^1 sur D ?

c. f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$? Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

5.61 *Mines PSI 2016* Mathieu Perrin II

Étudier les convergences, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ et de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.

Comparer les quantités $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.

5.62 *Mines PSI 2016* Hugo Saint-Vignes II

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nt(1-t)}{n^2t^2 + (1-t)^2}dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Justifier que I_n existe et calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

b. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n$.

5.63 *Mines PSI 2016* Hugo Tarlé I

Soit $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$ et on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver une expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ faisant intervenir une série numérique.

5.64 *CCP PSI 2016* Sylvin Bielle I

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{2n}$ si $x \in]0;1]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais pas uniformément vers $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ que l'on précisera.

5.65 *CCP PSI 2016* Matthieu Cadiot II

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

a. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. On pose $v_n = 1 - u_n$. Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n v_n$? De $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$?

5.66 *CCP PSI 2016* Samy Essabar II

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$.

a. Montrer que : $\forall t \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$.

b. En déduire que $\forall t \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t - 1\right| \leqslant \frac{te^t}{n}$.

c. Étudier la convergence simple sur $[0;1]$ de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $I_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$.

d. Montrer que cette convergence est uniforme.

5.67 *CCP PSI 2016* Léo Fusil II

On définit $f_n : x \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Montrer la continuité de f sur $\mathbb{R}$. Y a-t-il convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5.68 *CCP PSI 2016* Marie Rebière I

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$. En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Donner le domaine de convergence I de f. La fonction f est-elle continue sur I ?

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et donner $f(I)$.

5.69 *X PSI 2017* Vincent Bouget II

Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

a. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de I.

b. Calculer sa somme.

5.70 *Centrale Maths1 PSI 2017* Alexandre Chamley et Sam Pérochon

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}dx$.

a. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.

b. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du$.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $I_{n+2} + I_n = 2I_{n+1}$.

d. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

5.71 *Centrale Maths1 PSI 2017* Vincent Meslier

Soit $F = \{f \in C^1([0;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$. Soit $g \in F$, strictement croissante et telle que $g'(1) = 0$. On définit les fonctions $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = g(nx)e^{x-1}$ si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = e^{x-1}$ si $\frac{1}{n} < x \leqslant 1$.

On pose enfin $I_n = \int_0^1 |f_n(x) - f'_n(x)| dx$.

a. Montrer que $f_n \in F$.

b. Montrer que $(I_n)_{n \geqslant 1}$ est bien définie et trouver sa limite ℓ.

c. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

5.72 *Centrale Maths1 PSI 2017* Grégoire Verdès

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}} dx$.

a. Vérifier que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie.

b. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \geqslant 0}$.

c. Trouver un équivalent de I_n. Indication : montrer d'abord que $\forall x > 0,\ \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.

5.73 *Mines PSI 2017* Célia Detrez II

a. Montrer la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2} dt$.

b. Montrer que $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

Indication : on admettra avant le chapitre sur les séries entières que : $\forall t \in [0;1[,\ \ln(1-t^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n}$.

c. Calculer la valeur exacte de I avec des constantes usuelles.

5.74 *Mines PSI 2017* Corentin Gatellier II Soit, pour $n \geqslant 1$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Donner l'ensemble de définition de f.

b. Étudier les différents types de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ sur des intervalles de $\mathbb{R}$.

c. Étudier la continuité et la dérivabilité de f ?

d. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

5.75 *Mines PSI 2017* Valentin Gorce II

Faire un développement asymptotique à trois termes de $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

5.76 *Mines PSI 2017* Tom Huix II

Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt$.

Comparer $\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

5.77 *Mines PSI 2017* Sam Mamers I On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\text{Arctan}(n+x) - \text{Arctan}(n)\big)$.

a. Étudier la convergence simple et uniforme de cette série de fonctions sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

5.78 *Mines PSI 2017* Clément Maurel II

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\int_0^x tf(t)dt \underset{+\infty}{=} o(x)$.

5.79 *CCP PSI 2017* Louise Piton I

Pour $n \geqslant 0$, soit $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$. Déterminer la nature et la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

5.80 *CCP PSI 2017* Roland Tournade I

Soit $n \geqslant 1$, on définit $g_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$.

Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $I_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$.

a. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in [0;1],\ |g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$.

b. En déduire que $\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in [0;1],\ \left|\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t - 1\right| \leqslant \frac{te^t}{n}$.

c. Étudier la convergence simple de $(I_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0;1]$.

d. Montrer que cette convergence est uniforme.

5.81 *E3A PSI 2017* Corentin Gatellier

On considère les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^2}{x^4+n}$ pour $n \geqslant 1$.

a. Convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$? On note f la somme de cette série.

b. Convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

c. Montrer qu'il n'existe aucun intervalle (non singleton) de $\mathbb{R}$ sur lequel $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement.

d. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

5.82 *ICNA PSI 2017 sans préparation* Aloïs Blarre

Soit, pour $n \geqslant 0$, la fonction $f_n : \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5.83 *ICNA PSI 2017 avec préparation* Ninon Toussaint

Soit $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Déterminer l'ensemble de définition de ζ.

Étudier la continuité et la dérivabilité de ζ. Montrer que $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)dx = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

5.84 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Eneko Jauretche II

Que dire de la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n} dx$ en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+$?
Et pour l'absolue convergence ?

5.85 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Raphaël Pobeda

Soit un entier $\ell \geqslant 2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique telle que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right],\ g(x) = |x|$.

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ si $g_n(x) = \dfrac{g(\ell^n x)}{\ell^n}$.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(y) - g(x) \geqslant -|y - x|$.

b. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

c. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, a et h deux réels tels que $\ell^m a \in \mathbb{Z}$ et $|h| = \ell^{-2m-1}$. Montrer que $f(a + h) - f(a) \geqslant |h|$.

d. Montrer qu'il n'existe aucun intervalle $]\alpha; \beta[\in \mathbb{R}$ tel que f y soit monotone.

e. Calcul de $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx$.

5.86 *Centrale Maths1 PSI 2018* Colin Baumgard et Elio Garnaoui

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $u_n : t \mapsto \dfrac{t^n \ln(t)}{H_n}$.

a. Pour quelles valeurs de t la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(t)$ converge-t-elle ? On note $S(t)$ la somme.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout intervalle $]0; a]$ avec $a \in]0; 1[$.

c. Montrer que S est continue sur $]0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$.

5.87 *Centrale Maths1 PSI 2018* Jean Boudou

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{2n - 1}{2n} u_n$.

b. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$ avec $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. En déduire la valeur exacte de α.

5.88 *Centrale Maths1 PSI 2018* Victor Bourdeaud'hui

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \dfrac{e^t}{1 + t^n}$ et $\varphi_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$.

a. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Y a-t-il convergence uniforme ?

b. Montrer que $\forall \alpha > 0,\ \exists! x_n(\alpha) > 0,\ \displaystyle\int_0^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt = \alpha$.

c. Si $\alpha > e - 1$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(\alpha)$.

d. Si $\alpha < e - 1$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(\alpha)$.

5.89 *Centrale Maths1 PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$. En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Donner le domaine de convergence I de f. La fonction f est-elle continue sur I ?

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et donner $f(I)$.

Questions de cours :

- définition et résultats liés aux séries géométriques.
- convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
- montrer que si une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers une fonction f sur un segment $[a; b]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

5.90 *Centrale Maths1 PSI 2018* Marion Lebrun

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et sous réserve de convergence, $h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln(n)}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de h.

b. Montrer que h est continue sur D.

c. Étudier les limites de h aux bornes de D.

d. Trouver un équivalent simple de h aux bornes de D.

5.91 *Mines PSI 2018* Gauthier Crosio I

Soit l'équation $(E)\ :\ u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right)dt$ d'inconnue $u \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On définit $u_0 : x \mapsto 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} : x \mapsto 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right)dt$.

a. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et en déduire la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On note u sa limite.

b. Prouver que u est solution de (E). Résoudre entièrement (E).

5.92 *Mines PSI 2018* Erwan Dessailly II

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est continue sur D.

b. Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner $f'(x)$ sous forme d'une somme d'une série.

c. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et, plus précisément, trouver un équivalent de $f(x) - \ell$ quand x tend vers $+\infty$.

5.93 *Mines PSI 2018* Elio Garnaoui I

a. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

b. Exprimer $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ comme somme d'une série numérique. Et $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$?

5.94 *Mines PSI 2018* Thomas Gerbeaud I

Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\geqslant 0} C_n$ converge absolument.

a. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_n x^n}{n!}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx$.

5.95 *Mines PSI 2018* Martin Gros II

a. Montrer la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}dt$.

b. Montrer que $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

Indication : on admettra avant le chapitre sur les séries entières que : $\forall t \in [0;1[,\ \ln(1-t^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n}$.

c. Calculer la valeur exacte de I avec des constantes usuelles.

5.96 *Mines PSI 2018* Pierre Le Bouille I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$ et $u_n = v_n - 1$.

a. Montrer que v_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On admet que Γ est dérivable et que $\Gamma'(1) \neq 0$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) - \Gamma(1)$.

d. Donner la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

5.97 *Mines PSI 2018* Charlotte Nivelle I

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $g : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a. Déterminer les domaines de définition de f et g. Étudier la continuité de f et g.

b. Montrer que $\forall x > 1,\ g(x) = (1 - 2^{1-x}) f(x)$.

c. Déterminer les limites de f et g en $+\infty$.

5.98 *Mines PSI 2018* Raphaël Pobeda II

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$.

a. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ est bien définie.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2} du$.

c. Montrer l'existence et donner la valeur de $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

5.99 *Mines PSI 2018* Thibaud Vendrely I

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Donner une expression plus simple de $\prod\limits_{n=0}^{N} (1 + x^{2^n})$.

c. En déduire une expression de $f(x)$.

5.100 *CCP PSI 2018* Charlotte Beaune et Florian Gaboriaud I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} dt$.

a. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|$.

b. Prouver l'existence de I_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

c. Démontrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ est de limite nulle.

d. Trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

5.101 *CCP PSI 2018* Peio Betdeder et Paul Simon II

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Prouver l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$ et montrer que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(3/2)$.

$\boxed{\textbf{5.102}}$ *CCP PSI 2018* Erwan Dessailly et Baptiste Egreteau I

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

$\boxed{\textbf{5.103}}$ *CCP PSI 2018* Pauline Lamaignère II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

a. Quel est le domaine de définition de f ?

b. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

c. Y a-t-il convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

d. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Qu'en déduire quant à la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

$\boxed{\textbf{5.104}}$ *E3A PSI 2018* Titouan Sancier I

a. Existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{\sqrt{t}}dt$?

b. Décomposer $\dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{\sqrt{t}}$ en somme de série sur $]0;1[$.

c. En déduire la valeur de I.

$\boxed{\textbf{5.105}}$ *E3A PSI 2018* Benoit Souillard

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(nx)}{e^x\mathrm{ch}\,(nx)}dx$.

a. Montrer que I_n est bien définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

c. On pose $u_n = I_n - \ell$. Déterminer les natures de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$.

$\boxed{\textbf{5.106}}$ *Centrale Maths1 PSI 2019* Ulrick Blé

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = u_n(x) + \dfrac{1}{u_n(x)}$.

On définit aussi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{u_n(x)}$.

a. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?

b. Étudier la convergence simple de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\textbf{5.107}}$ *Centrale Maths1 PSI 2019* Axel Brulavoine

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

a. Déterminer les ensembles de définition de θ et ζ.

b. Montrer que θ est de classe C^1 sur son ensemble de définition.

c. Montrer que $\forall x > 1,\ \theta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$.

d. Calculer $\theta(1)$. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+.

f. Obtenir cet équivalent par une autre méthode.

5.108 *Centrale Maths1 PSI 2019* Florian Guyomard

On donne, pour $x \in [0;1]$ et $(n,r) \in \mathbb{N}^2$, le réel $S_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k-nx)^r$.

Pour $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, on définit aussi, pour $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{n}{k}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

a. Rappeler la formule de TAYLOR reste intégral.

b. Montrer que $\forall x \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n,0}(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n,1}(x) = 0$.

On admet que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ S_{n,2}(x) = nx(1-x)$.

c. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que l'on ait la majoration $\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \dfrac{Mx(1-x)}{n}$.

d. En déduire la convergence uniforme de la suite de fonctions $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0;1]$.

5.109 *Centrale Maths1 PSI 2019 et Mines PSI 2019* Tanguy Sommet et Julien Tissot I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

On définit aussi $f :]-1;0[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t} dt$.

a. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

b. Montrer que f est bien définie et que $\forall x \in]-1;0[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n.n!}$.

5.110 *Centrale Maths1 PSI 2019* Julien Tissot et Noah Vicens

Pour un entier $n \geqslant 2$, on pose $I_n = n \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^n) dx$ en cas de convergence. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

a. Énoncer le théorème de convergence dominée.

b. Montrer l'existence de I_n pour tout entier $n \geqslant 2$.

c. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

5.111 *Mines PSI 2019* Ulrick Blé II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

En cas de convergence, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Définir la convergence normale et uniforme d'une série de fonctions et donner le lien logique entre elles.

b. Déterminer l'ensemble de définition D de S. Montrer que S est continue sur D.

c. Montrer que S est dérivable en 1 et calculer $S'(1)$.

5.112 *Mines PSI 2019* Tom Boileau I

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle strictement positive et décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_n : x \mapsto a_n x^n(1-x)$.

a. Étudier la convergence simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0;1]$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[0;1]$ si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_n}{n}$ converge.

c. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

d. Reprendre les questions précédentes sur l'intervalle $[-1;1]$.

5.113 *Mines PSI 2019* Maël Classeau I

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

d. La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

5.114 *Mines PSI 2019* Louis Destarac I

Pour $n \geqslant 1$, on définit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^\alpha$.

a. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;1]$.

b. Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[0;1]$.

5.115 *Mines PSI 2019* Quentin Vacher II

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$.

a. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et convergente. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

b. Trouver un équivalent de I_n en $+\infty$.

5.116 *CCP PSI 2019* Augustin Aumont et Enola Soenen I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)$.

a. Montrer que $\forall t \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$, $\left|\ln(1+t) - t\right| \leqslant 2t^2$.

b. Déterminer le domaine D de convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$. On note $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

c. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur D ?

5.117 *CCP PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré et Fabien Dupuis II

Soit a un réel positif ou nul. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{nx(x^2+a)e^{-x}}{nx+1}$.

a. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

b. Que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0;1]$ en fonction de a ?

c. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[R;1]$ dès que $0 < R < 1$.

5.118 *CCP PSI 2019* Tom Boileau et Charles Broquet I

On donne l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer l'existence de $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,dt$.

b. Montrer que $\displaystyle I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

5.119 *CCP PSI 2019* Thomas Brémond et Lucas Maisonnave I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Montrer la convergence de $(I_n)_{n\geqslant 0}$ vers un réel ℓ à déterminer.

b. Montrer que $\displaystyle I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$.

c. En déduire que $\displaystyle I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

5.120 *CCP PSI 2019* Carla Chevillard I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$.

a. Pour quelles valeurs de x la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle ?

b. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\displaystyle\operatorname{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$. Qu'en déduit-on ?

c. Déterminer le domaine de définition D de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Y a-t-il convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ pour $x \in D$?

d. Y a-t-il convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur D ?

e. Soit $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $I_a = \mathbb{R} \setminus [-a; a]$.

5.121 *CCP PSI 2019* Maël Classeau II

Pour $n \geqslant 2$, soit $u_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\displaystyle u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c. Montrer que $\displaystyle\forall x \in D,\ \forall n \geqslant 2,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.

d. En déduire que la fonction $\displaystyle S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D.

e. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

5.122 <u>*CCP PSI 2019*</u> Louis Destarac et Victor Margueritte I

Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

a. Déterminer le domaine de définition en fonction des valeurs de a.

Dans la suite de l'exercice, on impose $|a| < 1$.

b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$ pour $x > 0$.

d. Trouver un équivalent de S en 0.

e. Donner la limite de S en $+\infty$. Et un équivalent de S en $+\infty$?

5.123 <u>*CCP PSI 2019*</u> Romain Galea I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $I_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$.

a. Montrer que $\forall t \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$.

b. En déduire que $\forall t \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g_n(t) - 1| \leqslant \frac{te^t}{n}$.

c. Étudier la convergence simple de $(I_n)_{n \geqslant 1}$ sur $[0;1]$.

d. Y a-t-il convergence uniforme de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0;1]$?

5.124 <u>*CCP PSI 2019*</u> Lola Josseran I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$.

a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Trouver les limites de f en $\pm\infty$.

c. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

d. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$. Qu'est-ce que ça signifie pour le graphe de f ?

5.125 <u>*CCP PSI 2019*</u> Auriane Luquet I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$. En cas de convergence, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Déterminer le domaine de definition D de S.

b. Montrer que S est continue sur D.

c. Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} u_n'$ converge uniformément sur D. Indication : utiliser une comparaison série/intégrale.

d. Montrer que S est de classe C^1 sur D.

5.126 <u>*CCP PSI 2019 et CCP PSI 2015*</u> Julien Tissot I et Agatha Courtenay I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$.

a. Étudier la convergence de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

b. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}du$.

5.127 *Petites Mines PSI 2019* Elaia Mugica II

Soit $I = \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \dfrac{x-1}{(n+1)(n+x)}$. En cas de convergence, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Montrer que S est de classe C^1 sur I et calculer S'.

b. Calculer $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+x}$ et en déduire la valeur de $S(p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

c. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

5.128 *Mines PSI 2021* Quentin Granier I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.

a. Montrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une fonction g qu'on déterminera.

b. Montrer que cette convergence est en fait uniforme sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ mais que g ne l'est pas.

Qu'en déduire vis-à-vis d'un théorème du cours ?

5.129 *Mines PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \mapsto \ln(1 + e^{-nx})$ et, en cas de convergence, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition I de f.

b. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I.

c. Montrer que f admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ et la déterminer.

d. On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

5.130 *CCINP PSI 2021* Mathilde Arnaud I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

a. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ la fonction somme de cette série de fonctions.

b. S est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

c. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Trouver une expression de $S(x)$ avec des fonctions usuelles.

e. En déduire la valeur de $S(0)$.

5.131 *CCINP PSI 2021* Thomas Boudaud I

Soit $\varphi : I = [-a; a] \to \mathbb{R}$ continue, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |\varphi(x)| \leqslant c|x|$.
On cherche les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues telles que (P) : $f(0) = 0$ et $\forall x \in I,\ f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \varphi(x)$.

a. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ converge pour $x \in I$ et que $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ est continue sur I.

b. Montrer que S est solution de (P).

c. Montrer que la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle.

d. En déduire l'ensemble des solutions de (P).

e. Si on suppose φ de classe C^1 sur I, montrer que S est aussi de classe C^1 sur I.

5.132 *CCINP PSI 2021* Johan Haramboure I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

a. Montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer la convergence simple de $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$.

c. Justifier que $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $[-1;1]$.

5.133 *CCINP PSI 2021* Juliette Maricourt I

Pour $n \geqslant 2$, soit $u_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c. Montrer que $\forall x \in D,\ \forall n \geqslant 2,\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

d. En déduire que la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D.

e. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

5.134 *Centrale Maths1 PSI 2021* Yuan Le Guennic

a. Montrer que $\forall u \in]-\infty; 1[,\ \ln(1-u) \leqslant -u$.

b. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

On admet que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$ (intégrales de Wallis).

c. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5.135 *Mines PSI 2021* Thomas Boudaud I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$ et $Q_n = \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \dbinom{2n+1}{2p} X^p$.

a. Déterminer les racines de P_n et Q_n.

b. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

c. Montrer que $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \dfrac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\tan^2(x)} + 1$.

d. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

e. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ existe.

f. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

g. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.

5.136 *Mines PSI 2021* Quentin Granier IV et Baptiste Pozzobon III et Raffi Sarkissian III

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

5.137 *Mines PSI 2021* Alexandre Marque II

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{sh}\,(t)}\,dt$ converge.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{sh}\,(t)}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1+(2n+1)^2}$.

5.138 *CCINP PSI 2021* Laurine Texier II

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^n(t)}$.

a. Montrer que la fonction I_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite à déterminer.

c. La suite de fonctions $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

d. Donner une relation entre $I_{n+2}(x)$ et $I_n(x)$.

e. En déduire la valeur, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^n(t)}$.

5.139 *Centrale Maths1 PSI 2022* Manon Odelot

Soit $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n(1+n^2|x|)}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Étudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

Questions de cours :

- Donner la formule de Taylor reste intégral.
- Donner le théorème des valeurs intermédiaires.

5.140 *Mines PSI 2022* Louis Bardinet I

Soit $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ si $n \geqslant 2$.

a. Étudier la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. A t-on convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$?

c. Que peut-on dire de la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$?

5.141 *Mines PSI 2022* Paul Mayé I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. Trouver un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers 0^+.

d. Quelles sont les variations de f ?

e. Trouver les limites de f en $\pm\infty$.

f. Tracer la courbe représentative de f.

$\boxed{\textbf{5.142}}$ *Mines PSI 2022* Alban Soyez I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Trouver le domaine de continuité de f, son domaine de dérivabilité.

c. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

$\boxed{\textbf{5.143}}$ *CCINP PSI 2022* Margaux Millaret II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$.

a. Pour quelles valeurs de x la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle ?

b. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\operatorname{Sup}\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$. Qu'en déduit-on ?

c. Déterminer le domaine de définition D de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. Y a-t-il convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ pour $x \in D$?

d. Y a-t-il convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur D ?

e. Soit $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $I_a = \mathbb{R} \setminus [-a; a]$?

$\boxed{\textbf{5.144}}$ *CCINP PSI 2022* Élouan Princelle I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x(1 + n^{\alpha}e^{-nx})$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Déterminer les valeurs de α telles que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})\,dx$.

d. Peut-on intervertir les symboles “intégrale” et “limite” comme ci-dessus si $\alpha = \dfrac{3}{2}$?

$\boxed{\textbf{5.145}}$ *CCINP PSI 2022* Camille Pucheu II

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi : I = [-a; a] \to \mathbb{R}$ continue, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |\varphi(x)| \leqslant c|x|$.
On cherche les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues telles que (P) : $f(0) = 0$ et $\forall x \in I,\ f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \varphi(x)$.

a. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ converge pour $x \in I$ et que $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ est continue sur I.

b. Montrer que S est solution de (P).

c. Montrer que la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle.

d. En déduire l'ensemble des solutions de (P).

e. Si on suppose φ de classe C^1 sur I, montrer que S est aussi de classe C^1 sur I.

$\boxed{\textbf{5.146}}$ *CCINP PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche I

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5.147 *Mines-Télécom PSI 2022* Paul Sterlin II

Soit $t \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n^2 + t^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Étudier la continuité de f sur D.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et trouver un équivalent de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

5.148 *X PSI 2022* Lucas Lacampagne I

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée telle que $f(0) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}} dt$.

a. Trouver un équivalent de a_n.

b. Que se passe-t-il si $f = \sin$?

5.149 *ENS Cachan PSI 2022* Noé Chassagne I

On définit, sous réserve d'existence, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q(x) dx$.

a. Montrer l'existence de $I_{p,q}$ pour toutes valeurs des entiers naturels p et q.

b. Calculer $I_{p,q}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

c. En déduire que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

5.150 *Centrale Maths1 PSI 2022* Joël Lascoumes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{t} dt$.

a. Montrer que u_n est bien défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

c. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge.

d. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ diverge.

5.151 *Mines PSI 2022* Olivier Courmont II

On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt$.

5.152 *Mines PSI 2022* Achille Domens I

Exprimer $\int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1 + t^2} dt$ puis $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^2}{1 + t^2} dt$ sous forme de série.

5.153 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche III

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^{-1/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx$.

5.154 <u>*CCINP PSI 2022*</u> Thibault Sourdeval II

En cas de convergence, on pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} dx$.

a. Montrer que I existe.

b. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

c. En déduire la valeur numérique de I. Indication : on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5.155 <u>*Centrale Maths1 PSI 2023*</u> Antoine Jeanselme

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$.

a. Montrer la convergence simple de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$.

b. Est-ce qu'il y a convergence uniforme de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ sur $]0;1]$?

c. Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

5.156 <u>*Mines PSI 2023*</u> Rémi Darrieumerle I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

a. Déterminer les ensembles de définition de η et ζ.

b. Pour $x > 1$, exprimer $\eta(x)$ en fonction de $\zeta(x)$.

c. Montrer que η est de classe C^1 sur son ensemble de définition.

d. Trouver deux réels a et b tels que $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{=} \frac{a}{x-1} + b + o(1)$.

5.157 <u>*Mines PSI 2023*</u> Alban Dujardin I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. Trouver un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers 0^+.

d. Quelles sont les variations de f ?

e. Trouver les limites de f en $\pm\infty$.

f. Tracer la courbe représentative de f.

5.158 <u>*CCINP PSI 2023*</u> Paul-Antoine Baury-Carpentier II

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}$.

On pose $f : x \mapsto \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\varphi(x+n) + \varphi(x-n)\big)$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est 1-périodique.

c. Montrer que $\varphi \times g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

5.159 <u>*CCINP PSI 2023*</u> Hugo Delval II

On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ en cas de convergence.

a. Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ pour tout $a > 0$.

c. f est-elle continue sur D_f ? Calculer sa limite en $+\infty$.

d. Montrer que $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt$. En déduire un équivalent de f en 0^+.

e. Étudier la convergence normale et uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur D_f.

5.160 <u>*CCINP PSI 2023*</u> Fares Kerautret I

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}x^n}{n!}$.

En cas de convergence, on note $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

c. Étudier la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f(x)$.

d. Soit $a > 0$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0;a]$.

e. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

5.161 <u>*CCINP PSI 2023*</u> Sacha Meslier II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin\left(nx\,e^{-nx^2}\right)$.

a. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.

b. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a;1]$ avec $a \in]0;1[$.

c. En considérant $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[-1;1]$?

5.162 <u>*Centrale Maths1 PSI 2023*</u> Arthur Séguette

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}}dx$.

a. Vérifier que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie.

b. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d. En déduire un équivalent de I_n.

5.163 <u>*Mines PSI 2023*</u> Paul Bats I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

a. Trouver le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D.

c. Pour $x \in D$, calculer $xf(x) - f(x+1)$.

d. En déduire des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$.

e. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

5.164 *Mines PSI 2023* Raphaël Déniel III et Tom Graciet III

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

5.165 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer I

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$ et $\displaystyle v_n = \int_2^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n dx$.

a. Montrer que $\displaystyle v_n \underset{+\infty}{\sim} n \int_0^1 e^{-1/t}\,dt$.

b. En déduire un équivalent simple de u_n.

5.166 *CCINP PSI 2023* Bader Ben Amira I

Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^x}$ et, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $\displaystyle I_{n,p} = \int_0^1 x^p \ln^n(x)\,dx$.

a. Montrer l'existence de $I_{n,p}$ pour toutes valeurs des entiers naturels n et p.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N},\ I_{n,p} = -\dfrac{n}{p+1} I_{n-1,p}$.

c. Montrer que f est intégrable sur $]0;1]$.

d. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

5.167 *CCINP PSI 2023* Arthur Melnitchenko II et Marie-Lys Ruzic II

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,dt$ existe et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2}$.

5.168 *Mines-Télécom PSI 2023* Armand Dépée II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$.

a. Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge.

c. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} u_n$.

e. Montrer que $\displaystyle u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ (question rajoutée).

5.6 Officiel de la Taupe

5.169 *OdT 2012/2013 Mines PSI planche 183 I*

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, pour que $\displaystyle I_n = \int_0^1 t^n \big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt$ soit convergente. Calculer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} I_n$ converge-t-elle ?

$\boxed{5.170}$ *OdlT 2012/2013 CCP PSI planche 211 II*

Donner l'ensemble de définition de la série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ et étudier sa continuité et sa dérivabilité sur cet ensemble. Exprimer S.

$\boxed{5.171}$ *OdT 2012/2013 Télécom SudParis PSI planche 252 II*

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-t})dt$.

$\boxed{5.172}$ *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 152I*

Calculer $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta} d\theta$.

$\boxed{5.173}$ *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 161I*

Pour $t \in [0;1]$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}\Big(t - f_n(t)^2\Big)$.

Étudier les convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

$\boxed{5.174}$ *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 229II*

On définit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ par $\forall n \geqslant 1,\ f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

a. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

b. Montrer que $g = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ admet une limite en $+\infty$ et calculer cette limite.

$\boxed{5.175}$ *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 236II*

a. Montrer que l'ensemble $E = \left\{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+) \mid \exists \alpha > 1,\ f(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)\right\}$ est stable pour le produit des fonctions et que toute fonction f de E est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $f \in E$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de E vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 1$ et $h_n(x) = nh(nx)$.

Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h_n(x)dx$ converge et trouver sa limite.

$\boxed{5.176}$ *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 238II*

a. Ensemble de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

c. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

$\boxed{5.177}$ *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 275I*

a. Résoudre $\text{sh}\,(t) = 1$.

b. On note $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$ et $I_n = \int_0^\alpha \text{sh}^{\,n}(t)dt$. Étudier la convergence de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

c. Montrer que $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$ puis trouver un encadrement et un équivalent de I_n.

5.178 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 286I*

On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et f la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$, lorsqu'elle existe.

a. Donner l'ensemble D_f de définition de f.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ $(a>0)$. Étudier sa convergence normale sur D_f.

c. f est-elle continue sur D_f ? Calculer sa limite en $+\infty$.

d. Montrer que $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt$. En déduire que $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

5.179 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 291I*

a. Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}dt}{e^t-1}$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Simplifier $f(x-1)-f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ sous forme de série.

c. Peut-on obtenir ce résultat par une autre méthode ?

5.180 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 293II*

Pour $t \in]0;1]$, on pose $f_{n,p}(t) = t^n(\ln t)^p$, $\Phi(t) = t^t$ et $I = \displaystyle\int_0^1 \Phi(t)dt$.

a. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^n}$ converge et justifier que I est définie.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_{n,p}(t)dt$ existe et calculer sa valeur.

c. Montrer que $I = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{k}\Big)^k$.

5.181 *OdlT 2014/2015 E3A PSI planche 318II*

Pour $f_0 : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue, on pose $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$ pour $x \in [a;b]$.

a. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$? On note F la somme de cette série.

b. Montrer que $\forall x \in [a;b]$, $F(x) = f_0(x) + e^x \displaystyle\int_a^x e^{-t} f_0(t)dt$.

5.182 *OdlT 2014/2015 E3A PSI planche 322III*

Donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}dx$.

5.183 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 114I*

Étudier les convergence simple et uniforme de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = 0$ si $|x| \geqslant \dfrac{1}{n}$ et $f_n(x) = n - n^2|x|$ si $|x| \leqslant \dfrac{1}{n}$. Si Φ est continue sur $\mathbb{R}$ et $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\Phi(x)dx$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5.184 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 115II*

Montrer que $f(t) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{1+nt}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Calculer sa limite en $+\infty$ et montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

5.185 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 117II*

Montrer que $\zeta(s) = \sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^s}$ est définie et de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.

Donner les variations de ζ et sa limite en $+\infty$. Donner un équivalent de ζ en 1^+.

5.186 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 124II*

Soit (f_n) une suite uniformément convergente de fonctions continues sur $[a;b]$; que dire des suites de terme général $u_n = \underset{x\in[a;b]}{\mathrm{Max}}\, f_n(x)$ et $v_n = \underset{x\in[a;b]}{\mathrm{Min}}\, f_n(x)$?

5.187 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 125II* Domaine de convergence de $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$.

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer cette intégrale.

5.188 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 236I*

Résoudre $\mathrm{sh}\, x = 1$. Trouver la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \mathrm{sh}^n t\,dt$.

Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$, en déduire un encadrement puis un équivalent de I_n.

5.189 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 237I et 243II*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$. Domaine de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$.

Soit $S(x)$ sa somme ; montrer que S est de classe C^1 sur D.

5.190 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 242II*

La série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

5.191 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 244I* Convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx$.

Écrire I sous la forme d'une série numérique à l'aide du développement en série entière de $\ln(1-x)$.

5.192 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 245II*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n(x) = \frac{1}{n+xn^2}$. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge ; on note Δ cet ensemble et $S(x)$ la somme. Montrer que S est C^1 sur Δ.

On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; donner un équivalent simple de S en $+\infty$.

5.193 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 246I*

Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n}$ est convergente et que $I = \int_0^1 t^t dt$ existe. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $f_{n,p}(t) = t^n(\ln t)^p$.

Montrer que $\int_0^1 f_{n,p}(t)dt$ existe et la calculer. Montrer enfin que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

5.194 *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 267II*

Équivalent en $+\infty$ de $I_n = \int_0^1 \big(\ln(1+t)\big)^n dt$.

5.195 *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 270I*

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}dx$.

Montrer que $I(\alpha) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a}{n^2+b}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

En déduire un équivalent de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

5.196 *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 279I*

Existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx$. Montrer que $I = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{1+n^2}$.

5.197 *OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 286II*

Montrer la convergence et la continuité de $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que f est équivalent à $\frac{1}{x}$ en 0^+.

5.198 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 40III*

Calculer $\int_0^1 x^n \ln x dx$. Montrer que $\int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. En calculer la valeur exacte.

5.199 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 107I*

Justifier que $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1 - x\sin^2(t)} dt$ est définie sur $]-\infty; 1[$. Développer f en série entière.

5.200 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 108I*

Justifier l'existence de $\int_0^1 e^{-t} \ln(t) dt$ puis en donner une valeur approchée sous forme de nombre rationnel à 10^{-3} près (on pourra faire apparaître un développement en série entière usuel).

5.201 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 115I*

Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$. Équivalent de f en $+\infty$?

5.202 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 117I*

Établir la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ si $f_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n$.
La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge-t-elle ?

5.203 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 159*

Montrer la convergence pour $x \in \mathbb{R}^*$ de $f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$. f admet-elle une limite en $+\infty$?

Si oui la calculer. Étudier également l'existence d'une limite en 0. On note $\tilde{f}$ la fonction prolongée par continuité en 0 ; trouvez une série de fonctions $S(x)$ coïncidant avec $\tilde{f}$ sur un intervalle $[0, h[$.

5.204 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 160*

Montrer, pour $a > 0$, que $I_a : x \mapsto \int_0^x \frac{t^{a-1}}{t+1} dt$ est C^1 sur son ensemble de définition. Ensemble de définition de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+a}$? Trouver une équation différentielle vérifiée par S, puis une relation entre I et S.

5.205 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 203II*

Montrer la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geqslant 0}$ si $f_n(x) = x^n \frac{e^{-x}}{n!}$ puis étudier $\sum_{n \geqslant 0} f_n$.

5.206 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 207I*

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $f_n(0)=0$ et, pour $x>0$, $f_n(x)=x\sin^{2n}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0;1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

5.207 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 212I*

Convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $f_n(x)=\cos\left(\dfrac{(n+1)x}{n}\right)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment ? Sur $\mathbb{R}$?

5.208 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 217I*

Domaine de convergence D de $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n\ln(n)}$. La convergence est-elle normale sur D ? On note R_n le reste d'ordre n. Montrer que $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ et en déduire que S est continue. S est-elle intégrable ?

5.209 *OdlT 2016/2017 ENSEA PSI planche 252I*

Énoncer le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ réelles bornées, telles que $\exists c<d,\ \forall x\in[c;d],\ \big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. Montrer que $\exists\varphi_n\in\mathbb{R},\ a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nx+\varphi_n)$.

Calculer $I_n=\displaystyle\int_c^d(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))^2\,dx$. Montrer que $I_n\geqslant\dfrac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{4}$ à partir d'un certain rang. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers 0.

5.210 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 113I*

Soit $n\geqslant 1$, on note $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ et $u_n(t)=\dfrac{t^n\ln(t)}{H_n}$ pour $t>0$.

Déterminer le domaine de définition de $S(t)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_k(t)$ et montrer que S converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0;a]$ avec $a\in]0;1[$. En est-il de même sur $]0;1[$?

Montrer que S est continue sur $]0;1]$. Est-elle dérivable sur ce même intervalle ?

5.211 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 114I et compléments planches Mines PSI 178I et CCP PSI 441I*

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $u_n(x)=\ln(1+e^{-nx})$; on donne $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

Donner le domaine de définition I de $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}u_k(x)$.

Montrer que f est continue et décroissante sur I.

Trouver la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de f en 0. Déterminer $f(I)$.

5.212 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 120I*

Étudier les convergences simple et uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ si $u_n:x\mapsto\dfrac{e^{-nx}}{1+n}$.

On note f sa somme ; f est-elle continue ? Dérivable ? Donner ses limites en 0 et $+\infty$.

5.213 *OdlT 2017/2018 ENSAM PSI planche 241II*

Existence de $I=\displaystyle\int_0^1\ln x\ln(1-x)dx$. Montrer que $I=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)^2}$ puis calculer I avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

5.214 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 153I*

Existence de $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} dx$. Montrer que I est de classe C^1.

Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{b + n^2}$.