SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 4 ESPACES VECTORIELS NORMÉS

4.1 Normes et équivalence

4.1 **a.** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose la fonction $f_{x,y} : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_{x,y}(t) = xt + y$. D'abord, f est continue sur le segment $[0;1]$ donc $N(u) = ||f_{x,y}||_{\infty,[0;1]}$ existe. Comme f est affine, elle est croissante ou décroissante donc $\underset{[0;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f_{x,y}| = \mathrm{Max}(|f_{x,y}(0)|, |f_{x,y}(1)|)$. Or $f_{x,y}(0) = y$ et $f_{x,y}(1) = x+y$. Ainsi, $N(u) = \mathrm{Max}(|y|, |x+y|)$.

• Séparation : si $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $N(u) = 0$ alors $\mathrm{Max}(|y|, |x+y|) = 0$ donc $|y| = |x+y| = 0$ ce qui implique $y = x+y = 0$ d'où $u = (x,y) = (0,0)$.

• Homogénéité : soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme la norme infinie (dans $\mathbb{R}^2$) est elle-même homogène d'après le cours, $N(\lambda u) = \mathrm{Max}(|\lambda x|, |\lambda x + \lambda y|) = \mathrm{Max}(|\lambda|\,|x|, |\lambda|\,|x+y|) = |\lambda|\,\mathrm{Max}(|y|, |x+y|)) = |\lambda|\,N(u)$.

• Inégalité triangulaire : soit $(u = (x,y), v = (x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, la norme infinie vérifie est elle-même l'inégalité triangulaire : $N(u+v) = \mathrm{Max}(|y+y'|, |x+x'+y+y'|) \leqslant \mathrm{Max}(|y|, |x+y|) + \mathrm{Max}(|y'|, |x'+y'|) = N(u)+N(v)$. On pouvait aussi dire que $|y+y'| \leqslant |y|+|y'| \leqslant N(u)+N(v)$ car $N(u) = \mathrm{Max}(|y|, |x+y|) \leqslant |y|$ et $N(v) = \mathrm{Max}(|y'|, |x'+y'|) \leqslant |y'|$. De même, $|x+x'+y+y'| \leqslant |x+y|+|x'+y'| \leqslant N(u)+N(v)$ car $N(u) = \mathrm{Max}(|y|, |x+y|) \leqslant |x+y|$ et $N(v) = \mathrm{Max}(|y'|, |x'+y'|) \leqslant |x'+y'|$. Ainsi, on trouve à nouveau la majoration $N(u+v) = \mathrm{Max}(|y+y'|, |x+x'+y+y'|) \leqslant \mathrm{Max}(N(u)+N(v), N(u)+N(v)) = N(u)+N(v)$.

b. Soit $u = (x,y)$, $N(u) \leqslant 1 \iff \mathrm{Max}(|y|, |x+y|) \leqslant 1 \iff (-1 \leqslant y \leqslant 1$ et $-1 \leqslant x+y \leqslant 1)$ donc en notant les quatre droites $D_1 : y = 1$, $D_2 : y = -1$, $D_3 : x+y = 1$ et $D_4 : x+y = -1$, la boule unité B (pour la norme N est la zone fermée située en dessous de D_1, au dessus de D_2, en dessous de D_3 et au dessus de D_4 : B est donc le parallélogramme $PQRS$ avec $P = (0,1)$, $Q = (-2,1)$, $R = (0,-1)$ et $S = (2,-1)$.

On voit sur le dessin (à faire) que la plus petite boule fermée de centre $(0,0)$ contenant B est celle de rayon $\beta = \sqrt{5}$ et que la plus grande boule fermée de centre $(0,0)$ incluse dans B est celle de rayon $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

• Soit $u = (x,y) \in B$, alors $|x| = |x+y-y| \leqslant |x+y|+|y| \leqslant 1+1 = 2$ et $|y| \leqslant N(u) = 1$ donc $x^2+y^2 \leqslant 4+1 = 5$ donc $u \in B_f(0_{\mathbb{R}^2}, \sqrt{5})$.Ainsi, $B \subset B_f(0_{\mathbb{R}^2}, \sqrt{5})$. Si on prend $r < \sqrt{5}$, alors Q est dans B mais pas dans $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, r)$ car $||(-2,1)||_2 = \sqrt{5}$; d'où la minimalité de $\sqrt{5}$.

• Soit $u = (x,y) \in B_f\Big(0_{\mathbb{R}^2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$, alors $|y| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant 1$ et, classiquement, $(x+y)^2 = 2(x^2+y^2) \leqslant 2 \times (1/2) = 1$ donc $|x+y| \leqslant 1$, ainsi $N(u) \leqslant 1$ d'où $u \in B$. Ainsi, $B_f\Big(0_{\mathbb{R}^2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) \subset B$. Si on prend $r > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors $u = \Big(\dfrac{r}{\sqrt{2}}, \dfrac{r}{\sqrt{2}}\Big)$ est dans $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, r)$ mais pas dans B car $N(u) = \mathrm{Max}\left(\sqrt{2}r, \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}r > 1$ donc B n'est pas inclus dans $B_f\Big(0_{\mathbb{R}^2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ n'est pas inclus dans B ; d'où la maximalité de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ces inclusions reviennent à l'équivalence des normes $||.||_\infty$ et N avec $\sqrt{2}N(u) \leqslant ||u||_\infty \leqslant \sqrt{5}N(u)$ et au fait que ces constantes sont optimales, $\sqrt{2}$ est maximale et $\sqrt{5}$ est minimale.

4.2 **a.** On vérifie de manière classique que E est bien un espace vectoriel car c'est un sous-espace vectoriel de $C^1([0;1],\mathbb{R})$. De plus, pour $f\in E$, la fonction $3f+f'$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc y est bornée ce qui justifie l'existence de $N(f)=||3f+f'||_{\infty,[0;1]}$.

• Séparation : si $f\in E$ et $N(f)=0$ alors $3f+f'=0$ avec $f(0)=0$. C'est une équation différentielle avec condition de Cauchy. Les solutions de $(E)\ :\ y'+3y=0$ sont les fonctions $y:t\mapsto \lambda e^{-3t}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ mais la condition initiale $f(0)=0$ impose $\lambda=0$. On trouve donc $f=0$ comme attendu.

• Homogénéité : soit $f\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, comme la norme infinie est elle-même homogène d'après le cours, on a $N(\lambda f)=||3\lambda f+\lambda f'||_{\infty,[0;1]}=||\lambda(3f+f')||_{\infty,[0;1]}=|\lambda|\,||3f+f'||_{\infty,[0;1]}=|\lambda|N(f)$.

• Inégalité triangulaire : soit $(f,g)\in E^2$, la norme infinie vérifie l'inégalité triangulaire d'après le cours, $N(f+g)=||3(f+g)+(f+g)'||_{\infty,[0;1]}=||3f+f'+3g+g'||_{\infty,[0;1]}\leqslant ||3f+f'||_{\infty,[0;1]}+||3g+g'||_{\infty,[0;1]}=N(f)+N(g)$.

b. Soit $f\in E$, posons $g=3f+f'$ de sorte que f soit solution sur $[0;1]$ de l'équation différentielle $y'+3y=g$. Les solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y'+3y=0$ sont les fonctions $y:t\mapsto\lambda e^{-3t}$ et, par la méthode de variation de la constante, on trouve que $y_0:t\mapsto e^{-3t}\displaystyle\int_0^t e^{3u}g(u)du$ est une solution particulière. Ainsi, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t\in[0;1],\ f(t)=\Big(\lambda+\displaystyle\int_0^t(e^{3u}g(u))du\Big)e^{-3t}$. Comme $f(0)=0$ par hypothèse, on a $\lambda=0$ donc $\forall t\in[0;1],\ f(t)=e^{-3t}\displaystyle\int_0^t e^{3u}g(u)du$.

Ou plus simplement : $\forall t\in[0;1],\ e^{3t}f(t)=[e^{3u}f(u)]_0^t=\displaystyle\int_0^t\big(f(u)e^{3u}\big)'du=\int_0^t\big(3f(u)+f'(u)\big)e^{3t}dt$ donc $\forall t\in[0;1],\ |f(t)|\leqslant e^{-3t}\displaystyle\int_0^t e^{3u}||g||_{\infty,[0;1]}du=e^{-3t}\Big[\frac{e^{3u}}{3}\Big]_0^tN(f)=\frac{1-e^{-3t}}{3}N(f)\leqslant\frac{N(f)}{3}$ ainsi $||f||_\infty\leqslant\dfrac{N(f)}{3}$.

Si on impose par exemple $g=1$, on a $f'+3f=1$ donc $N(f)=1$ et $\forall t\in[0;1],\ f(t)=\dfrac{1-e^{-3t}}{3}$ avec les calculs précédents donc $||f||_{\infty,[0;1]}=\dfrac{1}{3}$. Ceci prouve que la constante $\dfrac{1}{3}$ ci-dessus est la plus petite possible puisque la fonction non nulle $f_0:t\mapsto\dfrac{1-e^{-3t}}{3}$ fournit l'égalité.

Si $f_n:x\mapsto x^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $f_n\in E$ et $||f_n||_\infty=f_n(1)=1$ et $N(f_n)=\underset{t\in[0;1]}{\text{Sup}}|3t^n+nt^{n-1}|=n+3$ car $g_n:t\mapsto 3t^n+nt^{n-1}$ est positive, croissante sur $[0;1]$: $||f_n'||_{\infty,[0;1]}=g_n(1)$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{N(f_n)}{||f_n||_{\infty,[0;1]}}=+\infty$ ce qui justifie que $||\,.\,||_\infty$ (sur $[0;1]$) ne domine pas N : $||\,.\,||_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

4.3 Pour la séparation pour N_2, si $f\in E$ et $N_2(f)=0$ alors $f+f'=0$ avec $f(0)=0$ et on résout une équation différentielle pour constater que $f=0$. Les autres conditions sont simples à vérifier. Il est clair que $N_2\leqslant N_1$ car $||\,.\,||_\infty$ est une norme. De plus, si $f\in E$, on a : $\forall x\in[0;1],\ |f(x)+f'(x)|\leqslant N_2(f)$ donc $|(f(x)e^x)'|\leqslant N_2(f)e^x$ et en intégrant, cela donne $|f(x)e^x|\leqslant N_2(f)(e^x-1)$ donc $|f(x)|\leqslant M(1-e^{-1})$; ainsi $|f'(x)|\leqslant M(2-e^{-1})$ et $N_1(f)\leqslant(3-2e^{-1})N_2(f)$. Elles sont donc équivalentes.

4.4 **a.** Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec $f(0)=f'(0)=0$ pour la séparation de N. Le reste est classique.

b. Soit $f\in E$, on pose $g=f+2f'+f''$ qui est continue et on utilise la méthode de variation des constantes (voir équations différentielles du second ordre plus tard dans l'année) pour avoir (avec $f(0)=f'(0)=0$) : $\forall x\in[0;1],\ f(x)=\Big(x\displaystyle\int_0^x g(t)e^tdt-\int_0^x tg(t)e^tdt\Big)e^{-x}$. On majore ensuite brutalement $|x|\leqslant1$, $|e^x|\leqslant e$ et $|e^{-x}|\leqslant1$ et $|g(t)|\leqslant||g||_\infty$ pour avoir : $|f(x)|\leqslant 2e||g||_\infty$ d'où $||f||_\infty\leqslant 2e\,N(f)$ (certainement pas optimal).

4.5 **a.** Si $||f||_\varphi = 0$, alors f s'annule là où φ ne s'annule pas. Par continuité de f, $f = 0$.

b. $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$ est continue sur un segment donc : $\varphi_1 \leqslant k\varphi_2$; ainsi $||\,.\,||_{\varphi_1} \leqslant k||\,.\,||_{\varphi_2}$. On conclut par symétrie.

c. Non car on peut poser $f_n : x \mapsto (1-x)^n$ et, en faisant deux études de fonctions, avoir les équivalents : $||f_n||_x = \dfrac{1}{n+1}\Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big)^n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{en}$ et $||f_n||_{x^2} = \Big(\dfrac{2}{n+2}\Big)^2\Big(1 - \dfrac{2}{n+2}\Big)^n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{e^2n^2}$.

4.6 **a.** Si $||f||_\varphi = 0$, alors f s'annule là où φ ne s'annule pas. Par continuité de f, $f = 0$.

b. $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$ est continue sur un segment donc : $\varphi_1 \leqslant k\varphi_2$; ainsi $||\,.\,||_{\varphi_1} \leqslant k||\,.\,||_{\varphi_2}$. On conclut par symétrie.

c. Non car on peut poser $f_n : x \mapsto (1-x)^n$ et $||f_n||_x = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $||f_n||_{x^2} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

4.7 **a.** Pour tout entier $(i_0, j) \in [\![1;n]\!]^2$, par définition du maximum, on a $|m_{i_0,j}| \leqslant \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |m_{i,j}|$. En sommant ces inégalités sur la ligne i_0, on obtient $\forall i_0 \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |m_{i,j}| = N_1(M)$ ce qui montre N_1 domine N_2 car $\forall M \in E$, $N_2(M) = \underset{1\leqslant i_0\leqslant n}{\text{Max}} \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}|\Big) \leqslant N_1(M) = 1.N_1(M)$ (1). Or on a égalité dans l'inégalité (1) pour la matrice $M = E_{1,1} \neq 0$. Ainsi, la constante optimale (minimale) α est $\alpha = 1$. En effet, s'il existait une constante $\alpha > 1$ telle que $\forall M \in E$, $\alpha N_2(M) \leqslant N_1(M)$, alors pour $M = E_{1,1}$, on aurait $N_2(M) = N_1(M) = 1$ donc $\alpha \leqslant 1$ ce qui est absurde.

b. Pour tout entier $(i, j_0) \in [\![1;n]\!]^2$, comme on somme des quantités positives, $|m_{i,j_0}| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$. Ainsi, en passant au maximum, $\forall j_0 \in [\![1;n]\!]$, $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |m_{i,j_0}| \leqslant \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = N_2(M)$ donc, en sommant ces inégalités pour toutes les colonnes, $N_1(M) = \sum\limits_{j_0=1}^{n} \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |m_{i,j_0}| \leqslant nN_2(M)$ (2). Or on a égalité dans l'inégalité (2) pour la matrice $M = I_n \neq 0$. Ainsi, la constante optimale (minimale) β est $\beta = n$ (comme avant).

4.8 **a.** L'inégalité est claire si a est nul ou b est nul. Si $a > 0$, on étudie l'application $\varphi_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(t) = \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}t^q - at$. φ_a est dérivable et $\forall t > 0$, $\varphi_a'(t) = t^{q-1} - a$ donc φ_a est minimale pour $t_0 = a^{1/(q-1)}$ en lequel elle vaut $\varphi_a(t_0) = 0$ car $p = \dfrac{q}{q-1}$. Ainsi φ_a est positive et on a l'inégalité voulue.

b. On applique l'inégalité de la question **a.** à $a = |a_{i,j}|$ et $b = |b_{i,j}|$ pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ et on somme, ce qui donne l'inégalité $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}b_{i,j}| \leqslant \dfrac{1}{p} \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^p + \dfrac{1}{q} \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{i,j}|^q = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ par hypothèses.

c. Si tous les coefficients d'une des deux matrices sont nuls, cette inégalité se ramène à $0 \leqslant 0$: ça va ! Sinon, on a $\alpha = \Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^p\Big)^{1/p} > 0$ et $\beta = \Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{i,j}|^q\Big)^{1/q} > 0$ et on peut appliquer l'inégalité de la question **b.** avec $\dfrac{a_{i,j}}{\alpha}$ dans le rôle de $a_{i,j}$ et $\dfrac{b_{i,j}}{\beta}$ dans celui de $b_{i,j}$. Comme sont respectées les conditions $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \Big|\dfrac{a_{i,j}}{\alpha}\Big|^p = \dfrac{1}{\alpha^p} \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^p = 1$, il vient $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \Big|\dfrac{b_{i,j}}{\beta}\Big|^q = \dfrac{1}{\beta^q} \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{i,j}|^q = 1$.

Ce qui donne $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \Big|\dfrac{a_{i,j}b_{i,j}}{\alpha\beta}\Big| \leqslant 1$ puis $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}b_{i,j}| \leqslant \alpha\beta = \Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{i,j}|^q\Big)^{1/q}$.

d. À nouveau l'inégalité de la question **b.** avec $a_{i,j}$ à la place de $a_{i,j}$ (ça c'est bon) et $(a_{i,j} + b_{i,j})^{p-1}$ à la place de $b_{i,j}$: $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \big(|a_{i,j}+b_{i,j}|^{p-1}\big)^q = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \big(|a_{i,j}+b_{i,j}|\big)^{(p-1)q} = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}+b_{i,j}|^p$ car $(p-1)q = p$.

Ainsi $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}||a_{i,j} + b_{i,j}|^{p-1} \leqslant \left(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j} + b_{i,j}|^p\right)^{1/q}$ et par symétrie entre x

et y, on obtient : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}||a_{i,j}+b_{i,j}|^{p-1}\leqslant\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p\right)^{1/q}$.

Alors, comme $\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]^2,\ |a_{i,j}+b_{i,j}|^p\leqslant(|a_{i,j}|+|b_{i,j}|)|a_{i,j}+b_{i,j}|^{p-1}$ par inégalité triangulaire, on a : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}||a_{i,j}+b_{i,j}|^{p-1}+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}||a_{i,j}+b_{i,j}|^{p-1}$ d'où on déduit :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p\leqslant\left(\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p\right)^{1/q}.$$

Si $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p=0$, l'inégalité demandée est vraie. Sinon, on divise l'inégalité précédente par $\displaystyle\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p\right)^{1/q}>0$: $\displaystyle\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p\right)^{1-\frac{1}{q}}\leqslant\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}|^p\right)^{1/p}$ or $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$ par hypothèse et on obtient l'inégalité souhaitée.

Dans tous les cas : $\displaystyle\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}+b_{i,j}|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{i,j}|^p\right)^{1/p}$.

e. Clairement : $\displaystyle\big(\underset{1\leqslant k,l\leqslant n}{\mathrm{Max}}|a_{k,l}|\big)^p\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^p\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\big(\underset{1\leqslant k,l\leqslant n}{\mathrm{Max}}|a_{k,l}|^p\big)$ et on passe à la racine p-ième. On en déduit que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}||A||_p=||A||_\infty$.

f. Pour $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, on a $|a_{i,j}|\leqslant||A||_q$ donc $\dfrac{|a_{i,j}|}{||A||_q}\leqslant 1$. Comme $1<p<q$, on en déduit que $\dfrac{|a_{i,j}|^q}{||A||_q^q}\leqslant\dfrac{|a_{i,j}|^p}{||A||_q^p}$, on somme et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{|a_{i,j}|^q}{||A||_q^q}\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{|a_{i,j}|^p}{||A||_q^p}\Longleftrightarrow 1\leqslant\frac{||A||_p^p}{||A||_q^p}$ donc $||A||_q\leqslant||A||_p$.
Ensuite on applique l'inégalité de HÖLDER en paramétrant correctement : $a_{i,j}^p$ à la place de $a_{i,j}$, 1 à la place de $b_{i,j}$, $\dfrac{p}{q}<1$ à la place de $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{q-p}{q}<1$ à la place de $\dfrac{1}{q}$; on vérifie la condition $\dfrac{p}{q}+\dfrac{q-p}{q}=1$ et on obtient $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|^p\leqslant\Big(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(|a_{i,j}|^p)^{q/p}\Big)^{p/q}\Big(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}1\Big)^{(q-p)/q}$: $||A||_p\leqslant n^{2/p-2/q}||A||_q$.
Ces constantes sont optimales car l'inégalité de gauche est une égalité pour $A=E_{1,1}$ et celle de droite pour $A=(1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

4.9 **a.** • L'inégalité est claire si a est nul ou b est nul. Si $a>0$, on étudie l'application $\varphi_a:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(t)=\dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}t^q-at$. φ_a est dérivable et $\forall t>0$, $\varphi_a'(t)=t^{q-1}-a$ donc φ_a est minimale pour $t_0=a^{1/(q-1)}$ en lequel elle vaut $\varphi_a(t_0)=0$ car $p=\dfrac{q}{q-1}$. Ainsi φ_a est positive et on a l'inégalité voulue.

• On peut surtout utiliser la concavité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ car, comme $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, on a $\ln\left(\dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q\right)\geqslant\dfrac{1}{p}\ln(a^p)+\dfrac{1}{q}\ln(b^q)=\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$ donc, par croissance de $\exp$, on trouve bien l'inégalité attendue, à savoir $\dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q\geqslant ab$.

b. On applique l'inégalité de la question **a.** à $a=|x_k|$ et $b=|y_k|$ pour $k\in[\![1;n]\!]$ et on somme, ce qui donne l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^n|x_ky_k|\leqslant\frac{1}{p}\sum_{k=1}^n|x_k|^p+\frac{1}{q}\sum_{k=1}^n|y_k|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ par hypothèse.

c. Si tous les coefficients d'un des deux vecteurs sont nuls, cette inégalité se ramène à $0\leqslant 0$: ça va ! Sinon, on a $\alpha=\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^n|x_k|^p\Big)^{1/p}>0$ et $\beta=\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^n|y_k|^q\Big)^{1/q}>0$ et on peut appliquer l'inégalité de la question **b.** avec $\dfrac{x_k}{\alpha}$ dans le rôle de x_k et $\dfrac{y_k}{\beta}$ dans celui de y_k. Comme sont respectées les conditions $\displaystyle\sum_{k=1}^n\left|\frac{x_k}{\alpha}\right|^p=\frac{1}{\alpha^p}\sum_{k=1}^n|x_k|^p=1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^n\left|\frac{y_k}{\beta}\right|^q=\frac{1}{\beta^q}\sum_{k=1}^n|y_k|^q=1$, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^n\left|\frac{x_ky_k}{\alpha\beta}\right|\leqslant 1$ d'après **b.** puis

$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \alpha\beta = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\Big)^{1/q}$.

d. À nouveau l'inégalité de la question **b.** avec x_k à la place de x_k (ça c'est bon) et $(x_k+y_k)^{p-1}$ à la place de y_k donne $\sum_{k=1}^{n} \big(|x_k+y_k|^{p-1}\big)^q = \sum_{k=1}^{n} \big(|x_k+y_k|\big)^{(p-1)q} = \sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p$ car $(p-1)q = p$.

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k+y_k|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1/q}$ et par symétrie entre x et y, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k+y_k|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1/q}$.

Comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $|x_k+y_k| \leqslant |x_k|+|y_k|$ par inégalité triangulaire, on a $|x_k+y_k|^p \leqslant (|x_k|+|y_k|)|x_k+y_k|^{p-1}$ donc, en sommant, $\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k+y_k|^{p-1}$ d'où on déduit :

$\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p \leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1/q}$ (1).

Si $\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p = 0$, l'inégalité demandée est vraie. Sinon, on divise (1) par $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1/q} > 0$ pour avoir $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$ or $1-\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$ par hypothèse et on obtient l'inégalité souhaitée. Dans tous les cas : $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$.

e. Inégalité triangulaire : on vient de le faire à la question précédente.

Séparation : soit $x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $||x||_p = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = 0$. Une somme nulle de termes positifs implique que tous les termes sont nuls donc $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $|x_k|^p = 0 \Longleftrightarrow x_k = 0$. Ainsi, $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, alors $||\lambda x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ dont on déduit bien $||\lambda x||_p = \left(|\lambda|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} = |\lambda|\,||x||_p$.

Par conséquent, $||\,.\,||_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par $||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

f. Clairement, $\big(\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|\big)^p = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|^p\big)$ et on passe à la racine p-ième pour avoir $||x||_\infty \leqslant ||x||_p \leqslant n^{1/p}||x||_\infty$. Comme $\lim_{n \to +\infty} n^{1/p} = 1$, par encadrement, $\lim_{p \to +\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.

g. Pour $x = 0$, cette double inégalité est clairement vérifiée et revient à $0 \leqslant 0 \leqslant 0$.

Pour $x \neq 0$, on a $||x||_s > 0$. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a $|x_k|^s \leqslant ||x||_s^s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^s$ donc $|x_k| \leqslant ||x||_s$ ce qui prouve que $y_k = \dfrac{|x_k|}{||x||_s} \in [0;1]$. Comme $1 \leqslant r < s$, on en déduit que $0 \leqslant y_k^s \leqslant y_k^r$, c'est-à-dire que $\dfrac{|x_k|^s}{||x||_s^s} \leqslant \dfrac{|x_k|^r}{||x||_s^r}$, on somme pour $k \in [\![1;n]\!]$ pour avoir $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{|x_k|^s}{||x||_s^s} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|x_k|^r}{||x||_s^r} \Longleftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{||x||_r^r}{||x||_s^r}$ donc $||x||_s \leqslant ||x||_r$ (2).

Ensuite on applique l'inégalité de HÖLDER en paramétrant correctement : x_k^r à la place de x_k, 1 à la place de y_k, $\dfrac{r}{s} < 1$ à la place de $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{s-r}{s} < 1$ à la place de $\dfrac{1}{q}$; on vérifie la condition $\dfrac{r}{s} + \dfrac{s-r}{s} = 1$ et on obtient $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^r \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k|^r)^{s/r}\right)^{r/s}\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^{(s-r)/s}$, ce qui revient à $||x||_r \leqslant n^{1/r-1/s}||x||_s$ (3). Ces constantes sont optimales car l'inégalité (2) est une égalité pour $x = e_1$ et l'inégalité (3) pour $x = (1, \cdots, 1) = \sum_{k=1}^{n} e_k$.

4.10 **a.** $\mathcal{B}_E = B_f(0_E, 1)$ est une boule fermée de rayon 1 (pour la norme $||.||$), d'après le cours elle est fermée, convexe et bornée. De plus, si $x \in \mathcal{B}_E$, on a par homogénéité : $||-x|| = ||x|| \leqslant 1$ donc $-x \in \mathcal{B}_E$ donc $\mathcal{B}_E$ est symétrique par rapport à 0_E. Par définition, pour $||.||$, on a $B(0_E, 1) \subset \mathcal{B}_E$ donc 0_E est intérieur à B_E.

b. Par hypothèse, comme $0_E \in \overset{\circ}{K}$, il existe $r_0 > 0$ tel que $B_f(0_E, r_0) \subset K$ (on peut choisir une boule fermée dans cette définition). De plus, K est bornée donc il existe $M > 0$ tel que $K \subset B_k(0_E, M)$. Traitons deux cas :

• si $x = 0_E$, alors $\forall r > 0$, $\frac{x}{r} = 0_E \in K$ donc $I_x = \mathbb{R}_+^*$ donc $j_K(x) = 0$.

• si $x \neq 0_E$, si $r \geqslant \frac{||x||}{r_0}$, on a $||\frac{x}{r}|| = \frac{1}{r}||x|| \leqslant \frac{rr_0}{r} = r_0$ donc $\frac{x}{r} \in B_f(0_E, r_0) \subset K$ donc $r \in I_x$. De plus, si $r < \frac{||x||}{M}$, alors $||\frac{x}{r}|| = \frac{1}{r}||x|| > \frac{rM}{r} = M$ donc $\frac{x}{r} \notin B_f(0_E, M)$ donc $x \notin K$ car $K \subset B_f(0_E, M)$. Ainsi I_x est une partie non vide (elle contient $\frac{||x||}{r_0}$) de $\mathbb{R}$ minorée par 0 dans $\mathbb{R}$: elle possède donc une borne inférieure d'où l'existence de $j_K(x)$ qui vérifie de plus $j_K(x) \leqslant \frac{||x||}{r_0}$. Comme on a montré ci-dessus que $I_x \subset \left[\frac{||x||}{M}; +\infty\right[$, on a aussi $j_K(x) \geqslant \frac{||x||}{M}$ d'où l'encadrement $\frac{||x||}{M} \leqslant j_K(x) \leqslant \frac{||x||}{r_0}$.

• j_K est clairement à valeurs positives.

• j_K vérifie l'axiome de séparation car si $x \neq 0_E$, avec les notations ci-dessus, $j_K(x) \geqslant \frac{||x||}{M}$ donc $j_K(x) > 0$.

• Si $\lambda = 0$ et $x \in E$, on a $j_K(\lambda x) = 0 = \lambda j_K(x)$ d'après l'inégalité ci-dessus.

• Si $\lambda > 0$, $r > 0$ et $x \in E$: $\frac{x}{r} \in K \Longleftrightarrow \frac{\lambda x}{\lambda r} \in K$ donc $r \in I_x \Longleftrightarrow \lambda r \in I_{\lambda x}$. Donc $I_{\lambda x} = \lambda I_x$ et $j_K(\lambda x) = \lambda j_K(x)$.

• Si $r > 0$ et $x \in E$, par symétrie $\frac{x}{r} \in K \Longleftrightarrow -\frac{x}{r} \in K \Longleftrightarrow \frac{-x}{r} \in K$ donc $I_x = I_{-x}$ et $j_K(x) = j_K(-x)$.

• Si $(x, y) \in E^2$, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe deux suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I_x^{\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I_y^{\mathbb{N}}$ qui tendent respectivement vers $j_K(x)$ et $j_K(y)$ (par valeurs supérieures). Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{r_n} \in K$ et $\frac{y}{s_n} \in K$. En posant $t = \frac{r_n}{r_n + s_n} \in [0; 1]$, on a $t\frac{x}{r_n} + (1-t)\frac{y}{s_n} = \frac{1}{r_n + s_n}\left(r_n\frac{x}{r_n} + s_n\frac{y}{s_n}\right) = \frac{x+y}{r_n + s_n} \in K$ par convexité de K donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n + s_n \in I_{x+y}$ et $j_k(x+y) \leqslant r_n + s_n$.

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$: $j_k(x+y) \leqslant j_K(x) + j_K(y)$. Ainsi, j_K est une norme sur E.

c. Si $x \in K$, comme $\frac{x}{1} \in K$, on a $1 \in I_x$ donc $j_K(x) \leqslant 1$.

Réciproquement, si $j_k(x) \leqslant 1$ et $x \neq 0_E$ ($x = 0_E$ est dans K), alors il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I_x^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = j_K(x) \neq 0$. Alors $\left(\frac{x}{r_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ et elle converge vers $\frac{x}{j_K(x)} \in K$ car K est fermé. Par convexité de K : $x = (1 - j_K(x))0_E + j_K(x)\frac{x}{j_K(x)} \in K$. Par double inclusion : la boule unité fermée de la norme j_K est K.

d. On a déjà en question **a.** que si $x \neq 0_E$, alors $\frac{||x||}{M} \leqslant j_K(x) \leqslant \frac{||x||}{r_0}$. Comme cette double inégalité est aussi vraie si $x = 0_E$, les deux normes $||.||$ et j_K sont bien équivalentes.

On aurait pu montrer au départ que I_x était un intervalle fermé : en effet, les intervalles sont les convexes de $\mathbb{R}$. Or si r, r' sont dans I_x avec $0 < r < r'$, alors $\frac{x}{r} \in K$ et $\frac{x}{r'} \in K$. Soit $r'' \in]r; r'[$, alors posons $t = \frac{r(r' - r'')}{r''(r' - r)} \in]0; 1[$, on a $\frac{x}{r'} = t\frac{x}{r'} + (1-t)\frac{x}{r'}$ donc $\frac{x}{r''} \in K$ car K est convexe et I_x est bien un intervalle.

De plus, si $j_K(x) \neq 0$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I_x qui tend vers $j_K(x)$ donc $\left(\frac{x}{r_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\frac{x}{j_K(x)}$ qui appartient donc à K puisque K est fermé. On obtient donc $I_x = [j_K(x); +\infty[$ car si $r \in I_x$, tous les réels $r' > r$ sont dans I_x car $\frac{x}{r'} = (1-t).0_E + t.\frac{x}{r}$ avec $t = \frac{r}{r'} \in]0; 1[$.

Avec ces renseignements, on peut gagner du temps dans les preuves de l'exercice.

4.11 **a.** $E_n \subset C^0([0;n],\mathbb{R})$ et la fonction nulle appartient clairement à E_n. De plus, par structure d'espace vectoriel des fonctions continues et affine sur un intervalle, E_n est stable par combinaison linéaire (la continuité sur $[0;n]$ et le caractère affine sur tout segment $[k;k+1]$ se conservent). Par conséquent, E_n est un espace vectoriel car c'est un sous-espace vectoriel de $C^0([0;n],\mathbb{R})$. L'application $\theta_n : E_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\forall f \in E_n,\ \theta_n(f) = \big(f(0),\cdots,f(n)\big)$ est linéaire et sa bijectivité provient du fait qu'une fonction f de E_n est entièrement caractérisée par ses valeurs en les entiers $k \in [\![0;n]\!]$ puisque qu'elle est affine sur les segments $[k;k+1]$. Comme un isomorphisme conserve les dimensions, on en déduit que $\dim(E_n) = n+1$.

b. On sait que toutes les normes sur des espaces vectoriels de dimension finie sont équivalentes. Or $||\,.\,||_\infty$ et $||\,.\,||_1$ sont deux normes classiques dans $C^0([0;n],\mathbb{R})$ donc a fortiori dans E_n, ce qui justifie l'existence de deux constantes a_n et b_n strictement positives telles que $\forall f \in E_n,\ a_n||f||_\infty \leqslant ||f||_1 \leqslant b_n||f||_\infty$. Considérons $\alpha_n = \mathrm{Sup}\big(\{a \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ a||f||_\infty \leqslant ||f||_1\}\big)$ et $\beta_n = \mathrm{Inf}\big(\{b \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ ||f||_1 \leqslant b||f||_\infty\}\big)$. Ces deux constantes existent bien car $\{a \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ a||f||_\infty \leqslant ||f||_1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car elle contient a_n) et majorée par exemple par n car si on prend f la fonction constante égale à 1 sur $[0;n]$, on a bien $f \in E_n$, $||f||_\infty = 1$ et $||f||_1 = n$; de même $\{b \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ ||f||_1 \leqslant b||f||_\infty\}$ est une partie non vide (car elle contient b_n) de $\mathbb{R}_+$ minorée par 0. Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, ces deux constantes α_n et β_n sont bien optimales (maximale pour α_n et minimale pour β_n).

Par définition de la norme infinie et croissance de l'intégrale (ici $0 < n$), pour toute $f \in E_n$, on a la majoration $||f||_1 = \displaystyle\int_0^n |f| \leqslant \int_0^n ||f||_\infty = n||f||_\infty$ donc $\beta_n \leqslant n$ et on a égalité dans cette inégalité pour la fonction non nulle f constante égale à 1 sur $[0;n]$ avec $f \in E_n$. Ainsi, toute constante $b < n$ n'est pas dans $\{b \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ ||f||_1 \leqslant b||f||_\infty\}$ ce qui prouve que $\beta_n = n = \mathrm{Min}\big(\{b \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ ||f||_1 \leqslant b||f||_\infty\}\big)$.

c. Pour trouver α_n, par homogénéité des deux normes $||\,.\,||_\infty$ et $||\,.\,||_1$, on peut se restreindre aux fonctions f telles que $||f||_\infty = 1$ et peut imposer, comme f affine atteint son maximum en valeur absolue soit en 0 soit en 1) que $f(0) = 1$ (quitte à changer f en $-f$ si $f(0) = -1$, en $x \mapsto f(1-x)$ si $f(1) = 1$ ou en $x \mapsto -f(1-x)$ si $f(1) = -1$). On veut rendre minimum $||f||_1$ avec cette condition que $f(0) = 1 = ||f||_\infty$ et f affine sur $[0;1]$ ce qui nous conduit à prendre $f(x) = 1 - ax$ avec $a \in [1;2]$ (pour que la fonction f passe du côté négatif en 1 et diminue $||f||_1$ tout en vérifiant $||f||_\infty = 1$). On calcule alors $||f||_1 = \displaystyle\int_0^{1/a}(1-ax)dx + \int_{1/a}^1 (ax-1)dx$ donc $||f||_1 = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{a} + \dfrac{(a-1)^2}{a}\Big) = h(a)$ (somme de deux aires de triangles). h est dérivable sur $[1;2]$ et on trouve $h'(a) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a^2}$ donc h est minimale pour $a = \sqrt{2}$ où $||f||_1 = h(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$. Ainsi, $\alpha_1 = \sqrt{2} - 1 \sim 0,414$.

Pour $n \geqslant 2$ quelconque, soit $f : [0;n] \to \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = 1 - x$ pour $x \in [0;1]$ et $f_0(x) = 0$ sinon. Alors on a clairement $f_0 \in E_n$ et on calcule aisément $||f_0||_\infty = 1$ et $||f_0||_1 = \dfrac{1}{2}$ de sorte que puisque $\forall f \in E_n,\ \alpha_n||f||_\infty \leqslant ||f||_1$, on en déduit que $\alpha_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

d. Dans ces conditions, si le maximum de f n'était pas atteint en 0 ou en n, alors il serait atteint (par structure de $f \in E_n$) en $x_i = i$ avec $i \in [\![1;n-1]\!]$ et on aurait au minimum une aire de α_1 comme intégrale de part et d'autre de x_i ($\displaystyle\int_{i-1}^i |f| \geqslant \alpha_1$ et $\displaystyle\int_i^{i+1} |f| \geqslant \alpha_1$) d'après l'étude de la question **c.**. Alors on aurait $||f||_1 \geqslant \displaystyle\int_{i-1}^{i+1} |f| \geqslant 2\alpha_1 > \dfrac{1}{2}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, f atteint son maximum en 0 ou en n.

Par symétrie, on peut imposer $f(0) = 1$ et $f(x) = 1 - ax$ pour $x \in [0;1]$ avec $a \in [1;2]$ (encore une fois pour respecter $|f||_\infty = 1$ et pour minimiser $||f||_1$) ; alors $||f||_1 = \int_0^n |f| = \int_0^1 |f| + \int_1^n |f|$ et cette dernière intégrale (par définition de α_{n-1}) est minimale si $\int_1^n |f| = |f(1)|\alpha_{n-1}$ (par une translation de $[1;n]$ à $[0;n-1]$ et une affinité de rapport $|f(1)|$ sur les ordonnées) donc $\alpha_n \geqslant \frac{1}{a} - 1 + \frac{a}{2} + (a-1)\alpha_{n-1} = h_n(a)$.

Comme avant, la fonction h_n est dérivable sur $[1;2]$, $h_n'(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} + \alpha_{n-1}$ donc h_n est minimale en $\lambda_n = \left(\frac{1}{2} + \alpha_{n-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \in [1;2[$ (car $\alpha_{n-1} \leqslant \frac{1}{2}$ d'après **c.**). Après calculs, on trouve (en prenant pour $f \in E_n$ la fonction affine correspondant à ce choix de $a = \lambda_n$ et à une fonction optimale au rang $n-1$ sur l'intervalle $[1;n]$) que $\alpha_n = \underset{[1;2]}{\text{Min}}(h_n) = h_n(\lambda_n) = 2\sqrt{\alpha_{n-1} + \frac{1}{2}} - 1 - \alpha_{n-1}$.

Soit $\varphi : \left[0;\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 2\sqrt{x + \frac{1}{2}} - 1 - x$ de sorte que $\forall n \geqslant 1,\ \alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$. On a $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2}}} - 1$ donc φ croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Comme $\alpha_1 = \sqrt{2} - 1$ et $\alpha_2 = 2\sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} - \sqrt{2} \sim 0,498$, on montre classiquement que $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et, comme elle est majorée par $\frac{1}{2}$, elle converge vers $\ell \leqslant \frac{1}{2}$ qui est un point fixe de φ car φ est continue. Or $\varphi(x) = x \Longleftrightarrow 2\sqrt{x + \frac{1}{2}} = 2x + 1 \Longleftrightarrow 4x + 2 = 4x^2 + 4x + 1$ pour $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ ce qui donne $\varphi(x) = x \Longleftrightarrow 4x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Par conséquent, la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\frac{1}{2}$. Elle le fait même très vite, de manière quadratique, car $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; faire un dessin et constater avec Taylor-Lagrange que $\alpha_{n+1} - \frac{1}{2} = \varphi(\alpha_n) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\varphi''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\alpha_n - \frac{1}{2}\right)^2$.

4.12 Si $f \in E$, posons $A(f) = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|\}$. Alors $A(f)$ est une partie non vide (car f est lipschitzienne) et minorée par 0 donc $N(f) = \text{Inf}(A(f))$ existe. Si $(k,k') \in A(f)^2$ et $k'' \in [k;k']$, alors $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| \leqslant k''|x-y|$ donc $k'' \in A(f)$. Par conséquent $[k;k'] \subset A(f)$ et $A(f)$ est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. $A(f)$ n'est pas majoré car si $k \in A(f)$ et $k' > k$ alors $k' \in A(f)$. On ne peut donc avoir que $A(f) =]N(f);+\infty[$ ou $A(f) = [N(f);+\infty[$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $N(f) + \varepsilon \in A(f)$ d'après ce qui précède donc $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant (N(f) + \varepsilon)|x-y|$ ce qui, quand ε tend vers 0^+, devient $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant N(f)|x-y|$. Ainsi $N(f) \in A(f)$ ce qui prouve que $N(f) = \text{Min}(A(f))$. On a donc $A(f) = [N(f);+\infty[$.

• Si $f \in E$ et $N(f) = 0$, alors $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant 0.|x-y| = 0 \Longrightarrow f(x) = f(y)$. Ainsi f est constante et comme elle est nulle en a, f est nulle. C'est la séparation !

• Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, on a $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)| = |\lambda||f(x) - f(y)| \leqslant |\lambda|N(f)|x-y|$ donc λf est aussi lipschitzienne (on le savait déjà) et $N(\lambda f) \leqslant |\lambda|N(f)$. Si $\lambda = 0$, clairement $N(0.f) = N(0) = 0 = 0.N(f)$. Si $\lambda \neq 0$, on applique l'inégalité précédente à $\frac{1}{\lambda}$ et (λf) d'où : $N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| N\left(\lambda \frac{f}{\lambda}\right)$ donc $N(\lambda f) \geqslant |\lambda|N(f)$. Par conséquent : $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$. C'est l'homogénéité !

• Si $(f,g) \in E^2$, $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |(f+g)(x) - (f+g)(y)| = |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ ce qui donne $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leqslant N(f)|x-y| + N(g)|x-y| \leqslant (N(f) + N(g))|x-y|$. Ainsi $f+g$ est lipschitzienne (on le savait déjà) et $N(f+g) \leqslant N(f)+N(g)$. C'est l'inégalité triangulaire !

En conclusion, N est bien une norme sur E ($N(f)$ est la meilleure constante de lispchitzianité de f).

4.13 **a.** $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si $f \in E$ et $\alpha \in [0;1]$, alors $|f|$ est continue sur le segment donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha |f|$ existe. De plus, la fonction $|f|$ est continue sur le segment $[\alpha;1]$ donc elle y est bornée et y atteint ses bornes donc $\underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f| = \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Max}}\,|f|$ existe. Ainsi, $N_\alpha(f)$ est bien défini et positif. On peut même écrire que $N_\alpha(f) = ||f||_{1,[0;\alpha]} + ||f||_{\infty,[\alpha;1]}$ avec les notations du cours.

- Si $\alpha = 0$, $N_0 = ||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme d'après le cours.
- Si $\alpha = 1$, $N_0 = ||\,.\,||_{1,[0;1]}$ est une norme d'après le cours.
- Si $\alpha \in]0;1[$, on va montrer que N_α est une norme sur E :

Séparation : prenons $f \in E$ telle que $N_\alpha(f) = 0$, alors $||f||_{1,[0;\alpha]} = \displaystyle\int_0^\alpha |f| = ||f||_{\infty,[\alpha;1]} = \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f| = 0$ donc f est nulle sur $[0;\alpha]$ et sur $[\alpha;1]$ (normes 1 et ∞ classiques). Ainsi f est nulle sur $[0;1]$ donc $f = 0$.

Homogénéité : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$: $N_\alpha(\lambda f) = \displaystyle\int_0^\alpha |\lambda f| + \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|\lambda f| = |\lambda| \int_0^\alpha |f| + |\lambda| \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f| = |\lambda| N_\alpha(f)$ car on sait qu'on a homogénéité pour les normes 1 et ∞ classiques.

Inégalité triangulaire : si $(f,g) \in E^2$, on obtient l'inégalité triangulaire pour N_α avec les propriétés des normes 1 et ∞, à savoir $N_\alpha(f+g) = \displaystyle\int_0^\alpha |f+g| + \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f+g| \leqslant \int_0^\alpha |f| + \int_0^\alpha |g| + \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f| + \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|g| = N_\alpha(f) + N_\alpha(g)$.

Au final, quel que soit $\alpha \in [0;1]$, N_α est une norme sur E.

b. Soit deux réels α et β tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$:

- Pour $f \in E$, on a $N_\beta(f) = \displaystyle\int_0^\beta |f| + \underset{[\beta;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f| = \int_0^\alpha |f| + \int_\alpha^\beta |f| + \underset{[\beta;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f|$ par CHASLES or $\underset{[\beta;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f| \leqslant \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f|$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f| \leqslant \int_\alpha^\beta \big(\underset{[\alpha;\beta]}{\mathrm{Sup}}\,|f|\big) = (\beta-\alpha) \underset{[\alpha;\beta]}{\mathrm{Sup}}\,|f| \leqslant (\beta-\alpha) \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f|$. Par conséquent $N_\beta(f) \leqslant \displaystyle\int_0^\alpha |f| + (\beta-\alpha+1) \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f|$ donc $N_\beta(f) \leqslant (\beta-\alpha+1)\Big[\displaystyle\int_0^\alpha |f| + \underset{[\alpha;1]}{\mathrm{Sup}}\,|f|\Big] = (\beta-\alpha+1)N_\alpha(f)$ car $\beta-\alpha+1 > 1$. N_α domine N_β.
- Soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $N_\beta \leqslant kN_\alpha$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand, soit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux (trois) et continue telle que $f_n(x) = 0$ si $x \in [0;\alpha]$, $f_n(x) = 1$ si $x \in \Big[\alpha + \dfrac{\beta-\alpha}{n}; 1\Big]$. Alors $N_\beta(f_n) = 1 + \beta - \alpha + \dfrac{\beta - a}{2n}$ et $N_\alpha(f_n) = 1$. Comme on a supposé que $N_\beta(f_n) \leqslant kN_\beta(f_n)$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a $k \geqslant \beta-\alpha+1$. Par conséquent, $\beta-\alpha+1$ est optimale (ici minimale) dans la domination $N_\beta \leqslant (\beta-\alpha+1)N_\alpha$.
- Soit, pour $n \geqslant 1$, la fonction $g_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux (quatre) et continue telle que $g_n(x) = 0$ si $x \in \Big[0; \alpha + \dfrac{\beta-\alpha}{2n}\Big] \cup \Big[\beta - \dfrac{\beta-\alpha}{2n}; 1\Big]$, $g_n\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Big) = n$. Alors $N_\alpha(g_n) = n$ et $N_\beta(g_n) = \dfrac{\beta-\alpha}{2n}$ (faire les calculs). Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{N_\alpha(f_n)}{N_\beta(f_n)} = +\infty$ donc N_β ne domine pas N_α.

4.2 Suites dans un espace vectoriel normé

4.14 Si on note $A^n = (a_{i,j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, puisqu'on est en dimension finie et que la famille $(a_{i,j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ constitue les coordonnées de A^n dans la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on sait qu'en notant $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{i,j,n} = b_{i,j}$. Or $(A^n)^T = (a_{j,i,n})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ donc, toujours en passant par les coordonnées, les p^2 convergences de suites scalaires assurent que la suite $((A^n)^T)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $(b_{j,i})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, donc que $\lim_{n\to+\infty}(A^n)^T = B^T$. Plus tard, on évoquera plus simplement la continuité, puisque $M \mapsto M^T$ est linéaire en dimension finie, de l'application “transposée”, et la caractérisation séquentielle de la continuité.

De plus, A^{2k} est symétrique donc $\lim_{k\to+\infty}(A^{2k})^T = \lim_{k\to+\infty} A^{2k} = B$ (suite extraite des termes d'indices pairs) et A^{2k+1} est antisymétrique donc $\lim_{k\to+\infty}(A^{2k+1})^T = \lim_{k\to+\infty}(-A^{2k+1}) = -B$ (suite extraite des termes d'indices impairs) . Par unicité de la limite, $B = -B$ donc $B = 0$.

4.15 Soit $\mathcal{B} = (u, v, e_3, \cdots, e_p)$ une base de E alors si on écrit les coordonnées $(u_{n,1}, u_{n,2}, \cdots, u_{n,p})$ de u_n et $(v_{n,1}, v_{n,2}, \cdots, v_{n,p})$ de v_n alors $(u_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 et $(v_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 alors que toutes les autres suites de coordonnées tendent vers 0. Il existe un rang n_0 à partir duquel $u_{n,1}, v_{n,2} \geqslant \frac{2}{3}$ et $u_{n,2}, v_{n,1} \leqslant \frac{1}{3}$ et alors $u_{n,1}v_{n,2} - u_{n,2}v_{n,1} \geqslant \frac{1}{3}$ ce qui contredit la colinéarité de u_n et v_n.

4.16 **a.** Il vient $v_n \circ (u - \mathrm{id}_E) = \dfrac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} u^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u^k\right) = \dfrac{u^{n+1} - \mathrm{id}_E}{n+1}$.

b. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$, alors $u(x) = x$ et $x = u(a) - a$ pour un vecteur $a \in E$.

Clairement $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = x$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n(x) = x$. De plus $v_n(x) = \big(v_n \circ (u - \mathrm{id}_E)\big)(a) = \dfrac{u^{n+1}(a) - a}{n+1}$ d'après la question **a.**. Comme $||u^{n+1}(a)|| \leqslant ||a||$ (par récurrence), on a par inégalité triangulaire : $\forall n \in \mathbb{N},\ ||v_n(x)|| = ||x|| \leqslant \dfrac{2||a||}{n+1}$ donc $||x|| = 0 \Longrightarrow x = 0_E$. Ainsi : $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.

c. On sait déjà d'après **b.** que $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe mais avec la formule du rang : $\dim(\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)) + \dim(\mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E)) = \dim(E)$. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = E$.

d. On suppose que $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = E$ ainsi $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E et on peut définir la projection p sur $\mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$. Soit un vecteur $x \in E$, on le décompose $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$, alors $v_n(x) = v_n(y) + v_n(z) = v_n(y) + z$. De plus, comme à la question **b.**, on montre que $\lim_{n\to+\infty} v_n(y) = 0_E$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = z$.

Mais comme $z = p(x)$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers p.

De plus, pour tout $x \in E$, on a $||v_n(x)|| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} ||u^k(x)||$ par inégalité triangulaire donc $||v_n(x)|| \leqslant ||x||$.

Mais comme la fonction norme $||\,.\,|| : E \to \mathbb{R}_+$ est continue car 1-lipschitzienne puisque $\Big|||x|| - ||y||\Big| \leqslant ||x - y||$, on a $\lim_{n\to+\infty} ||v_n(x)|| = ||p(x)||$ et on obtient $||p(x)|| \leqslant ||x||$ et p est aussi continu car 1-lipschitzien.

Un exercice classique est de montrer que si la norme est une norme euclidienne issue d'un produit scalaire, alors p est un projecteur orthogonal.

Comme $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) = \mathsf{Ker}(p) = p^{-1}\big(\{0_E\}\big)$ et que $\{0_E\}$ est fermé, alors $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ est une partie fermée de E comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

e. On suppose donc la convergence simple de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ c'est-à-dire pour tout vecteur $x \in E$, la convergence de la suite de vecteurs $(v_n(x))_{n\geqslant 0}$ dans E ; on suppose aussi que $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ est une partie fermée de E.

Soit $x \in E$, posons $z = \lim_{n\to+\infty} v_n(x)$. Comme $u(v_n(z)) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^{k+1}(x) = v_n(x) + \dfrac{u^{n+1}(x) - x}{n+1}$, on obtient en passant à la limite : $u(z) = z$ donc $z \in \mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.

Posons $y = x - z = \lim_{n\to+\infty}(x - v_n(x))$. Or $x - v_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{id}_E - u^k)(x)$.

Or $\mathrm{id}_E - u^k = (\mathrm{id}_E - u) \circ \left(\sum_{i=0}^{k-1} u^i\right)$ d'où l'on déduit que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - u^k) \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - u)$ ce qui prouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ x - v_n(x) \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$. Comme $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ est fermé, $y = x - z = \lim_{n\to+\infty}(x - v_n(x)) \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$.
On obtient donc $x = y + z \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) + \mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ donc $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) + \mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = E$ et on peut donc conclure à la réciproque avec la question **b.** : $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = E$.

4.17 **a.** On l'a déjà fait en cours : $|[UV]_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{p} u_{i,k}v_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |u_{i,k}||v_{k,j}| \sum_{k=1}^{p} ||U||_\infty ||V||_\infty = p||U||_\infty ||V||_\infty$.
Cette inégalité étant valable pour toutes les cases de UV, on a bien $||UV||_\infty \leqslant p||U||_\infty ||V||_\infty$.

b. Par une récurrence simple, on a donc $\forall n \geqslant 1,\ ||A^n||_\infty \leqslant p^{n-1}||A||_\infty^n$. Or, par définition de M_n, on a $|m_{i,j}^{(n)}| = \left|\left[\frac{A^n}{n!}\right]_{i,j}\right| \leqslant \frac{1}{n!}||A^n||_\infty \leqslant \frac{p^{n-1}}{n!}||A||_\infty^n$.

c. Pour $n \geqslant 1$, $|m_{i,j}^{(n)}| \leqslant \frac{p^{n-1}}{n!}||A||_\infty^n$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{p^{n-1}}{n!}||A||_\infty^n$ converge ! On connaît même sa somme qui vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^{n-1}}{n!}||A||_\infty^n = \frac{e^{p||A||_\infty} - 1}{p}$ d'après le développement de l'exponentielle. On peut donc conclure que la série $\sum_{n\geqslant 0} m_{i,j}^{(n)}$ est absolument convergente donc convergente.

d. On est en dimension finie et on sait qu'une suite de matrices converge si et seulement si la suite correspondante de chacune de ses cases converge. C'est le cas d'après **c.** : $(S_n(A))_{n\geqslant 0}$ converge.

e. Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$, on obtient $S_n(D) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}, \cdots, \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_p^k}{k!}\right)$ donc, en passant à la limite (case par case) quand n tend vers $+\infty$: $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1} \cdots, e^{\lambda_p})$. Si $A = PDP^{-1}$, on a $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout k donc $S_n(A) = PS_n(D)P^{-1}$ et on sait que $(S_n(D))_{n\geqslant 0}$ converge vers $\exp(D)$. Comme $f : M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire donc continue (on est en dimension finie), alors $(S_n(A))_{n\geqslant 0} = (f(S_n(D)))_{n\geqslant 0}$ converge vers $\exp(A) = f(\exp(D)) = P\exp(D)P^{-1}$. Ainsi $\det(\exp(A)) = \det(\exp(D)) = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_p} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p} = e^{\mathrm{Tr}\,(A)}$.

4.3 Topologie

4.18 **a.** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A converge vers $f \in E$, alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = f(0)$ donc $f(0) = 0$. Par encadrement : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$ donc $\int_0^1 f \geqslant 1$. Ainsi A est fermée par caractérisation séquentielle. Si $f \in A$ et $||f||_\infty \leqslant 1$ alors $\int_0^1 f = 1$ d'où $\int_0^1 (1-f) = 0$ et $1 - f = 0 \Longrightarrow f = 1$ NON.
b. Cette distance est supérieure à 1 d'après **a.**. De plus, en prenant f_n affine par morceaux avec $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n}$ et $f(1) = \frac{n+1}{n}$ alors $||f_n||_\infty = \frac{n+1}{n} \geqslant 1$ donc $d(0, A) = 1$.

4.19 **a.** Il suffit de vérifier que X_n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or si on considère une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs propres de f canoniquement associé à A, on a $\forall k \in [\![1;n]\!],\ f(v_k) = \lambda_k v_k$ avec $\lambda_k > 0$. Ainsi : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et P inversible.
Si g_n est canoniquement associé à X_n on a : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ g_0(v_k) = 1.v_k$ (initialisation).
Ensuite $\forall k \in [\![1;n]\!],\ g_1(v_k) = \frac{1}{2}\Big(v_k + \lambda_k v_k\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \lambda_k\Big)v_k$ donc X_1 est diagonalisable dans la même base $\mathcal{B}$ avec des valeurs propres $\frac{1}{2}\Big(1 + \lambda_k\Big)$ strictement positives. On continue la récurrence pour vérifier que X_n est toujours diagonalisable (dans $\mathcal{B}$) avec des valeurs propres strictement positives ; cela tient au fait que si $x > 0$ alors $\frac{1}{2}\Big((x + \frac{\lambda_k}{x}\Big) > 0$.

b. Par l'algorithme de HÉRON, pour $k \in [\![1;n]\!]$, la suite définie par $x_{k,0} = 1$, $\forall p \in \mathbb{N},\ x_{k,p} = \frac{2}{1}\Big(x_{k,p} + \frac{\lambda_k}{x_{k,p}}\Big)$ converge (très très vite) vers $\sqrt{\lambda_k}$. On a donc $\lim_{p\to+\infty} \mathrm{diag}(x_{1,p}, \cdots, x_{n,p}) = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) = \Delta$. Or, clairement $\Delta^2 = D$; ainsi, par continuité de $N \mapsto PNP^{-1}$, on a $\lim_{n\to+\infty} X_n = P\Delta P^{-1} = X$ qui vérifie $X^2 = A$.

c. D'après ce qui précède, comme A et X_n sont codiagonalisables, elles commutent donc A et X_n^{-1} commutent aussi. Ainsi, on montre par récurrence que X_n est symétrique et ainsi $X = \sqrt{A}$ l'est aussi comme limite de suites symétrique ($\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé : le justifier).

4.20 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on sait que M est trigonalisable. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = T$ triangulaire supérieure avec $(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$ sur la diagonale ($\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ distincts deux à deux et λ_k étant répété $m_k \geqslant 1$ fois). Il suffit de modifier légèrement (pour $n \in \mathbb{N}$ de maximum $\frac{1}{2^n}$ en module par exemple) les coefficients diagonaux de T de manière à ce qu'ils deviennent tous distincts deux à deux et le tour est joué : pour $n \in \mathbb{N}$, il existe donc T_n triangulaire supérieure avec des valeurs propres distinctes deux à deux donc T_n diagonalisable telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = T$ (en effet, par construction $||T_n - T||_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$. On conclut avec la continuité de l'application $N \to PNP^{-1}$.

4.21 Comme A et B commutent, on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^kB^k = B^kA^k$. Il suffit alors de passer à la limite quand k tend vers $+\infty$ en se servant des hypothèses et de la continuité du produit matriciel (bilinéaire en dimension finie) pour avoir $PQ = QP$.

4.22 L'application $f \mapsto f^2 = f \circ f$ est continue de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même car elle est la composée de $(f, g) \mapsto f \circ g$ bilinéaire donc continue et de $(f, f) \mapsto f$ linéaire donc continue (et on est en dimension finie). Ainsi, par différence : $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi(f) = f^2 - f$ est continue et $P = \varphi^{-1}(\{0\})$ par définition.

4.23 **a.** Supposons que le résultat est vrai pour une norme N_1 et soit une autre norme N_2. Comme on est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes donc il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$. Par hypothèse, $\lim\limits_{k \to +\infty} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$. Or, $\lim\limits_{k \to +\infty} \alpha^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k \to +\infty} \beta^{\frac{1}{k}} = 1$ donc, par le théorème des gendarmes, comme $\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha^{\frac{1}{k}} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}} \leqslant N_2(A^k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \beta^{\frac{1}{k}} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}}$, on en déduit que $\lim\limits_{k \to +\infty} N_2(A^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$: le résultat est aussi vrai pour N_2.
b. Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Soit N une norme sur E. Comme le produit matriciel est bilinéaire il existe $M \geqslant 0$ telle que $\forall (U, V) \in E^2,\ N(UV) \leqslant MN(U)N(V)$ d'après le cours car E est de dimension finie. Ou on a vu en cours que $||UV||_\infty \leqslant n||U||_\infty ||V||_\infty$ et il existe des constantes $\alpha' > 0$ et $\beta' > 0$ telles que $\alpha' N \leqslant ||.||_\infty \leqslant \beta' N$, on trouve facilement que pour toutes matrices U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $N(UV) \leqslant \dfrac{n(\beta')^2}{\alpha'} N(U)N(V)$ et $M = \dfrac{n(\beta')^2}{\alpha'}$ convient.

Or, $A^k = PB^kP^{-1}$ et $B^k = P^{-1}A^kP$, donc $N(A^k) \leqslant M^2N(P)N(B^k)N(P^{-1})$ et $N(B^k) \leqslant M^2N(P^{-1})N(A^k)N(P)$. On passe ces deux inégalités à la puissance $\dfrac{1}{k} > 0$ et $\dfrac{1}{M^2N(P)N(P^{-1})} N(A^k) \leqslant N(B^k) \leqslant M^2N(P^{-1})N(A^k)N(P)$ et, par encadrement, on obtient $\lim\limits_{k \to +\infty} N(B^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ car, par exemple, $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(M^2N(P^{-1})N(P)\right)^{\frac{1}{k}} = 1$.
c. On écrit $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ nilpotente d'ordre inférieur ou égal à n (classique avec le théorème de Cayley-Hamilton car $\chi_N = X^n$) et, comme N et I_n commutent, on a $T^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} N^i$ pour $k \geqslant n$. On écrit l'inégalité triangulaire et $1 \leqslant ||T^k||_\infty = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} ||N^i||_\infty$. Le terme de droite est polynomial en k de degré inférieur ou égal à $n - 1$ donc quand on élève tout à la puissance $\dfrac{1}{k}$, la limite vaut 1 à gauche et à droite (par croissances comparées) et on conclut par encadrement que $\lim\limits_{k \to +\infty} ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$.
d. Comme $A^0 = I_n = B^0$, $||A^0||_\infty \leqslant ||B^0||_\infty$ et, par définition de B, $||A^1||_\infty = ||A||_\infty \leqslant ||B||_\infty = ||B^1||_\infty$. Si on suppose, pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, que $||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$, alors $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2,\ [A^{k+1}]_{i,j} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}[A^k]_{\ell,j}$ donc, par inégalité triangulaire, $\left|[A^{k+1}]_{i,j}\right| \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{n} |a_{i,\ell}|\left|[A^k]_{\ell,j}\right| \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell}\left|[B^k]_{\ell,j}\right|$ par définition de B et par hypothèse de récurrence. Ainsi, comme les coefficients de B^k sont positifs (clair par récurrence et par

définition du produit matriciel), on a $\left|[A^{k+1}]_{i,j}\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell}[B^k]_{\ell,j} = [B^{k+1}]_{i,j}$ donc $||A^{k+1}||_\infty \leqslant ||B^{k+1}||_\infty$.
Par principe de récurrence, on a bien établi que $\forall k \in \mathbb{N},\ ||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$.
Traitons maintenant deux cas :

$\underline{\rho(A) = 0}$, alors il n'y a aucune valeur propre non nulle de A donc $Sp(A) = \{0\}$ et $\chi_A = X^n$ donc $A^n = 0$ par Cayley-Hamilton ce qui prouve que $\forall k \geqslant n, A^k = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} ||A^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 0 = \rho(A)$.

$\underline{\rho(A) > 0}$, la matrice $\dfrac{A}{\rho(A)}$ a une valeur propre de module 1 et ensuite uniquement des valeurs propres de modules inférieurs ou égaux à 1 par construction ; elle est trigonalisable car χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc est semblable à une matrice triangulaire supérieure T' dont les coefficients sont en module inférieur à 1 sur la diagonale. En posant $m = \underset{1\leqslant i<j\leqslant n}{\mathrm{Max}} |t_{i,j}|$ et T la matrice triangulaire supérieure ayant des 1 sur la diagonale et des m au dessus, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ |t'_{i,j}| \leqslant t_{i,j}$ donc, avec ce qui précède, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ ||T'^k||_\infty \leqslant ||T^k||_\infty$. Or la question précédente montre que $\lim\limits_{k\to+\infty} ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$. Mais comme T' a un terme qui vaut 1 sur la diagonale, T'^k l'a également donc $1 \leqslant ||T'^k||_\infty \leqslant ||T^k||_\infty$ d'où $1 \leqslant ||T'^k||_\infty^{\frac{1}{k}} \leqslant ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}}$. Par encadrement, $\lim\limits_{k\to+\infty} ||T'^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$.
Comme $\dfrac{A}{\rho(A)}$ et T' sont semblables, d'après la question **b.**, on a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\left|\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^k\right|\right|_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$ donc, par homogénéité de la norme, $\lim\limits_{k\to+\infty} ||A^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} ||A^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ donc, d'après la question **a.**, puisque ça marche pour la norme infinie, pour toute norme $||\,.\,||$ de E, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

4.24 **a.** En notant $\lambda = \mathrm{dom}(P) > 0$, comme P est scindé à racines simples et qu'on connaît ses racines, on peut écrire $P = \lambda \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \in S$. Comme les racines de P sont simples, la fonction polynomiale P change de signe au voisinage de chacune de ses racines (car $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P'(a_k) \neq 0$ car a_k est racine simple de P) et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ car $\lambda > 0$. Ainsi, $P(\beta_n) > 0$, $P(\beta_{n-1}) < 0$, etc... et $P(\beta_0)$ du signe de $(-1)^n$.
Ou alors $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(\beta_k) = \lambda \prod\limits_{i=1}^{n} (\beta_k - \alpha_i) = \lambda \prod\limits_{i=1}^{k-1} (\beta_k - \alpha_i) \times \prod\limits_{i=k}^{n} (\beta_k - \alpha_i)$ ce qui fait k termes strictement positifs et $n - k$ termes strictement négatifs dans ce produit : $P(\beta_k)$ est du signe de $(-1)^{n-k}$.
b. Pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, l'application $\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_k(R) = R(\beta_k)$ est linéaire et $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie donc φ_k est lipschitzienne donc continue.
c. Soit $U = \bigcap\limits_{k=0}^{n} \varphi_k^{-1}((-1)^{n-k}\,\mathbb{R}_+^*)$ avec la convention $(1)\,\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^*$ et $(-1)\,\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_-^*$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$ et que φ_k est continue, alors $\varphi_k^{-1}((-1)^{n-k}\,\mathbb{R}_+^*)$ est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$ en tant qu'image réciproque d'un intervalle ouvert par une application continue. De plus, U est alors ouvert en tant qu'intersection d'un nombre fini d'ouverts.
Comme P appartient à l'ouvert U d'après la question **a.**, il existe $r > 0$ tel que $B(P,r) \subset U$.
Or si un polynôme Q appartient à U, on a $Q(\beta_n) > 0$, $Q(\beta_{n-1}) < 0$, $\cdots$, $Q(\beta_0)$ du signe de $(-1)^n$ ce qui

implique grâce au théorème des valeurs intermédiaires que la fonction polynomiale continue Q s'annule (en c_k) sur chaque intervalle du type $]\beta_k;\beta_{k+1}[$ avec $k \in [\![0;n-1]\!]$. Le polynôme Q a donc n racines distinctes, il est de degré n, on en déduit qu'il existe $\mu > 0$ tel que $Q = \mu \prod_{k=0}^{n-1}(X - c_k)$ donc $Q \in S$. Comme on vient de prouver que $U \subset S$, et puisque $B(P,r) \subset U$, on a donc $B(P,r) \subset S$ ce qui justifie que S est ouvert.

4.25 **a.** Déjà $d(x,A)$ existe car la partie $B_x = \{||x-a|| \mid a \in A\}$ est non vide et minorée par 0.

Soit $(x,y) \in E^2$ et $a \in A$, on a $||x-a|| \leqslant ||x-y||+||y-a||$ or $d(x,A) \leqslant ||x-a||$ donc $d(x,A) \leqslant ||x-y||+||y-a||$. On en déduit que $d(x,A) - ||x-y|| \leqslant ||y-a||$ donc $d(x,A) - ||x-y||$ est un minorant de B_y et comme $d(y,A)$ en est le plus grand des minorants : $d(x,A) - ||x-y|| \leqslant d(y,A) \Longrightarrow d(x,A) - d(y,A) \leqslant ||x-y||$.
L'inégalité $d(y,A) - d(x,A) \leqslant ||y-x|| = ||x-y||$ s'en déduit par symétrie.
On conclut que $\left|d(x,A) - d(y,A)\right| \leqslant ||x-y||$ donc d est 1-lipschitzienne.

b. • ($\Longrightarrow$) Si x est adhérent à A alors $\forall n \geqslant 0,\ B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) \cap A \neq \emptyset$ donc $\exists a_n \in A,\ ||x - a_n|| < \frac{1}{2^n}$ donc $d(x,A) \leqslant \frac{1}{2^n}$ et comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x,A) = 0$.

• ($\Longleftarrow$) Si $d(x,A) = \mathrm{Inf}\{||x-a|| \mid a \in A\} = 0$, soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists a \in A,\ ||x-a|| < \varepsilon$ par caractérisation de la borne inférieure donc $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et x est bien adhérent à A.

c. Soit $b \in A$, posons $K = A \cap B_f(x, ||b-x||)$. Alors K est fermé comme intersection de deux fermés, borné car $B_f(x, ||b-x||)$ donc K est un compact non vide car il contient b. Comme $K \subset A$, on a $d(x,A) \leqslant d(x,K)$. De plus, $\forall a \in K,\ ||x-a|| \leqslant ||x-b|| \leqslant d(x,A)$ car $a \in B_f(x, ||b-x||)$. On en déduit en passant à la borne inférieure que $d(x,K) \leqslant d(x,A)$ et on a enfin $d(x,A) = d(x,K)$. Comme $a \mapsto ||x-a||$ est continue (car 1-lipschitzienne) sur K et à valeurs dans $\mathbb{R}$, elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi : $d(x,K) = \underset{a \in K}{\mathrm{Inf}}(||x-a||) = \underset{a \in K}{\mathrm{Min}}(||x-a||)$ et il existe $a_0 \in K \subset A$ tel que $d(x,K) = d(x,A) = ||x - a_0||$.

4.26 Montrer que F est un sous-espace de B (non réduit à $\{0\}$) est facile, ce qui montre déjà que F est un convexe et que F n'est pas borné, car stable par multiplication par un scalaire (aussi grand qu'on veut).

Soit $v \in F$, alors par définition : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ v_n = 0$. Pour tout réel $r > 0$, la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \frac{r}{2}$ vérifie $||u-v||_\infty = \frac{r}{2} < r$ donc $u \in B(v,r)$ alors que $u \notin F$ car $u_n = \frac{r}{2} \neq 0$ dès que $n \geqslant n_0$. Par conséquent aucun vecteur v de F n'est intérieur à F ; F n'est pas ouvert, mais pire : $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.
Considérons la suite de suites $(u^N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ où $u^N = (u_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u_n^N = \dfrac{1}{n+1}$ si $n \leqslant N$ et $u_n^N = 0$ sinon. Alors si $u = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $||u^N - u|| = \dfrac{1}{N+2}$ donc $(u^N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers u et $u \notin F$: F n'est pas fermé.

Montrons que $\overline{F}$ est le sous-espace Z des suites tendant vers 0.

• Si $u \in \overline{F}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a $B(u,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ donc il existe $v \in F$ telle que $||u-v|| < \varepsilon$. Mais comme $v \in F$: $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ v_n = 0$. On en déduit que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon$. Ceci justifie que $u \in Z$.

• Réciproquement, si $u \in Z$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ donc la suite v définie par $v_n = u_n$ si $n \leqslant n_0$ et $v_n = 0$ si $n > n_0$ vérifie bien $v \in F$ et $||u-v||_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ donc $v \in B(u,\varepsilon) \cap F$ qui n'est donc pas vide. On vient d'établir que $u \in \overline{F}$.

Par double inclusion, on a bien prouvé que $\overline{F} = Z$.

4.4 Suites récurrentes réelles

4.27 Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \cos(u_{n+1}) \in [-1;1]$ donc $u_n \in \cos([-1;1]) = [\cos(1);1] \subset [0;\pi]$ ce qui fait que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \text{Arccos}(u_n)$. Comme $f = \text{Arccos}$ est strictement décroissante, une petite étude de fonction montre qu'il existe un unique $\alpha \in [0;1]$ tel que $\alpha = \text{Arccos}(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \alpha$. De plus, si par exemple $u_0 < \alpha$, comme $\forall x \in]0;1[\ \text{Arccos}'(x) < -1$, on a d'après le théorème des accroissements finis : $|u_1 - \alpha| = |f(u_0) - f(\alpha)| > |u_0 - \alpha|$ et $|u_2 - \alpha| > |u_1 - \alpha| > |u_0 - \alpha| \implies u_2 < u_0$. On en déduit (à détailler), que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge vers $0 \leqslant \ell_1 < \alpha$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par 1 donc converge vers $\alpha < \ell_2 \leqslant 1$. On sait que $\ell_1 = \text{Arccos}(\ell_2)$ et $\ell_2 = \text{Arccos}(\ell_1)$ donc $\text{Arccos}(\text{Arccos}(\ell_1)) = \ell_1$ mais on montre que c'est impossible. De même $u_0 > \alpha$ impossible d'où $u_0 = \alpha$.

4.28 La fonction f est paire, positive, dérivable sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$ et elle vaut 2 en 0 donc $f(\mathbb{R}) =]0;2]$.

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x > 0,\ g'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2} - 1$. g est strictement positive sur $\mathbb{R}_-$ et $\forall x \geqslant 0,\ g'(x) < 0$ donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]-\infty;2]$ car $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$; ainsi, la fonction g ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$, et il est clair que c'est en 1 puisque $g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$: le seul point fixe de la fonction f est 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f\circ f(x) - x = \dfrac{2}{1 + (2/(1+x^2))^2} - x = \dfrac{2(1+x^2)^2 - x((1+x^2)^2+4)}{(1+x^2)^2+4}$ or on peut factoriser plusieurs fois par $x-1$ car 1 est racine triple du numérateur et on obtient $2(1+x^2)^2 - x((1+x^2)^2+4) = (1-x)^3(x^2+x+2)$. Le discriminant du polynôme X^2+X+2 vaut $\Delta = -7 < 0$ donc x^2+x+2 reste strictement positif sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la quantité $f\circ f(x) - x$ est du signe de $1-x$.

Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, on a $u_1 \in]0;2]$ d'après l'étude précédente. De plus, comme l'intervalle $]0;2]$ est stable par f car $f(]0;2]) =]2/5;2] \subset]0;2]$, on montre facilement par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \geqslant 1,\ 0 < u_n \leqslant 2$. Traitons trois cas :

- Si $u_1 = 1$ (c'est-à-dire $u_0 = \pm 1$), comme 1 est un point fixe de f, on a $(u_n)_{n\geqslant 1}$ constante égale à 1 donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1.
- Si $u_1 \in]0;1[$, alors comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(1) = 1 < u_2 = f(u_1) < 2 = f(0)$ et, de même, $f(2) = 2/5 < u_3 = f(u_2) < 1 = f(1)$. Mais comme $u_3 - u_1 = f\circ f(u_1) - u_1$ est du signe de $1 - u_1$, on a donc $u_3 > u_1$. En partant de $u_1 < u_3 < 1 < u_2$ et en appliquant f indéfiniment, on obtient par une récurrence classique $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_1 < u_3 < \cdots < u_{2n+1} < 1 < u_{2n} < \cdots < u_2$. La suite $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ (resp. $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$) est décroissante (resp. croissante) et minorée par 1 (resp. majorée par 1) donc elle converge vers $\ell_0 \in [1;2[$ (resp. $\ell_1 \in]0;1]$). Comme $u_{2n+2} = f\circ f(u_{2n})$, en passant à la limite et par continuité de f, on a $\ell_0 = f\circ f(\ell_0)$ ce qui montre avec l'étude précédente que $\ell_0 = 1$. De même, comme $u_{2n+3} = f\circ f(u_{2n+1})$, on a $\ell_1 = f\circ f(\ell_1)$ et $\ell_1 = 1$. Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $u_1 \in]1;2]$, alors comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $0 < f(2) = 2/5 < u_2 = f(u_1) < 1 = f(1)$ et, de même, $f(1) = 1 < u_3 = f(u_2) < 2 = f(0)$. Mais comme $u_3 - u_1 = f\circ f(u_1) - u_1$ est du signe de $1 - u_1$, on a donc $u_3 < u_1$. En partant de $u_2 < 1 < u_3 < u_1$ et en appliquant f indéfiniment, on obtient par une récurrence classique $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_2 < u_4 < \cdots < u_{2n} < 1 < u_{2n+1} < \cdots < u_3 < u_1$. La suite $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ (resp. $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$) est croissante (resp. décroissante) et majorée par 1 (resp. minorée

par 1) donc elle converge vers $\ell_0 \in]0;1]$ (resp. $\ell_1 \in [1;2]$). Comme $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$, en passant à la limite et par continuité de f, on a $\ell_0 = f \circ f(\ell_0)$ ce qui montre avec l'étude précédente que $\ell_0 = 1$. De même, comme $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$, on a $\ell_1 = f \circ f(\ell_1)$ et $\ell_1 = 1$. Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Dans tous les cas, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 1.

Ici, $f'(1) = -1$ donc on ne peut pas utiliser le théorème des accroissements finis directement pour montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Il faudrait aller plus loin dans l'ordre de la formule de TAYLOR reste intégral.

4.29 On étudie la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$. Les deux intervalles $]-\infty;-1]$ et $[-1;+\infty[$ sont stables. Si $u_0 > -1$, la suite décroît et tend vers -1 ; si $u_0 < -1$, la suite croît et tend vers -1 car c'est le seul point fixe de f.

4.30 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive car $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ et $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = \sqrt{2}-1$. On montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}-\ell| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n-\ell|$ donc $|u_n-\ell| \leqslant \dfrac{1}{4^n}|u_0-\ell|$ et c'est fini !

4.31 On constate que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et que $u_1 = \sqrt{u_0}$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$. On étudie donc les points fixes de $f : x \to \sqrt{2x}$ (croissante) et on montre la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 2 selon les valeurs de u_0 (ou de u_1).

4.5 Applications linéaires continues

4.32 Pour $f \in E$, $|T(f)| \leqslant ||\varphi||_1||f||_\infty$ par inégalité de la moyenne : T est continue et $|||T|||_\infty \leqslant ||\varphi||_1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = \dfrac{\varphi(x)}{|\varphi(x) + \frac{1}{n}}$, alors $||f_n||_\infty \leqslant 1$ et on montre par encadrement que $\big|T(f_n) - ||\varphi||_1\big|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi : $|||T|||_\infty = ||\varphi||_1$.

4.33 Pour $f \in E$, $|T(f)| \leqslant ||\varphi||_\infty||f||_1$ par inégalité de la moyenne : T est continue et $|||T|||_1 \leqslant ||\varphi||_\infty$. Comme φ est continue sur un compact, il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $|\varphi(x_0)| = ||\varphi||_\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0;1],\ |x-x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |\varphi(x)-\varphi(x_0)| \leqslant \varepsilon$. On construit alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions (type DIRAC) telles que f_n est nulle en dehors de $[0;1]\cap[x_0-\alpha;x_0+\alpha]$, d'intégrale 1 et on montre par encadrement que $|T(f_n)-\varphi(x_0)| \leqslant \varepsilon$ ce qui permet de justifier que $|||T|||_1 = ||\varphi||_\infty$.

4.34 **a.** Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction positive $t \mapsto |P(t)|$ est continue sur le segment $[-1;1]$ donc elle y est bornée et y atteint ses bornes, ce qui justifie la définition de $||P||_1$. Ainsi, $||.||_1$ va bien de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}_+$.

En fait, la norme $||\,.\,||_1$ est la norme $||\,.\,||_{\infty,[-1;1]}$ pour laquelle on a déjà vu dans le cours qu'elle vérifiait l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $||P||_1 = 0$, puisque $||\,.\,||_{\infty,[-1;1]}$ est une norme, la fonction polynomiale P s'annule sur le segment $[-1;1]$ et le polynôme P admet donc une infinité de racines ce qui montre bien que $P = 0$. On vient d'établir la séparation de $||\,.\,||_1$: $||\,.\,||_1$ est une norme sur E.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$, on a $||P_n||_\infty = 1$ et $||P_n||_1 = P_n(1) = n+1$ car, par inégalité triangulaire, $\forall t \in [-1;1],\ |P_n(t)| \leqslant 1 + |t| + \cdots + |t|^n \leqslant n+1 = P_n(1)$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||P_n||_1}{||P_n||_\infty} = +\infty$ ce qui interdit à $||\,.\,||_\infty$ de dominer $||\,.\,||_1$: ces deux normes ne sont pas équivalentes.

b. f_n est linéaire en tant que restriction à E_n de f qui l'est. Comme E_n est de dimension finie, d'après le cours, f_n est lipschitzienne donc continue : ceci justifie l'existence du réel $u_n = |||f_n|||_\infty = \underset{P\in E_n, ||P||_\infty=1}{\mathrm{Sup}} |f_n(P)|$.

Ici, pas besoin de ce théorème puisque si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E_n$ et $||P||_\infty = 1$, alors $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $|a_k| \leqslant 1$ et on a donc $|f_n(P)| = |P(x_0)| = \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||x_0|^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k$ donc u_n existe (on le savait déjà mais là on a une majoration effective) et $u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k$.

• Si $x_0 \geqslant 0$, en prenant $P = P_n = 1+X+\cdots+X^n$, on a bien $P \in E_n$ et $||P||_\infty = 1$ et $|f_n(P)| = \sum_{k=0}^{n} x_0^k = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k$ donc le majorant trouvé précédemment est en fait un élément de l'ensemble à majorer et on en déduit que $u_n = |||f_n|||_\infty = \underset{P\in E_n, ||P||_\infty=1}{\mathrm{Sup}} |f_n(P)| = \underset{P\in E_n, ||P||_\infty=1}{\mathrm{Max}} |f_n(P)| = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k$.

• Si $x_0 \leqslant 0$, avec $P = Q_n = 1 - X + \cdots + (-1)^n X^n$, $P \in E_n$ et $||P||_\infty = 1$ et $|f_n(P)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_0^k = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k$ donc le majorant trouvé précédemment est encore un élément de l'ensemble à majorer et on déduit à nouveau que $u_n = |||f_n|||_\infty = \underset{P\in E_n, ||P||_\infty=1}{\mathrm{Sup}} |f_n(P)| = \underset{P\in E_n, ||P||_\infty=1}{\mathrm{Max}} |f_n(P)| = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k$.

Dans les deux cas, on a $u_n = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k$ et u_n est la somme partielle de la série géométrique de raison $|x_0|$. Si $|x_0| < 1$, la série converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1-|x_0|}$; si $|x_0| \geqslant 1$, alors la série diverge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. Initialisation : $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0.x) = T_0(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{ch}(0.x)$ et $T_1(\cos x) = \cos(1.x)$ et $T_1(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{ch}(1.x)$.

Si on suppose ces relations vraies pour tout réel x et pour les entiers $n \geqslant 1$ et $n+1$ fixés, alors par définition de la suite des polynômes de TCHEBYCHEV, on a $T_{n+2}(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx)$ et $T_n(\mathrm{ch}\,(x)) = 2\mathrm{ch}\,(x)\mathrm{ch}\,((n+1)x) - \mathrm{ch}\,(nx)$ sauf que l'on connaît les formules de trigonométrie circulaire et hyperbolique $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ et $2\mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) = \mathrm{ch}\,(a+b) + \mathrm{ch}\,(a-b)$ donc, en les appliquant pour $a = (n+1)x$ et $b = x$, $T_{n+2}(\cos(x)) = \cos((n+2)x) + \cos(nx) - \cos(nx) = \cos((n+2)x)$ mais aussi $T_{n+2}(\mathrm{ch}\,(x)) = \mathrm{ch}\,((n+2)x) + \mathrm{ch}\,(nx) - \mathrm{ch}\,(nx) = \mathrm{ch}\,((n+2)x)$.

Par principe de récurrence, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n\big(\cos(x)\big) = \cos(nx)$ et $T_n\big(\mathrm{ch}\,(x)\big) = \mathrm{ch}\,(nx)$.
De même, par une récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$, $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$, T_n a la même parité que n.

d. Traitons à nouveau deux cas :

• Si $|x_0| \leqslant 1$ et $P \in E_n$ tel que $||P||_1 = 1$, il est clair que $|f_n(P)| = |P(x_0)| \leqslant ||P||_1 = \underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{\mathrm{Sup}} |P(t)|$ car $x_0 \in [-1;1]$ donc v_n existe et on a $v_n \leqslant 1$. En prenant $P = 1$, on a bien $P \in E_n$ et $||P||_1 = 1$ et $|f_n(P)| = 1$ donc le majorant trouvé avant est un élément de l'ensemble à majorer et on en déduit que $v_n = |||f_n|||_1 = \underset{P\in E_n, ||P||_1=1}{\mathrm{Sup}} |f_n(P)| = \underset{P\in E_n, ||P||_1=1}{\mathrm{Max}} |f_n(P)| = 1$.

• Si $|x_0| > 1$, comme ch est une bijection strictement croissante et continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1;+\infty[$, il existe $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x_0| = \mathrm{ch}\,(y_0)$ (il s'agit en fait de $y_0 = \mathrm{Argch}\,(|x_0|) = \ln(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1})$ mais chut !). D'après ce qui précède, $T_n \in E_n$ car $\deg(T_n) = n$, $||T_n||_1 = 1$ car tout réel $x \in [-1;1]$ s'écrit $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ donc $|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leqslant 1$ avec $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n.0) = 1$. De plus, comme T_n est pair ou impair, on obtient $|f_n(T_n)| = |T_n(x_0)| = |T_n(|x_0|)| = |T_n(y_0)| = |\mathrm{ch}(ny_0)| = \mathrm{ch}\,(ny_0)$ ce qui prouve que $v_n = |||f_n|||_1 = \underset{P\in E_n, ||P||_1=1}{\mathrm{Sup}} |f_n(P)| \geqslant \mathrm{ch}\,(ny_0)$.

Par conséquent, si $|x_0| \leqslant 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ et, si $|x_0| > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ par minoration.

On peut revenir sur **a.** maintenant qu'on a les polynômes de TCHEBYCHEV à disposition. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on vient de voir que $||T_n||_1 = 1$, on a aussi $T_n \in E$ et $||T_n||_\infty \geqslant 2^{n-1}$. Par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||T_n||_\infty}{||T_n||_1} = +\infty$ ce qui interdit à $||\,.\,||_1$ de dominer $||\,.\,||_\infty$. Ces deux normes sont incomparables : aucune ne domine l'autre.

4.35 **a.** Si $f \in E$, par composition et somme, la fonction $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ est aussi continue sur $[0;1]$ car $x \mapsto x$ et $x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$ envoient $[0;1]$ dans $[0;1]$ donc l'application T va bien de E dans E. Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $x \in [0;1]$, on a $T(\lambda f+g)(x) = (\lambda f+g)\left(\frac{x}{2}\right)+(\lambda f+g)f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \lambda\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)$ donc $T(\lambda f+g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$ et on en déduit donc que $T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g)$ ce qui montre la linéarité de T : T est donc un endomorphisme de E.

Soit $x \in [0;1]$ et $f \in E$, alors $|T(f)(x)| = \left|f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leqslant ||f||_\infty + ||f||_\infty = 2||f||_\infty$. En passant à la borne supérieure, on en déduit que $||T(f)||_\infty \leqslant 2||f||_\infty$. Ainsi, si $(f,g) \in E^2$, par linéarité de T et ce qui précède, on a $||T(f)-T(g)||_\infty = ||T(f-g)||_\infty \leqslant 2||f-g||_\infty$. Ceci prouve que T est 2-lipschitzienne donc continue sur E. La constante $\alpha = 2$ convient dans l'inégalité $\forall f \in E,\ ||T(f)||_\infty \leqslant \alpha||f||_\infty$. Autrement dit, $|||T||| = \operatorname*{Sup}\limits_{f\in E,\ f\neq 0} \dfrac{||T(f)||_\infty}{||f||_\infty} \leqslant 2$ (norme subordonnée). Si on prend pour u la fonction constante égale à 1, alors $T(u) = 2u$ est constante égale à 2 donc $\alpha = 2$ est optimale (en fait minimale). En effet, si on avait $\forall f \in E,\ ||T(f)||_\infty \leqslant \beta||f||_\infty$ avec $\beta < 2$, comme $u \in E$, on aurait $2 = ||T(u)||_\infty \leqslant \beta||u||_\infty = \beta$ ce qui est absurde. Ainsi, $\alpha = 2$ est la plus petite constante telle que $\forall f \in E,\ ||T(f)||_\infty \leqslant \alpha||f||_\infty$: $|||T||| = 2$.

b. Comme $|f|$ est continue sur le segment $[0;1]$, par le théorème des bornes atteintes, il existe $c \in [0;1]$ tel que $|f(c)| = ||f||_\infty$; c ne peut pas être nul car f est non nulle donc $||f||_\infty > 0$ alors que $f(0) = 0$ par hypothèse. Posons $A = \{x \in [0;1],\ |f(x)| = ||f||_\infty\}$. Alors $A \subset]0;1]$, $A \neq \emptyset$ car $c \in A$ et A est minoré par 0. On peut donc poser $x_0 = \operatorname{Inf}(A) \in [0;1]$. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers x_0, alors comme $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(a_n)| = ||f||_\infty$, en passant à la limite, on obtient par continuité de f la relation $|f(x_0)| = ||f||_\infty$ ce qui montre que $x_0 > 0$ car $|f(0)| = 0 < ||f||_\infty$. Soit $x \in]0;x_0]$, alors $x \notin A$ car $x < \inf(A)$ donc $|f(x)| \neq ||f||_\infty$. Mais comme on a $|f(x)| \leqslant ||f||_\infty$ par définition de la norme infinie, on en déduit qu'on a bien $|f(x)| < ||f||_\infty$.

c. On a vu en **a.** que u est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. La question est donc de montrer que $E_1(T) = \text{Vect}(u)$. Soit g un vecteur propre de T associé à la valeur propre 2, alors $T(g) = 2g$. Posons $f = g-g(0)u$. Comme $E_2(T)$ est un sous-espace vectoriel de E, $f \in E_2(T)$ de sorte que $T(f) = 2f$. Supposons que f n'est pas la fonction nulle, d'après la question précédente, $\exists x_0 \in]0;1],\ \forall x \in [0;x_0[,\ |f(x)| < |f(x_0)| = ||f||_\infty$. Comme $\dfrac{x_0}{2} \in [0;x_0[$, on a $\left|f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)\right| < |f(x_0)|$ et, par définition de la norme infinie, $\left|f\left(\dfrac{x_0+1}{2}\right)\right| \leqslant |f(x_0)|$. On a donc $\left|f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)+f\left(\dfrac{x_0+1}{2}\right)\right| \leqslant \left|f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)\right|+\left|f\left(\dfrac{x_0+1}{2}\right)\right| < 2f(x_0)$ par inégalité triangulaire. Mais ceci vient contredire le fait que $T(f)(x_0) = 2f(x_0)$, c'est-à-dire $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)+f\left(\dfrac{x_0+1}{2}\right) = 2f(x_0)$.

On conclut ce raisonnement par l'absurde par $f = g-g(0)u = 0$ donc $g \in \text{Vect}(u)$. Ainsi $E_2(T) = \text{Vect}(u)$ et le sous-espace propre de T associé à la valeur propre 2 est bien de dimension 1.

4.36 u est bien sûr linéaire, et $\forall x \in [0;1],\ |u(f)(x)| \leqslant (1-x)|f(0)| + x|f(1)| \leqslant (1-x)||f||_\infty + x||f||_\infty = ||f||_\infty$ donc u est continu et $|||u||| \leqslant 1$. On a égalité pour la fonction constante égale à 1 donc $|||u||| = 1$.

4.37 Δ est clairement linéaire et par inégalité triangulaire on a $||\Delta||_\infty \leqslant 2||u||_\infty$ donc Δ est continu et $|||\Delta||| \leqslant 2$. Il suffit de prendre la suite $u = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour voir qu'on a l'égalité donc $|||\Delta||| = 2$.

4.38 On montre par inégalité triangulaire et inégalité de la moyenne que $\forall f \in E$, $|\varphi(f)| \leqslant 2||f||_\infty$ donc φ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 2$. On peut construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions affines par morceaux, valant -1 en a et 1 en dehors de l'intervalle $\left[a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right]$, de norme infinie 1, telles $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(f_n) = 2$ pour conclure que $|||\varphi||| = 2$.

4.39 Tout d'abord T est linéaire va bien de E dans F par le théorème fondamental de l'intégration. Par encadrement, on montre que : $\forall \in E$, $N_2(T(f)) \leqslant 2N_1(f)$ donc T est continue et $|||T||| \leqslant 2$. Il suffit de prendre $f = 1$ pour avoir une égalité, donc $|||T||| = 2$.

4.40 Pour $||x||_\infty \leqslant 1$, on montre avec une inégalité triangulaire que $||u||_\infty \leqslant \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ donc on peut majorer $|||u|||$. Soit $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, considérons $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $x_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 0$ et $x_j = \dfrac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|}$ sinon. Alors $||x||_\infty = 1$ et $||u(x)||_\infty = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ d'où l'égalité.

4.41 L'inégalité $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant n\mathrm{Tr}\,(A^tA)$ est juste l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ appliquée au couple (A, I_n) avec ce produit scalaire. Alors, pour $A \in E$, on a $|\mathrm{Tr}\,(A)| \leqslant \sqrt{n}$ ce qui prouve la continuité de Tr et que $|||\mathrm{Tr}\,||| \leqslant \sqrt{n}$. Il suffit de prendre $A = I_n$ pour voir que l'on a égalité et que $|||\mathrm{Tr}\,||| = \sqrt{n}$.

4.42 **a.** On établit cette relation par une récurrence ; si $n \geqslant 1$, $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (u \circ v^n) \circ v - v^{n+1} \circ u$ qui vaut $(v^n \circ u + n\alpha v^{n-1}) \circ v - v^{n+1} \circ u = v^n \circ u \circ v + n\alpha v^n - v^{n+1} \circ u = v^n \circ (u \circ v - v \circ u) + n\alpha v^n = (n+1)\alpha v^n$.
Si v est nilpotent, $\exists n \geqslant 1$ tel que $v^n = 0$ et $v^{n-1} \neq 0$ et la relation $u \circ v^n - v^n \circ u = n\alpha v^{n-1}$ donne $\alpha = 0$.
Sinon, on prend les normes et on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)|\alpha|\,||v^n|| \leqslant ||u||\,||v^{n+1}|| + ||v^{n+1}||\,||u|| \leqslant 2||u||\,||v||\,||v^n||$ et en divisant par $||v^n||$, on a $(n+1)|\alpha| \leqslant ||u||\,||v||$ donc $|\alpha| = 0$.
b. On prend la trace de $u \circ v - v \circ u = \alpha\mathrm{id}_E$ et on trouve directement $\alpha = 0$.

4.43 **a.** Les fonctions $v : x \mapsto \int_0^x u(t)dt + k$ sont les primitives de $u \in E$ sur $[0;1]$, la condition $v \in F$ s'écrit $\int_0^1 v(t)dt = 0 = \int_0^1 \Big(\int_0^x u(t)dt\Big)dx + k = 0$ donc, par intégration par parties, on trouve l'unique valeur de k, à savoir $k = -[x\int_0^x u(t)dt]_0^1 + \int_0^1 xu(x)dx = \int_0^1 (x-1)u(x)dx$ (unicité).
b. Comme $T(u)(x) = \int_0^x u(t)dt - \int_0^1 (1-t)u(t)dt$, T est linéaire par linéarité de l'intégrale. T n'est pas surjective car les $T(u)$ sont de classe C^1.
Comme $T(u)(x) = \int_0^x tu(t)dt + \int_x^1 (t-1)u(t)dt$, on a $|T(u)(x)| \leqslant \Big(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(1-x)^2}{2}\Big)||u||_\infty$ ce qui donne la majoration $||T(u)||_\infty \leqslant \dfrac{||u||_\infty}{2}$. Ceci prouve que T est continue et que $|||T||| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Avec la fonction constante $u = 1$, on a $T(u)(x) = x - \dfrac{1}{2}$ après calculs donc $|||T||| = \dfrac{1}{2}$.

4.6 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

4.44 **a.** C'est clairement vrai pour $p = 1$ car alors forcément $t_1 = 1$ et pour $p = 2$ par définition d'un convexe.
Soit $p \geqslant 2$ tel que les deux propriétés sont vraies, si $(t_1, \cdots, t_p, t_{p+1}) \in [0;1]^{p+1}$, $(x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}) \in C^{p+1}$ et $\sum\limits_{k=1}^{p+1} t_k = 1$, on considère deux cas :

• si $t_{p+1}=1$, alors $\sum\limits_{k=1}^{p+1} t_k x_k = x_{p+1} \in C$ et $T\Big(\sum\limits_{k=1}^{p+1} t_k x_k\Big) = T(x_{p+1}) = \sum\limits_{k=1}^{p+1} t_k T(x_k)$ car $t_1 = \cdots = t_p = 0$.

• si $t_{p+1} \neq 0$ on écrit $x = \sum\limits_{k=1}^{p+1} t_k x_k = (1-t_{p+1})\Big(\sum\limits_{k=1}^{p} s_k x_k\Big) + t_{p+1}x_{p+1}$ avec $s_k = \dfrac{t_k}{1-t_{p+1}}$. Mais par hypothèse de récurrence, comme $\forall k \in [\![1;p]\!],\ s_k \in [0;1]$ et $\sum\limits_{k=1}^{p} s_k = 1$, on a $y = \sum\limits_{k=1}^{p} s_k x_k \in C$ donc $(1-t_{p+1})y + t_{p+1}x_{p+1} \in C$ puisque C est convexe. De plus : $T\Big(\sum\limits_{k=1}^{p+1} t_k x_k\Big) = T(x) = T((1-t_{p+1})y + t_{p+1}x_{p+1})$ donc $T\Big(\sum\limits_{k=1}^{p+1} t_k x_k\Big) = (1-t_{p+1})T(y) + t_{p+1}T(x_{p+1}) = (1-t_{p+1})\Big(\sum\limits_{k=1}^{p} s_k T(x_k)\Big) + t_{p+1}T(x_{p+1}) = \sum\limits_{k=1}^{p+1} t_k T(x_k)$ par hypothèse de récurrence et car T est une transformation affine.
L'hérédité est vérifiée et par principe de récurrence, on a le résultat.
b. D'après la question précédente, comme $\forall k \in \mathbb{N},\ T^k(a) \in C$ par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in C$. D'après BOLZANO-WEIERSTRASS, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \in C$. Mais $\forall n \in \mathbb{N},\ T(x_n) - x_n = \dfrac{T^{n+1}(a) - a}{n+1}$ par télescopage donc, comme C est bornée, $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = x$. Mais T est continue donc, par caractérisation séquentielle : $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = T(x)$.
Alors, par unicité de la limite : $T(x) = x$ et x est bien un point fixe de T.
c. On prend $C = [0;1]$ dans $\mathbb{R}$ et $T(x) = 1-x$ alors le seul point fixe est $x = \dfrac{1}{2}$.
On prend $C = [0;1]$ dans $\mathbb{R}$ et $T(x) = x$ alors tous les $x \in [0;1]$ sont fixes.
d. On sait que T_1 possède un point fixe d'après ce qui précède : voilà l'initialisation.
Supposons que, pour un entier $k \in [\![1;N-1]\!]$, les transformations $(T_1,\cdots,T_k)$ possèdent un point fixe commun. Comme indiqué, posons $C_k = \{x \in C \mid \forall i \in [\![1;k]\!],\ T_i(x) = x\}$. Alors C_k est inclus dans C donc bornée. De plus, C_k est non vide par hypothèse de récurrence et C_k est fermé car si on prend une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C_k qui converge vers ℓ dans E, alors par continuité de chaque T_i, on a $T(\ell) = \ell$ donc $\ell \in C_k$ ce qui prouve que C_k est aussi fermé. Enfin C_k est convexe car les applications T_i sont des transformations affines donc si $(x,y) \in C_k^2$, $i \in [\![1;k]\!]$ et $t \in [0;1]$: $T_i(tx+(1-t)y) = tT_i(x) +' 1(1-t)T_i(y) = tx + (1-t)y$.
Pour $x \in C_k$, on a $\forall i \in [\![1;k]\!],\ T_{k+1}(x) = T_{k+1}(T_i(x)) = T_i(T_{k+1}(x))$ donc $T_{k+1}(x) \in C_k$. Ainsi C_k est un convexe non vide fermé et borné sur lequel T_{k+1} est une transformation affine, on sait qu'alors il existe un point fixe de T_{k+1} dans C_k (qui est aussi un point fixe de $T_1,\cdots,T_k$ par construction). On a donc trouvé un point fixe commun aux applications $T_1,\cdots,T_{k+1}$ et montré l'hérédité.
Par principe de récurrence : $\exists x \in C,\ \forall k \in [\![1;N]\!],\ T_k(x) = x$.
Il suffit de prendre à nouveau $C = [0;1]$, et $T_k(x) = \dfrac{1}{2} + \lambda_k\Big(x - \dfrac{1}{2}\Big)$ avec $\lambda_k \in [-1;1]$ pour la stabilité de $[0;1]$.
En effet, $\dfrac{1}{2}$ est alors point fixe commun et $T_k \circ T_i(x) = T_i \circ T_k(x) = \dfrac{1}{2} + \lambda_k\lambda_i\Big(x - \dfrac{1}{2}\Big)$.

$\boxed{\textbf{4.45}}$ Il faut paramétrer : il existe $t_1 \neq t_2$ tels que $A = (t_1, f(t_1))$ et $B = (t_2, f(t_2))$. La tangente de f en A a pour équation $y = f(t_1) + f'(t_1)(x-t_1)$ donc l'hypothèse se traduit par $f'(t_1) = \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}$ si $t \neq t_1$ et $\varphi(t_1) = f'(t_1)$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{t_1\}$. De plus, $\lim\limits_{t\to t_1} \dfrac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} = f'(t_1)$ donc φ est continue en t_1.

Mais on sait aussi que $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ d'après l'énoncé. Les conditions du théorème de ROLLE sont remplies, on en déduit l'existence de $t_0 \in \,]\widetilde{t_1;t_2}[$ tel que $\varphi'(t_0) = \dfrac{f'(t_0)(t_0 - t_1) - f(t_0) + f(t_1)}{(t_0 - t_1)^2} = 0$.

Soit $M = (t_0, f(t_0))$ qui est sur la courbe de f. La tangente en M est d'équation $y = f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0)$.
On vient de voir que $f(t_1) = f(t_0) + f'(t_0)(t_1 - t_0)$ donc le point A appartient à la tangente de f en M.

4.46 **a.** Comme $|\lambda| < 1$, $\forall \theta \in [0;2\pi]$, on a $|-\lambda e^{i\theta}| < 1$ donc la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-\lambda e^{i\theta})^n$ converge et on a $\dfrac{e^{i\theta}}{1+\lambda e^{i\theta}} = e^{i\theta}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\lambda^n e^{in\theta} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\lambda^n e^{i(n+1)\theta}$. Définissons $f_n : \theta \mapsto (-1)^n\lambda^n e^{i(n+1)\theta}$, alors $||f_n||_{\infty,[0;2\pi]} = |\lambda|^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}|\lambda|^n$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur le segment $[0;2\pi]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0;2\pi]$, on peut intégrer terme à terme pour avoir $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}}{1+\lambda e^{i\theta}}d\theta = \int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(\theta)\Big)d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}f_n(\theta)d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\lambda^n\Big[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}\Big]_0^{2\pi} = \sum_{n=0}^{+\infty}0 = 0.$

b. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc, comme $Q \neq 0$ car Q n'admet pas de racine dans $D(a,r)$, on peut décomposer $Q = d\prod\limits_{j=1}^{r}(X-\alpha_j)^{m_j}$ dans $\mathbb{C}[X]$ avec $d \neq 0$ son coefficient dominant, $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ les racines distinctes de Q et $m_1,\cdots,m_r$ les ordres de multiplicité respectifs de $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ dans le polynôme Q. D'après les propriétés de la dérivée logarithmique (des polynômes : c'est au programme en MPSI mais pas en PCSI et ça ce montre assez simplement par récurrence sur r), on a $\dfrac{Q'}{Q} = \sum\limits_{j=1}^{r}\dfrac{m_j}{X-\alpha_j}$ donc $\dfrac{Q'(a+re^{i\theta})}{Q(a+re^{i\theta})} = \sum\limits_{j=1}^{r}\dfrac{m_j}{a+re^{i\theta}-\alpha_j} = \sum\limits_{j=1}^{r}\dfrac{b_j}{1+\lambda_j e^{i\theta}}$ en posant $b_j = \dfrac{m_j}{a-\alpha_j}$ et $\lambda_j = \dfrac{r}{a-\alpha_j}$. Soit $j \in [\![1;r]\!]$, comme $a_j \notin D(a,r)$, on a $|a-\alpha_j| > r$ donc $|\lambda_j| < 1$ et on peut appliquer le résultat de la question **a.** pour avoir $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}}{1+\lambda_j e^{i\theta}}d\theta = 0$ de sorte que, par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle I(Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Q'(a+re^{i\theta})}{Q(a+re^{i\theta})}re^{i\theta}d\theta = \frac{r}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}b_j\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}}{1+h_je^{i\theta}}d\theta = \frac{r}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}0 = 0.$

c. Si $Q = (X-a)^m U$ où U ne possède aucune racine dans $D(a,r)$, alors $\dfrac{Q'}{Q} = \dfrac{m}{X-a} + \dfrac{U'}{U}$ car la dérivée logarithmique transforme les produits en somme (comme un logarithme). Ainsi, par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle I(Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{m}{a+re^{i\theta}-a}re^{i\theta}d\theta + I(U) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}m\,d\theta + I(U)$ donc $I(Q) = m$ d'après la question **b.**.

d. Déjà, il s'agit bien d'un maximum car la fonction $\varphi : z \mapsto |P(z)|$ est bien continue sur $D(a,r)$ qui est un fermé borné de l'espace $\mathbb{C}$ (qui est de dimension finie) donc φ est bornée et atteint ses bornes sur $D(a,r)$ ce qui justifie l'existence de $||P|| = ||P||_{\infty,D(a,r)}$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire de $||\,.\,||$ proviennent des propriétés équivalentes de la norme infinie classique (sur $D(a,r)$). Pour la séparation, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $||P|| = 0$, alors $\forall z \in D(a,r)$, $|P(z)| = 0$ donc $P(z) = 0$ donc P possède une infinité de racines d'où $P = 0$.
Au final, $||\,.\,||$ est bien une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$ (et même sur $\mathbb{R}[X]$).

e. L'application $f : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie. D'après le cours, f est donc lipschitzienne. On en déduit l'existence de $M \geqslant 0$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $||f(P)|| = ||P'|| \leqslant M||P||$.

f. • Si $\mu = 0$, en prenant $k_0 = 0$, on a bien $\forall k \geqslant 0$, $|P_k(z)| \geqslant 0 = \dfrac{\mu}{2}$.

• Si $\mu > 0$, on prend $\varepsilon = \dfrac{\mu}{2} > 0$ et, puisque la suite $(P_k)_{k\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_n[X])^{\mathbb{N}}$ converge vers P (pour n'importe quelle norme car on est en dimension finie donc en particulier pour la norme de la question **d.**), il existe un entier k_0 tel que $\forall k \geqslant k_0$, $||P_k - P|| \leqslant \varepsilon = \dfrac{\mu}{2}$. Pour tout entier $k \geqslant k_0$ et tout complexe $z \in C(a,r) \subset D(a,r)$, $\mu \leqslant |P(z)| = |P(z)-P_k(z)+P_k(z)| \leqslant |P(z)-P_k(z)| + |P_k(z)| \leqslant ||P_k - P|| + |P_k(z)| \leqslant \dfrac{\mu}{2} + |P_k(z)|$ (on peut bien sûr aussi utiliser $\big||P(z)| - |P_k(z)|\big| \leqslant |P(z) - P_k(z)|$) et on en déduit bien que $|P_k(z)| \geqslant \dfrac{\mu}{2}$.

g. Dans cette question, pour s'assurer que $\mu > 0$, on choisit r assez petit pour être sûr qu'il n'y a pas de racine de P sur le cercle $C(a,r)$. Comme a est une racine de P par hypothèse, en notant $a, a_1, \cdots, a_q$ les différentes racines de P, il suffit de prendre $r < \underset{1 \leqslant i \leqslant q}{\mathrm{Min}} |a - a_i|$. Avec un tel choix, P ne s'annule pas sur $C(a, r)$ donc $\mu > 0$ car il s'agit d'un minimum. Soit $k \geqslant k_0$, on a $\dfrac{2\pi}{r}|I(P_k) - I(P)| \leqslant \displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\frac{P_k'(a+re^{i\theta})}{P_k(a+re^{i\theta})} - \frac{P'(a+re^{i\theta})}{P(a+re^{i\theta})}\right| d\theta$ par inégalité de la moyenne. En écrivant $\dfrac{P_k'}{P_k} - \dfrac{P'}{P} = \dfrac{(P_k' - P')P + P'(P - P_k)}{PP_k}$, on peut majorer le numérateur $|(P_k'(a + re^{i\theta}) - P'(a + re^{i\theta}))P(a + re^{i\theta}) + P'(a + re^{i\theta})(P(a + re^{i\theta}) - P_k(a + re^{i\theta})(a + re^{i\theta}))|$, puisque $|P_k'(a + re^{i\theta}) - P'(a + re^{i\theta})| \leqslant ||P_k' - P'|| \leqslant M||P_k - P||$, $|P(a + re^{i\theta})| \leqslant ||P||$, $|P'(a + re^{i\theta})| \leqslant ||P'||$ et $|P(a + re^{i\theta}) - P_k(a + re^{i\theta})| \leqslant ||P_k - P||$ car $C(a, r) \subset D(a, r)$, par la quantité $(||P'|| + M||P||)||P - P_k||$. Mais pour minorer le dénominateur, on sait que $|P_k(a + re^{i\theta})| \geqslant \dfrac{\mu}{2}$ d'après **e.** et $|P(a + re^{i\theta})| \geqslant \mu$ par définition de μ donc $|P_k(a + re^{i\theta})P(a + re^{i\theta})| = |P_k(a + re^{i\theta})|.|P(a + re^{i\theta})| \geqslant \dfrac{\mu^2}{2}$ donc, on obtient :

$$\frac{2\pi}{r}|I(P_k) - I(P)| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{(||P'|| + M||P||))||P - P_k||}{(\mu^2/2)} d\theta = \frac{2}{\mu^2}.(2\pi).(||P'|| + M||P||)||P - P_k|| \leqslant \frac{8\pi M||P||||P_k - P||}{\mu^2}.$$

On en conclut, puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} ||P - P_k|| = 0$ par hypothèse, que $\lim\limits_{k \to +\infty} |I(P_k) - I(P)| = 0$.

Or, en prenant $r > 0$ tel qu'on ait aussi $r < |\mathrm{Im}(a)|$, comme les P_k n'admettent que des racines réelles, P_k n'a pas de racine dans $D(a, r)$ donc $I(P_k) = 0$ par la question **b.**. On a alors $I(P) = 0$ puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} I(P_k) = I(P)$. Mais ceci contredit la question **c.** car P admet a pour racine de multiplicité $m \geqslant 1$ donc on sait que $I(P) = m$. Au final, une limite dans $\mathbb{R}_n[X]$ de polynômes scindés dans $\mathbb{R}$ est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$ puisqu'il ne peut avoir que des racines réelles. L'ensemble de ces polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés dans $\mathbb{R}$ est donc un fermé.

4.47 **a.** On sait d'après le cours que $||\,.\,||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il faut le refaire ici et montrer la séparation, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire !

Soit $(M, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $[MX]_i = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{i,k}x_k$. Ainsi, par inégalité triangulaire, on a $|[MX]_i| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |m_{i,k}||x_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} ||M||_\infty ||X||_\infty = n||M||_\infty ||X||_\infty$. On en déduit que $||MX||_\infty \leqslant n||M||_\infty ||X||_\infty$.

b. Par hypothèse, il existe $m \geqslant 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $||A^k||_\infty \leqslant m$. Soit aussi $X \in \mathrm{Ker}(A - I_n) \cap \mathrm{Im}\,(A - I_n)$, on a $AX = X$ et $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = AY - Y$. On multiplie cette dernière égalité par A^k donc $A^kX = A^{k+1}Y - A^kY$. Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kX = X$ par une récurrence simple et car $A^0X = I_nX = X$, donc en sommant ces relations, on obtient $B_pX = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^kX = X = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1}(A^{k+1}Y - A^kY) = \dfrac{A^pY - Y}{p}$.

D'après **a.** et par inégalité triangulaire, $||X||_\infty = \left|\left|\dfrac{A^pY - Y}{p}\right|\right|_\infty \leqslant \dfrac{mn + 1}{p}||Y||_\infty$. Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{mn + 1}{p} = 0$, on a $||X||_\infty = 0$ par encadrement donc $X = 0$. Les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $\mathrm{Im}\,(A - I_n)$ sont donc en somme directe donc supplémentaires car, avec la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) + \dim(\mathrm{Im}\,(A - I_n)) = n$.

c. Notons P la matrice dans la base canonique de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(A - I_n)$. La première colonne de B_p est constituée des coordonnées (dans la base canonique $(E_1, \cdots, E_n)$) de B_pE_1. En décomposant $E_1 = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $X_2 \in \mathrm{Im}(A - I_n)$ donc $AX_1 = X_1$ et $\exists X_3 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX_3 - X_3 = X_2$, alors $B_pE_1 = B_pX_1 + B_pX_2$. Comme avant, $B_pX_1 = X_1$ car $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kX_1 = X_1$. De plus, $B_pX_2 = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1}(A^{k+1}X_3 - A^kX_3) = \dfrac{A^pX_3 - X_3}{p}$ par télescopage donc $||B_pX_2||_\infty \leqslant \dfrac{nm + 1}{p}||X_3||_\infty$ ce qui donne $\lim\limits_{p \to +\infty} B_pX_2 = 0$ par encadrement comme ci-dessus.

Comme $PX = X_1$ par construction, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} B_pE_1 = PE_1$. On fait bien sûr de même pour les autres colonnes, ce qui montre que les n^2 coordonnées (les n^2 cases) de la suite $(B_p)_{p\geqslant 0}$ convergent vers celles de P. Comme on est en dimension finie, ceci assure que $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = P$.

4.48 **a.** Si on pose $I = [\alpha;\beta]$ et qu'on définit la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$, alors g est continue sur I, $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geqslant 0$ et $g(\beta) = f(\beta) - \beta \leqslant 0$ car $\alpha \leqslant f(\alpha) \leqslant \beta$ et $\alpha \leqslant f(\beta) \leqslant \beta$. Par le TVI, g s'annule en au moins un $x \in I$ donc f admet au moins un point fixe sur I.

b. Soit $[a;b] \subset f(I)$. Si $a = b$, par définition $\exists c \in I,\ f(c) = a$ donc $f([c;d]) = f(\{c\}) = \{a\} = [a;b]$ si $d = c$. Supposons donc maintenant que $a < b$. Posons $X = f^{-1}(\{b\})$ qui est non vide puisque $b \in f(I)$. Notons $s = \mathrm{Sup}(X)$. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = s$. Ainsi $s \in I$ puisque I est un segment (donc une partie fermée). Comme f est continue en s, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(s)$. Mais comme $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = b$, on a $f(s) = b$. De même $Y = f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Comme $s \notin Y$ car $a \neq b$, $Y\cap]-\infty;s[$ ou $Y\cap]s;+\infty[$ est non vide.

• Si $Y\cap]s;+\infty[\neq \emptyset$, on pose $c = s$ et on définit $d = \mathrm{Inf}(Y\cap]s;+\infty[) \in I$. Comme avant, la continuité de f en d prouve que $f(d) = a$ car d est limite d'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $Y\cap]s;+\infty[$ qui vérifient donc $f(y_n) = a$. Par le TVI, toute valeur $z \in [a;b] = [f(d);f(c)]$ admet un antécédent par f dans le segment $[c;d]$ donc $[a;b] \subset f([c;d])$. Réciproquement, soit $t \in [c;d]$, supposons que $f(t) > b$, alors par le TVI il existerait $x \in]t;d]$ tel que $f(x) = b$ ce qui contredirait la définition de $c = s$ comme la borne supérieure de X. Par ailleurs, si on avait $f(t) < a$, encore une fois par le TVI, il existerait $y \in]c;t[$ tel que $f(y) = a$ ce qui contredirait la définition de d comme la borne inférieure de $Y\cap]s;+\infty[$. Ainsi, on a $\forall t \in [c;d],\ f(t) \in [a;b]$ donc $f([c;d]) \subset [a;b]$. Au final, on a bien $f([c;d]) = [a;b]$.

• Si $Y\cap]-\infty;s[\neq \emptyset$, posons $c = \mathrm{Sup}(Y\cap]-\infty;s[) \in I$. Comme précédemment, la continuité de f prouve que $f(c) = a$. De plus, $X \cap [c;+\infty[\neq \emptyset$ car cet ensemble contient s. Posons donc $d = \mathrm{Inf}(X \cap [c;+\infty[) \in I$. De la même manière que ci-dessus, on montre que $f(d) = b$ et $f([c;d]) = [a;b]$.

4.49 **a.** Montrons que les points extrémaux de $C = B_{f,2}(0,1)$ sont les points de la sphère $S_2(0,1)$.

Si $u = (a,b) \in B_2(0,1)$, alors u n'est extrémal car en notant $r = \sqrt{a^2+b^2} < 1$, $x = (c,d) = \Big(\dfrac{1+r}{2}\Big)(a,b)$ et $y = (e,f) = -(a,b)$, on a $u \in [x;y]$ alors que $x \in C \setminus \{u\}$ et $y \in C \setminus \{u\}$. Ainsi $C \setminus \{u\}$ n'est pas convexe.

Si $u = (a,b) \in S_2(0,1)$, montrons que $C' = C \setminus \{u\}$ est encore convexe.
Soit $(v,w) \in C'^2$ avec $v \neq w$. Soit $t \in [0;1]$, posons $z = tv + (1-t)w$. Si $t = 0$, $z = w \neq u$. Si $t = 1$, $z = v \neq u$. Si $t \in]0;1[$, comme on sait que C est convexe, on a déjà $z \in C$. Si on avait $z = u$, alors $||z|| = ||tv+(1-t)w|| \leqslant t||v||+(1-t)||w|| \leqslant t+(1-t) = 1 = ||u||$. Ainsi, cette suite d'inégalités ne comporte que des égalités : $||v|| = ||w|| = 1$ et tv et $(1-t)w$ sont positivement liés (cas d'égalité dans MINKOWSKI) donc $v = w$ ce qui prouve que $v = w = z = u$: NON ! Ainsi C' est convexe et u est extrémal.

b. De la même manière (ou on le "voit" en faisant un dessin), les points extrémaux de $B_1(0,1)$ sont les quatre sommets du carré $S_1(0,1)$.

c. Il est clair que si $u \in C$ est le milieu de deux points distincts de C, alors u n'est pas extrémal car $C \setminus \{u\}$ ne sera plus convexe puisque les deux points dont on parle sont dans $C \setminus \{u\}$.
Réciproquement, si u n'est pas extrémal, alors il existe deux points distincts a et b de $(C \setminus \{u\})^2$ tels que $[a;b]$ n'est pas inclus dans $C \setminus \{u\}$. Mais comme C est convexe, cela signifie que $u \in [a;b]$. Ainsi, comme $u \neq a$ et $u \neq b$, il existe $t \in]0;1[$ tel que $u = ta + (1-t)b$. Quitte à échanger a et b, on peut supposer que $t \in \Big]0;\dfrac{1}{2}\Big]$. On pose alors $c = \dfrac{t}{2}a + \Big(1 - \dfrac{t}{2}\Big)b$ et $d = 3\dfrac{t}{2}a + \Big(1 - 3\dfrac{t}{2}\Big)b$ de sorte que c, d sont éléments de $[a;b] \subset C$. Comme $c \neq u$, $d \neq u$, $c \neq d$ et $\dfrac{c+d}{2} = u$, u est bien le milieu de deux points distincts de C.

d. Notons d'abord que si $u \in \mathcal{L}(E)$, comme on est en dimension finie, u est lipschitzienne donc $|||u|||$ existe. Puisque B est un compact de E et que E est de dimension finie, l'application $x \mapsto ||u(x)||$ est continue donc atteint ses bornes sur B donc $|||u|| = \mathrm{Max}_{x\in B}\, ||u(x)||$.

Montrons d'abord que C est une partie convexe de $\mathcal{L}(E)$. Soit $(u,v) \in C^2$ et $t \in [0;1]$, alors pour tout vecteur x de B, on a $||(tu+(1-t)v)(x)|| = ||tu(x)+(1-t)v(x)|| \leqslant t||u(x)||+(1-t)||v(x)||$ par inégalité triangulaire et homogénéité donc $||(tu+(1-t)v)(x)|| = ||tu(x)+(1-t)v(x)|| \leqslant t|||u|||+(1-t)|||v|||$. Ceci étant vrai pour tout $x \in B$, on a bien $|||tu+(1-t)v||| \leqslant t \times 1 + (1-t) \times 1 = 1$ d'où $tu+(1-t)v \in C$.
Montrons que si u est un automorphisme orthogonal de E, alors u est extrémal dans C.
Supposons que $u = \dfrac{v+w}{2}$ avec $(v,w) \in C^2$. Pour tout vecteur non nul x, on a donc $||x|| = ||u(x)|| = \dfrac{||v(x)+w(x)||}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(||v(x)||+||w(x)||\Big) \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(|||v|||+|||w|||\Big)||x|| = ||x||$. Ainsi, comme on a égalité dans l'inégalité de MINKOWSKI, les vecteurs $v(x)$ et $w(x)$ sont positivement liés. Or on a forcément $||v(x)|| = ||w(x)|| = ||x||$ donc $v(x) = w(x)$. Comme ceci marche aussi pour le vecteur nul, on a $v = w = u$ et u ne peut donc pas être le milieu d'un segment $[v;w]$ avec deux endomorphismes v, w distincts de C. Ainsi, d'après la question **c.**, u est extrémal dans C.
On garde la réciproque pour le chapitre sur les espaces euclidiens.

4.50 Méthode 1 : considérons $X = \{t \in [0;1] \mid f(t) \in A\}$. Alors X est une partie non vide ($0 \in X$) et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$ donc, à ce titre, admet une borne supérieure qu'on note x. Montrons que $f(x) \in \mathrm{Fr}(A)$.

• Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = x$. Comme f est continue en x, par caractérisation séquentielle de la continuité, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) = f(x)$. Par caractérisation séquentielle des points adhérents, comme $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de vecteurs de A, on en déduit que $f(x)$ est adhérent à A, c'est-à-dire $f(x) \in \overline{A}$.

• Supposons que $f(x) \in \overset{\circ}{A}$: il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x),\varepsilon) \subset A$. Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$, on a $x < 1$ car $f(1) \notin A$. Mais comme f est continue en x, on aurait un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [0;1],\ |t-x| < \alpha \Longrightarrow ||f(t)-f(x)|| < \varepsilon$. On aurait $\forall t \in [x;x+\alpha[\cap[0;1],\ |t-x| < \alpha$ donc $||f(t)-f(x)|| < \varepsilon \Longrightarrow f(t) \in B(f(x),\varepsilon) \subset A$ donc $f(t) \in A$ ce qui contredit le fait que x soit la borne supérieure de X car ce qui précède montre que $[x;x+\alpha[\cap[0;1] \subset X$. Ce raisonnement par l'absurde nous permet de conclure que $f(x) \notin \overset{\circ}{A}$.

Au final, $f(x) \in \overline{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathrm{Fr}(A)$.

Méthode 2 : $Y = \{t \in [0;1] \mid f(t) \notin A\}$ est une partie non vide ($1 \in X$) et majorée (par 0) de $\mathbb{R}$ donc, à ce titre, admet une borne inférieure qu'on note y. Montrons que $f(y) \in \mathrm{Fr}(A)$.

• Supposons que $f(y) \in \overset{\circ}{A}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(y),\varepsilon) \subset A$ et, par continuité de f en y, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [y;y+\alpha[\cap[0;1],\ ||f(t)-f(y)|| < \varepsilon$ ce qui montre que $f(t) \in B(f(y),\varepsilon) \subset A$ donc $f(t) \in A$. On aurait donc $\forall t \in [y;y+\alpha[\cap[0;1],\ t \notin Y$. Cette condition est incompatible avec la condition $\mathrm{Inf}(Y) = y$. On vient donc de démontrer par l'absurde que $f(y) \notin \overset{\circ}{A}$. Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$ et que $f(0) \in \overset{\circ}{A}$, on a forcément $y > 0$.

• Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $t_n = \Big(1 - \dfrac{1}{2^n}\Big)y$, alors $0 \leqslant t_n < y$ donc $t_n \notin Y$ ce qui montre que $f(t_n) \in A$. Puisque $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers y, par caractérisation séquentielle de la continuité, $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(y)$, et comme elle est constituée de vecteurs de A, par caractérisation séquentielle des vecteurs adhérents, $f(y) \in \overline{A}$.

Au final, $f(x) \in \overline{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathrm{Fr}(A)$.

4.51 **a.** • Si $||x_1 - x_2|| > 2r$, les boules B_1 et B_2 sont disjointes. En effet, si on avait $x \in B_1 \cap B_2$, on aurait $||x_1 - x_2|| = ||x_1 - x + x - x_2|| \leqslant ||x_1 - x|| + ||x - x_2|| \leqslant r + r = 2r$. Dans ce cas, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, rien à dire.

• Si $x_1 = x_2$, il est clair que la plus petite boule contenant $B_1 \cap B_2 = B_1$ est B_1 elle-même donc $r_{min} = r$.

• Si $0 < d = ||x_1 - x_2|| \leqslant 2r$, on pose $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et $r' = \dfrac{\sqrt{4r^2 - d^2}}{2}$ (faire un dessin) et montrons que la boule fermée $B_f(c,r')$ contient $B_1 \cap B_2$. Soit $v \in B_1 \cap B_2$, on pose $x = x_1 - v$ et $y = x_2 - v$, alors on a

$4||c-v||^2+||x_1-x_2||^2=||x+y||^2+||x-y||^2=2(||x||^2+||y||^2)=2||x_1-v||^2+2||x_2-v||^2$ d'après l'identité du parallélogramme. Or $||x_1-v||\leqslant r$ et $||x_2-v||\leqslant r$ car $v\in B_1$ et $v\in B_2$ donc $||c-v||^2\leqslant 4r^2-d^2$ donc $||c-v||\leqslant r'$. Par conséquent, $B_1\cap B_2\subset B_f(c,r')$.

Réciproquement, soit une boule fermée $B(w,r'')$ qui contient $B_1\cap B_2$. Soit n un vecteur unitaire normal à x_1-x_2, alors si $a=c+r'n$ et $b=c-r'n$, $||x_1-a||^2=||x_1-x-r'n||^2=||x_1-c||^2+r'^2=\dfrac{d^2}{4}+r'^2=r^2$ donc $||x_1-a||=r$ ce qui signifie que $a\in B_1$. De même, $a\in B_2$. Ainsi $a\in B_1\cap B_2$. Par symétrie, $b\in B_1\cap B_2$. Ainsi, $2r'=||a-b||=||a-w+w-b||\leqslant ||a-w||+||b-w||\leqslant 2r''$ d'où $r''\geqslant r'$. Ainsi, $r_{min}=r'=\dfrac{\sqrt{4r^2-d^2}}{2}$ est la borne inférieure de tous les rayons des boules fermées qui contiennent K.

b. Comme K est bornée par hypothèse, il existe $M\geqslant 0$ tel que $K\subset B_f(0_E,M)$ donc l'ensemble X de tous les rayons des boules fermées qui contiennent K contient le réel M et est minoré par 0 donc $r=\mathrm{Inf}(X)$ existe par propriété de la bornée inférieure. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers r et telle que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe une boule fermée B_n de rayon r_n qui contient K, on note x_n le centre d'une telle boule ; ceci justifie les notations de l'énoncé.

Supposons que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0, alors il existe un réel $\varepsilon>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists p\geqslant n,\ z_p>2\varepsilon$. Il existe donc deux suites extraites $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (avec $m_k>n_k$) telles que $z_k=||x_{m_k}-x_{n_k}||>2\varepsilon$. Par construction, $K\subset B(x_{n_k},r_{n_k})$ et $K\subset B(x_{m_k},r_{m_k})$ donc, en posant $s_k=\mathrm{Max}(r_{n_k},r_{m_k})>0$, on a $K\subset B(x_{n_k},r_{n_k})\cap B(x_{m_k},r_{m_k})\subset B(x_{n_k},s_k)\cap B(x_{m_k},s_k)$. Ainsi, d'après la question **a.**, $K\subset B(c_k,t_k)$ en notant $c_k=\dfrac{x_{m_k}+x_{n_k}}{2}$ et $t_k=\sqrt{s_k^2-\dfrac{||x_{n_k}-x_{m_k}||^2}{4}}<\sqrt{s_k^2-\varepsilon^2}$. Mais comme $\lim\limits_{k\to+\infty}s_k=r$ par hypothèse, on a $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt{s_k^2-\varepsilon^2}=\sqrt{r^2-\varepsilon^2}<r$. Ainsi, il existe un rang k_0 tel que $\forall k\geqslant k_0,\ t_k<r$ ce qui contredit la définition de r comme une borne inférieure. Ainsi, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=0$.

4.52 **a.** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, alors, par opérations sur les suites convergentes, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=2u_{n+1}+u_n$ converge vers $\ell'=3\ell$.

Réciproquement, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ', posons $\ell=\dfrac{\ell'}{3}$. Supposons que $\ell'=0$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. D'abord $u_1=\dfrac{v_1}{2}-\dfrac{u_0}{2}$, puis $u_2=\dfrac{v_2}{2}-\dfrac{v_1}{4}+\dfrac{u_0}{4}$, et encore $u_3=\dfrac{v_3}{2}-\dfrac{v_2}{4}+\dfrac{v_1}{8}-\dfrac{u_0}{8}$. Soit $n\geqslant 1$ tel que $u_n=\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k}v_k}{2^{n-k+1}}\Big)+\dfrac{(-1)^{n-1}u_0}{2^n}$, alors $u_{n+1}=\dfrac{v_{n+1}}{2}-\dfrac{u_n}{2}=\dfrac{v_{n+1}}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k+1}v_k}{2^{n-k+2}}+\dfrac{(-1)^n u_0}{2^{n+1}}$ donc $u_{n+1}=\dfrac{v_{n+1}}{2}+\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{n+1-k}v_k}{2^{n+1-k+1}}\Big)+\dfrac{(-1)^n u_0}{2^{n+1}}=\Big(\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(-1)^{n+1-k}v_k}{2^{n+1-k+1}}\Big)+\dfrac{(-1)^{n+1-1}u_0}{2^{n+1}}$. Par principe de récurrence, on a bien $\forall n\geqslant 1,\ u_n=\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k}v_k}{2^{n-k+1}}\Big)+\dfrac{(-1)^{n-1}u_0}{2^n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}u_0}{2^n}=0$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k}v_k}{2^{n-k+1}}=0$. Soit $\varepsilon>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall k\geqslant n_0,\ |v_k|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$, alors $\forall n\geqslant n_0,\ |u_n|=\Big|\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}\dfrac{(-1)^{n-k}v_k}{2^{n-k+1}}+\sum\limits_{k=n_0}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k}v_k}{2^{n-k+1}}\Big|$ donc, par inégalité triangulaire et définition de n_0, $|u_n|\leqslant\dfrac{1}{2^{n-n_0+2}}\Big|\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}\dfrac{(-1)^{n-k}v_k}{2^{n_0-k-1}}\Big|+\sum\limits_{k=n_0}^{n}\dfrac{\varepsilon}{2^{n-k+2}}\leqslant\dfrac{1}{2^{n-n_0+2}}\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}|v_k|+\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n-n_0+2}}\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}|v_k|=0$, il existe un rang $n_1\geqslant n_0$ tel que $\forall n\geqslant n_1,\ \dfrac{1}{2^{n-n_0+2}}\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}|v_k|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, $\forall n \geqslant n_1,\ |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On vient de prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

En général, si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - \ell' = 2(u_{n+1} - \ell) + (u_n - \ell)$, ce qui précède montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - \ell') = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers $\ell = \frac{\ell'}{3}$).

Ainsi, par double implication, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b. NON, il suffit de prendre $x_n = \sqrt{n}$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et pourtant, comme $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

c. NON PLUS, il suffit de prendre $x_n = \sin\left(\dfrac{\pi\sqrt{n}}{2}\right)$. Alors, comme la fonction $\sin$ est 1-lipschitzienne, $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{\pi}{2}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ avec **b.**. Mais $x_{4n^2} = 0$ et $x_{(4n+1)^2} = 1$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car il en existe deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes.

Une valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une valeur ℓ qui est la limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

4.53 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(n+x)^2} + \dfrac{1}{(n-x)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge et la fonction g est donc bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$.

Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a;a]$, alors $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{2}{(n-a)^2}$. Ainsi, $||f_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{2}{(n-a)^2}$. Mais comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2}{(n-a)^2}$ converge par RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1;1[$. Comme toutes les f_n sont continues sur $]-1;1[$, g est continue sur $]-1;1[$ par théorème.

De plus, on a classiquement $g(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 2\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{3}$.

b. La fonction φ de l'énoncé est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ car g l'est et que $\sin$ ne s'annule qu'en les multiples de π. Comme il est donné qu'elle s'annule en tous les entiers, elle est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $g(x+1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1+x)^2} + \dfrac{1}{(n-1-x)^2}\right) = \sum\limits_{p=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(p+x)^2} + \sum\limits_{q=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(q-x)^2}$ donc il vient $g(x+1) = \left(\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(p+x)^2}\right) - \dfrac{1}{(1+x)^2} + \left(\sum\limits_{q=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(q-x)^2}\right) + \dfrac{1}{x^2} = g(x) + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ de sorte que $\varphi(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi(x+1))} + g(x+1) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\pi^2}{\sin(\pi x)^2} + g(x) = \varphi(x)$ car $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$.

Par conséquent φ est 1-périodique car elle vérifie aussi $\forall n \in \mathbb{Z},\ \varphi(n+1) = \varphi(n) = 0$.

Comme g est continue sur $]0;1[$, que $x \mapsto \sin(\pi x)$ l'est aussi et ne s'y annule pas, φ est continue sur $]0;1[$ par opérations. Pour vérifier la continuité de φ sur $\mathbb{R}$, comme elle est 1-périodique, il suffit de vérifier que φ est continue en 0. Comme g est continue en 0 avec $g(0) = \dfrac{\pi^2}{3}$, on vérifie $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}\right) = -\dfrac{\pi^2}{3}$.

On a le développement limité $\sin(\pi x) \underset{0}{=} \pi x - \dfrac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)$ donc $\sin^2(\pi x) \underset{0}{=} \pi^2 x^2 - \dfrac{\pi^4 x^4}{3} + o(x^4)$ ce qui donne en inversant $\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)} \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2}\left(1 + \dfrac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\pi^2}{3} + o(1)$. Ainsi, $\varphi(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\pi^2}{3} + \dfrac{\pi^2}{3} + o(1) \underset{0}{=} o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0) = 0$.

Au final, la fonction φ est bien un élément de E.

c. Soit $f \in E$, la fonction $h : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et, comme f est 1-périodique, $h(x+1) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x+2}{2}\right) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = h(x)$ donc h est elle aussi 1-périodique. De plus, h est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations donc $h \in E$. Ainsi, comme la linéarité de L est claire, L est un endomorphisme de E. De plus, pour $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $|L(f)(x)| = \left|f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leqslant 2||f||_\infty$ ainsi L est 2-lipschitzienne donc continue. L'inégalité précédente montre que $|||L||| = \underset{f \in E, f \neq 0}{\operatorname{Sup}} \frac{||L(f)||_\infty}{||f||_\infty} \leqslant 2$. De plus, si on prend $f = 1$ (fonction constante), on a $L(f) = 2 = 2f$ et $f \neq 0$ donc $|||L||| = 2$.

d. Posons $\psi = L(\varphi)$. Pour $x \in]0;1[$, puisque $\sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, on obtient $\psi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{4}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)} + g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi x/2)} + g\left(\frac{x+1}{2}\right)$ qui devient $\psi(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)\cos^2(\pi x/2)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n+x)^2} + \frac{4}{(2n-x)^2} + \frac{4}{(2n+1+x)^2} + \frac{4}{(2n-1-x)^2}$.
Or $\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4}{(2.1-1-x)^2}$ et $\sin^2(\pi x/2)\cos^2(\pi x/2) = \frac{\sin^2(x)}{4}$ donc, en regroupant les termes pairs et impairs dans la même série : $\psi(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2}\right) = 4\varphi(x)$.

De plus, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \pi^2 + g(1/2) = 4 - \pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + 4 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = -\pi^2 + 8\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 0$ (classiquement en séparant les termes pairs et impairs et en se ramenant à $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$).

Comme ψ est 1-périodique d'après **c.** et que $\forall n \in \mathbb{Z}, \psi(n) = \psi(0) = \varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ d'après ce qui précède, on en déduit que $\psi = 4\varphi$. D'après la question **c.**, on a donc $||\psi||_\infty = 4||\varphi||_\infty = ||L(\varphi)||_\infty \leqslant 2||\varphi||_\infty$ ce qui montre que $||\varphi||_\infty = 0$ donc que φ est la fonction nulle. On en déduit donc que pour tout réel x non entier : $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + g(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2}\right) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = 0$ donc que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ en regroupant les deux séries en une seule à indices entiers relatifs.

4.54 **a.** Soit $i \in [\![1;p]\!]$ et v_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Comme la fonction $g_i : M \mapsto Mv_i$ est continue car linéaire en dimension finie et que la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ converge, alors la suite $(A^k v_i)_{k\geqslant 0}$ converge vers le vecteur Lv_i. Or, par une récurrence facile, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k v_i = \lambda_i^k v_i$. De plus, la convergence de la suite $(\lambda_i^k v_i)_{k\geqslant 0}$ équivaut à la convergence de la suite numérique $(\lambda_i^k)_{k\geqslant 0}$ (par exemple car les coordonnées de $\lambda_i^k v_i$ dans une base $\mathcal{B}$ dont le premier vecteur est $v_i \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ sont $(\lambda_i^k, 0, \cdots, 0)$).

Si $|\lambda_i| < 1$, la suite $(\lambda_i^k)_{k\geqslant 0}$ converge vers 0. Si $\lambda_i = 1$, $\lim_{k\to+\infty} \lambda_i^k = 1$. Si $|\lambda_i| > 1$, comme $\lim_{k\to+\infty} |\lambda_i|^k = +\infty$, la suite $(\lambda_i^k)_{k\geqslant 0}$ diverge. Si $|\lambda_i| = 1$ mais $\lambda_i \neq 1$, alors $\lambda_i = e^{i\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, comme $\lambda_i^{k+1} = e^{i\theta}\lambda_i^k$ (1), si la suite $(\lambda_i^k)_{k\geqslant 0}$ convergeait vers un complexe ℓ, on aurait $\ell = e^{i\theta}\ell$ donc $\ell = 0$ en passant à la limite dans (1) et c'est impossible car $|\lambda_i^k| = 1$. En résumé, la suite $(\lambda_i^k)_{k\geqslant 0}$ converge si et seulement si $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$. On peut conclure que la convergence de $(A^k)_{k\geqslant 0}$ implique $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$.

Toujours dans le cas où A est diagonalisable, la réciproque est vraie et laissée aux étudiants curieux.

Pour aller plus loin, soit une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs propres de A telle que $(v_1, \cdots, v_r)$ soit une base de $E_1(A)$, alors ce qui précède prouve que $Lv_i = v_i$ si $i \in [\![1;r]\!]$ et $Lv_i = 0_{\mathbb{C}^n}$ si $i \in [\![r+1;n]\!]$. Ainsi, l'application L est la projection sur le sous-espace propre $E_1(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{\lambda\in Sp(A)\setminus\{1\}} E_\lambda(A)$.

b. D'après le cours, $P = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)$ est annulateur de A car A est diagonalisable et $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.

c. Soit $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ annulateur de A et λ une valeur propre de A, alors il existe un vecteur propre v associé à λ : $Av = \lambda v$. Comme $A^k v = \lambda^k v$ comme ci-dessus, on a $Q(A)v = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k v = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k v = Q(\lambda)v$ donc $Q(\lambda)v = 0_{\mathbb{C}^n}$ alors que $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ d'où $Q(\lambda) = 0$ et λ est bien une racine de Q.

Soit $(a_0, \cdots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i A^i = 0$, cela signifie que le polynôme $Q = \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$ est annulateur de A. Or, on vient de voir qu'alors toutes les valeurs propres de A sont des racines de Q. Ainsi $Q \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ admet donc au moins p racines distinctes ce qui prouve que $Q = 0$ d'où $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$ donc la famille $(I_n, \cdots, A^{p-1})$ est une famille libre. Ceci justifie que P est bien le polynôme minimal de A.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^k par P ce qui donne $X^k = PQ_k + P_k$ avec la condition $\deg(P_k) < \deg(P) = p$ sur le reste P_k : $P_k \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$. Ainsi, $A^k = P(A)Q_k(A) + P_k(A) = P_k(A)$ car $P(A) = 0$.

e. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie donc tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont fermés (vu en cours). Ainsi, $\mathbb{C}[A] = \text{Vect}(I_p, \cdots, A^{p-1})$ (d'après **d.**) est fermé. Comme la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de matrices de $\mathbb{C}[A]$, sa limite L est dans $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{p-1}[X]$. Ainsi, il existe $U \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que $L = U(A)$.

4.55 **a.** $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}^{n+1}$ définie par $\Phi(P) = (P(a_0), \cdots, P(a_n))$ est bien définie et clairement linéaire. Soit $P \in \text{Ker}(\Phi)$, alors $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P(a_0) = \cdots = P(a_n) = 0$ donc P admet $n+1$ racines distinctes d'où $P = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ donc Φ est injective. Comme $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = \dim(\mathbb{C}^{n+1})$, Φ est un isomorphisme.

b. Pour tout entier $i \in [\![0;n]\!]$, si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $(P(a_i) = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\},\ P(a_j) = 0) \iff \Phi(P) = e_{i+1}$ ($(i+1)$-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$). Ainsi, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $L_i(a_i) = 1$ et $\forall j \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\},\ L_i(a_j) = 0$ et c'est $L_i = \Phi^{-1}(e_{i+1})$. En fait, $L_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(\dfrac{X-a_j}{a_i-a_j}\right)$ (Lagrange).

c. Comme $\chi_A \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\Phi(\chi_A) = (\chi_A(a_0), \cdots, \chi_A(a_n)) = \sum_{i=0}^{n} \chi_A(a_i)e_{i+1} = \Phi(\sum_{i=0}^{n} \chi_A(a_i)L_i)$ par linéarité de Φ et grâce à la question précédente, d'où $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} \chi_A(a_i)L_i$ par bijectivité de Φ.

d. Soit $k \in [\![0;n]\!]$ et $f_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $f_k(M) = \chi_M(a_k) = \det(a_k I_n - M)$. Soit aussi $g_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $g_k(M) = a_k I_n - M$. Alors g_k est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car 1-lipschitzienne. En effet, $||g_k(M) - g_k(M')||_\infty = ||a_k I_n - M - a_k I_n + M'||_\infty = ||M - M'||_\infty$. De plus, $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est continue car polynomiale donc, par composée $f_k = \det \circ g_k$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Avec **c.**, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(M) = \chi_M = \sum_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)L_k = \sum_{k=0}^{n} f_k(M)L_k$ d'où $f = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k$ est continue par opérations.

4.56 **a.** Comme a et b ont été choisis strictement positifs, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et strictement positive car la fonction racine est bien définie et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par construction, elle est aussi strictement croissante car la fonction $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (par exemple $a + \sqrt{b} > a$ donc $u_2 > u_1$ et $a + \sqrt{b + \sqrt{a}} > a + \sqrt{b}$ donc $u_3 > u_2$).

<u>Si $a = b$</u>, notons $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite associée, alors $v_1 = \sqrt{a}$ et $\forall n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \sqrt{a + v_n} = f_a(v_n)$. La fonction $f_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dérivable, strictement croissante et son unique point fixe est $\ell_a \geqslant 0$ tel que

$\ell_a = \sqrt{a+\ell_a} \Longrightarrow \ell_a^2 - \ell_a - a = 0$. On trouve classiquement $\ell_a = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ (car $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$).

Comme $v_1 = \sqrt{a} < \sqrt{\dfrac{1+4a}{4}} < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} = \ell_a$, on a $0 < v_1 < \ell_a$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < v_n < \ell_a$, on applique f_a strictement croissante à cette inégalité et on a $0 < f_a(0) < f_a(v_n) = v_{n+1} < f_a(\ell_a) = \ell_a$. Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \geqslant 1,\ 0 < v_n < \ell_a$. La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante et majorée par ℓ_a donc elle converge vers un réel $\ell'_a \leqslant \ell_a$. Mais en passant à la limite dans $v_{n+1} = f_a(v_n)$, comme f_a est continue, on a $\ell'_a = f_a(\ell'_a)$ ce qui montre que $\ell'_a = \ell_a$ d'après ce qui précède. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_a$.

<u>Si $b < a$</u> (le cas $b > a$ est similaire), on pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+\dots}}}}$ et $v_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}}$. Il est clair que $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant v_n$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \ell_a$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge (vers ℓ) par le théorème de la limite monotone.

b. Par construction, $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+2} = \sqrt{a+\sqrt{b+u_n}}$. On passe à la limite dans cette relation (elles existent). Comme $\sqrt{\ }$ est une fonction continue, on a donc $\ell = \sqrt{a+\sqrt{b+\ell}}$ ce qui donne en élevant au carré la relation $\ell^2 = a + \sqrt{b+\ell}$ puis $\ell^2 - a = \sqrt{b+\ell}$ donc $(\ell^2-a)^2 = b+\ell$. En développant, on trouve $\ell^4 - 2a\ell^2 - \ell + a^2 - b = 0$. Ainsi, le polynôme $P = X^4 - 2aX^2 - X + a^2 - b$ admet ℓ comme racine.

4.57 **a.** Soit $h : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Alors $h > 0$ sur $[0;1]$ par hypothèse. Comme f et g sont continues, h l'est aussi sur le segment $[0;1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $a \in [0;1]$ tel que $h(a) = \underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Min}}\ h(x) = \alpha > 0$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $\forall x \in [0;1],\ f^0(x) - g^0(x) = \mathrm{id}_{[0;1]}(x) - \mathrm{id}_{[0;1]}(x) = x - x \geqslant 0.\alpha$. Pour $n = 1$, par construction de α, $\forall z \in [0;1],\ f(z) - g(z) = h(z) \geqslant \alpha = 1.\alpha$ (1).

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall y \in [0;1],\ f^n(y) - g^n(y) \geqslant n\alpha$ (2).

Soit $x \in [0;1]$, $f^{n+1}(x) - g^{n+1}(x) = f^{n+1}(x) - f^n(g(x)) + f^n(g(x)) - g^{n+1}(x)$ qu'on réécrit sous la forme $f^{n+1}(x) - g^{n+1}(x) = (f(f^n(x)) - g(f^n(x))) + (f^n(g(x)) - g^n(g(x)))$ car comme f et g commutent, $f^n \circ g = g \circ f^n$.

En prenant $z = g^n(x) \in [0;1]$ dans (1) et $y = g(x)$ dans (2), $f^{n+1}(x) - g^{n+1}(x) \geqslant \alpha + n\alpha = (n+1)\alpha$.

Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \geqslant n\alpha$.

Puisque $[0;1]$ est stable par f et g, par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant f^n(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant g^n(x) \leqslant 1$.

Dès que $n\alpha > 1$, comme $\forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \leqslant 1 - 0 = 1$, $f^n(x) - g^n(x) \geqslant n\alpha$ est impossible.

b. Raisonnons par l'absurde. Si on avait $\forall c \in [0;1],\ f(c) \neq g(c)$, alors la fonction $h = f - g$ ne s'annulerait pas sur $[0;1]$. Or cette fonction est continue donc elle garderait un signe constant sur $[0;1]$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Traitons deux cas :

- Soit $h = f - g > 0$ sur $[0;1]$, alors on a vu la contradiction à la question précédente.
- Soit $h = f - g < 0$, en posant $\alpha = \underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Max}}(h(x)) < 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \leqslant n\alpha$ ce qui devient absurde dès que $n\alpha < -1$ car $\forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \geqslant 0 - 1 = -1$ comme avant.

Dans tous les cas, on a une impossibilité donc h s'annule au moins une fois sur $[0;1]$: $\exists c \in [0;1],\ f(c) = g(c)$.

4.58 **a.** f ainsi définie est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $c > 0$ et $\alpha \neq 0$ et dans ce cas, on a $f^{-1}(x) = \dfrac{x^{1/\alpha}}{c^{1/\alpha}}$. De plus, f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \alpha c x^{\alpha-1}$. On a $\forall x > 0,\ f'(x) = f^{-1}(x)$ si et seulement si $\alpha c = c^{-1/\alpha}$ et $\alpha - 1 = \dfrac{1}{\alpha} \Longleftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La condition $\alpha c = c^{-1/\alpha}$ avec $c > 0$ impose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1,61$ et on a donc $c^{1+(1/\alpha)} = c^{\alpha} = \alpha^{-1}$ donc $c = \alpha^{-1/\alpha}$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \alpha^{1-\alpha} x^{\alpha}$ est bien un élément de E avec $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

b. Soit $f \in E$, alors f étant bijective et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, elle est strictement monotone donc strictement croissante car $f' = f^{-1} > 0$. f admet d'après le théorème de la limite monotone une limite finie en 0^+ car f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et minorée par 0. Comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ cette limite ne peut être que 0 par le théorème de la bijection. Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que f soit de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$, comme f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f^{-1} est aussi de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f' = f^{-1}$, f est donc de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}_+^*$. Par principe de récurrence, f (et donc f^{-1} aussi puisque f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$) est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, g l'est aussi. Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = f'(x) - 1 = f^{-1}(x) - 1$ et $g''(x) = f''(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} > 0$. Ainsi, la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a vu en question **b.** que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$, et puisque f^{-1} est aussi une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{-1}(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$. Par continuité de g' et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g'(\alpha) = 0$. La fonction g est donc décroissante sur $]0; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ car $f' = f^{-1}$ est bijective strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $a > 0$ tel que $\forall x \geqslant a,\ f'(x) \geqslant 2$. Ainsi, $\forall x \geqslant a,\ f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt \geqslant f(a) + 2(x-a)$ donc $g(x) = f(x) - x \geqslant f(a) + x - 2a$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(a) + x - 2a = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Or $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ donc, avec le tableau de variations de g, $g(\alpha) < 0$ et on a l'existence et l'unicité d'un réel $c \in [\alpha; +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(c) = 0 = f(c) - c$ donc l'existence d'un unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.59 **a.** Pour $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, $\left|f(t) - f(t')\right| = \Big| ||a + tb|| - ||a + t'b|| \Big| \leqslant ||a + tb - (a + t'b)||$ par la seconde inégalité triangulaire, d'où $\left|f(t) - f(t')\right| \leqslant ||(t - t')b|| = ||b||\,|t - t'|$. Ainsi, f est $||b||$-lipschitzienne donc continue.

b. Comme $tb = (a + tb) - a$, par inégalité triangulaire, on obtient $||tb|| = |t|\,||b|| \leqslant ||a + tb|| + ||a||$ donc $f(t) = ||a + tb|| \geqslant ||b||\,|t| - ||a||$. Comme $\lim\limits_{t \to \pm\infty} (||b||\,|t| - ||a||) = +\infty$, par minoration, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} f(t) = +\infty$.

c. <u>Intervalle</u> : si $I \neq \emptyset$, soit $(t_1, t_2) \in I^2$ tel que $t_1 < t_2$. On va montrer que $[t_1; t_2] \subset I$, c'est-à-dire que I est un convexe. Soit $t \in [t_1; t_2]$, en faisant un dessin, comme la trajectoire de $t \mapsto a + tb$ est la droite affine passant par le "point" a de vecteur directeur b, on voit que le vecteur $a + tb$ est dans le segment $[a + t_1 b; a + t_2 b]$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que $a + tb = \alpha(a + t_1 b) + (1 - \alpha)(a + t_2 b)$. Un simple calcul, comme $b \neq 0_E$, montre que $\alpha = \dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$. Par inégalité triangulaire, on a donc $||a + tb|| \leqslant \alpha||a + t_1 b|| + (1 - \alpha)||a + t_2 b||$ or, puisque t_1 et t_2 sont dans I, $||a + t_1 b|| < 1$ et $||a + t_2 b|| < 1$, d'où, puisque $\alpha > 0$ ou $1 - \alpha > 0$, on en déduit que $||a + tb|| < 1$. Ainsi, $t \in I$. I est donc un convexe, I est alors un intervalle.

<u>Borné</u> si $I \neq \emptyset$, par définition des limites de **b.**, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe t_0 tel que $\forall t \geqslant t_0,\ f(t) \geqslant 1$

donc $[t_0;+\infty[\cap I = \emptyset$. On peut donc conclure que I est majoré par t_0. Le même raisonnement avec $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = +\infty$ montre que I est aussi minoré par un réel t'_0. Alors, I est un intervalle borné.

On pouvait aussi reprendre l'inégalité $||a+tb|| \geqslant ||b||\,|t| - ||a||$ qui montre que si $t \in I$, on a $||a+tb|| < 1$ donc $||b||\,|t| - ||a|| < 1$ d'où $|t| < \dfrac{1+||a||}{||b||}$ donc I est borné.

<u>Ouvert</u> : supposons $I \neq \emptyset$, on va montrer que I est ouvert de trois manières différentes.

• Le plus simple, par définition de $I = \{t \in \mathbb{R} \mid ||a+tb|| = f(t) < 1\}$, on a $I = f^{-1}(\,]-1;1[\,) = f^{-1}(\,]-\infty;1[\,)$ donc I est l'image directe d'un ouvert par une fonction continue donc c'est un ouvert.

• Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (I^c)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente (vers t) d'éléments de I^c. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ ||a+t_nb|| = f(t_n) \geqslant 1$ par définition de I. Par caractérisation séquentielle de la continuité, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) = f(t)$. Or $\forall n \in \mathbb{N},\ f(y_n) \geqslant 1$ donc, à la limite, $f(t) \geqslant 1$ ce qui prouve que $t \in I^c$. Ainsi, I^c est fermé par caractérisation séquentielle des fermés donc I est ouvert.

• Soit $t \in I$, par définition $v = a + tb \in B(0_E, 1)$ qui est une boule ouverte donc il existe $r > 0$ tel que $B(v, r) \subset B(0_E, 1)$; on peut prendre par exemple $r = 1 - ||v|| > 0$. Or f est continue en t donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t' \in \mathbb{R},\ |t - t'| < \eta \Longrightarrow |f(t) - f(t')| < r \Longrightarrow f(t') < f(t) + r = 1$ car $f(t) = ||v||$. Ainsi, si $t' \in]t-\eta; t+\eta[$, on a $f(t') = ||a + t'b|| < 1$ donc $t' \in I$ et I est bien ouvert.

Par conséquent, $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a + tb \in B(0_E, 1)\}$ est un intervalle borné et ouvert ou I est vide.

4.60 **a.** Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité).
- $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$ (séparation).
- $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

b. Les trois applications N_0, N_1, N_2 sont bien définies car, puisque les fonctions f de E sont de classe C^2 sur $[0;1]$, les fonctions f, f', f'' sont continues sur le segment $[0;1]$ donc les intégrales sont bien définies.

Les trois applications N_0, N_1, N_2 vérifient l'homogénéité par linéarité de la dérivation, de l'intégrale et par homogénéité de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$: il suffit de l'écrire !

Les trois applications N_0, N_1, N_2 vérifient l'inégalité triangulaire par linéarité de la dérivation, de l'intégrale et parce que la valeur absolue vérifie elle-même l'inégalité triangulaire : il suffit de l'écrire !

N_0 vérifie la séparation parce que si $f \in E$ et $N_0(f) = 0$, la fonction continue et positive $|f|$ a une intégrale nulle sur $[0;1]$ donc elle y est nulle ce qui donne $f = 0$.

N_1 vérifie la séparation parce que si $f \in E$ et $N_1(f) = 0$, on a forcément $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 |f'(t)|dt = 0$ donc, comme $|f'|$ est positive et continue, on a $f' = 0$ sur l'intervalle $[0;1]$ donc f y est constante, cette constante étant nulle avec la condition $\int_0^1 f(t)dt = 0$. On a donc bien $f = 0$.

N_2 ne vérifie pas la séparation car la fonction $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$ est dans E et, après des calculs élémentaires, $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 f''(t)dt = 0$ donc $N_2(f) = 0$ alors que la fonction f n'est pas nulle.

Au final, N_0 et N_1 sont des normes mais N_2 n'en est pas une.

c. Soit $f \in E$ et $F : [0;1] \to \mathbb{R}$ la primitive de f qui s'annule en 0 définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Comme F est de classe C^3 sur $[0;1]$ car f y est C^2, le théorème des accroissements finis justifie l'existence de $c \in]0;1[\subset [0;1]$ tel que $F'(c) = \dfrac{F(1)-F(0)}{1-0} = F(1)$. Or $F'(c) = f(c)$ et $F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ donc $f(c) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

d. Soit $f \in E$ et $x \in [0;1]$, $f(t) = f(c) + \displaystyle\int_c^t f'(x)dx$ (avec le c de la question précédente) donc, par inégalité triangulaire et de la moyenne, $|f(t)| \leqslant |f(c)| + \left|\displaystyle\int_c^t |f'(x)|dx\right| \leqslant |f(c)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(x)|dx$ car $\widetilde{[c;t]} \subset [0;1]$ et $|f'| \geqslant 0$. Ainsi, $N_1(f) = |f(c)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(x)|dx$ est un majorant de f sur $[0;1]$ et $N_0(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt \leqslant \displaystyle\int_0^1 N_1(f)dt = N_1(f)$ qui prouve que N_1 domine N_0.

Soit $f \in E$ non nulle telle que $N_0(f) = N_1(f)$. Avec les notations précédentes, $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt = \displaystyle\int_0^1 N_1(f)dt$ donc $\displaystyle\int_0^1 (N_1(f) - |f(t)|)dt = 0$ mais on a vu que $t \mapsto N_1(f) - |f(t)|$ est positive et continue ce qui montre que $\forall t \in [0;1],\ |f(t)| = N_1(f) \neq 0$ car $f \neq 0$ et, puisque f est continue donc ne change pas de signe, $f = N_1(f)$ ou $f = -N_1(f)$. Réciproquement, si $f = a$ est constante avec $a \neq 0$, alors $N_0(f) = N_1(f) = |a|$. Les fonctions non nulles telles que $N_0(f) = N_1(f)$ sont les fonctions constantes non nulles.

e. Supposons l'existence d'une telle constante $k > 0$ telle que $\forall f \in E,\ N_1(f) \leqslant kN_0(f)$. Soit, pour tout entier n, la fonction $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = t^n$. Alors $f_n \in E$ et $N_0(f_n) = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n+1} + \displaystyle\int_0^1 nt^{n-1}dt = \dfrac{1}{n+1} + 1$ ce qui donne $\dfrac{1}{n+1} + 1 \leqslant \dfrac{k}{n+1}$ ou $k \geqslant n+2$. Ceci étant supposé être vrai pour tout entier n, on a notre contradiction. On conclut donc qu'il n'existe pas $k > 0$ telle que $\forall f \in E,\ N_1(f) \leqslant kN_0(f)$. Par conséquent, N_0 ne domine pas N_1 : N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes.

4.61 **a.** S n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car la matrice nulle ne vérifie pas $0^2 = I_3$ par exemple.

b. S n'est pas stable par produit car, par exemple, si on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a bien $A^2 = B^2 = I_3$ mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I_3$.

c. Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de matrices de S qui converge vers $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'application produit définie par $P : (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2 \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P(A,B) = AB$ est bilinéaire en dimension finie donc elle est continue. L'application $D : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ définie par $D(A) = (A,A)$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue. Ainsi, par composée, l'application carré $C = P \circ D : A \mapsto A^2$ est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim\limits_{n\to+\infty} C(A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n^2 = A^2$. Mais la suite $(A_n^2)_{n\geqslant 0}$ est constante égale à I_3. Par unicité de la limite, $A^2 = I_3$. L'ensemble S est donc fermé.

d. S n'est pas borné car les matrices $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ sont dans S quel que soit $a > 0$ alors que $\forall a > 1,\ ||M_a||_\infty = a$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty} ||M_a||_\infty = +\infty$.

4.62 **a.** Le maximum d'un nombre fini de réels positifs étant clairement défini et positif, la fonction N est bien définie sur $\mathbb{R}^n$ quelle que soit la famille $\mathcal{F}$ et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

<u>Séparation</u> : soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $N(x) = 0$, alors $\underset{1\leqslant i\leqslant m}{\text{Max}}(|(v_i|x)|) = 0$ donc $\forall i \in [\![1;m]\!],\ (v_i|x) = 0$.

Ainsi, $x \in \big(\mathsf{Vect}(v_1, \cdots, v_m)\big)^{\perp}$. Mais $\mathcal{F}$ est une famille génératrice par hypothèse ce qui se traduit par $\mathsf{Vect}(v_1, \cdots, v_m) = \mathbb{R}^n$. On a vu dans le cours qu'alors $(\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\}$, ce qui montre que $x = 0$.

Homogénéité et inégalité triangulaire : par définition $N = ||v_x||_\infty$ où on a posé $v_x = \big((v_i|x)\big)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbb{R}^m$ et où $||\,.\,||_\infty$ est la norme infinie classique (mais dans $\mathbb{R}^m$). Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, par bilinéarité du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$, on a les relations $v_{\lambda x} = \lambda v_x$ et $v_{x+y} = v_x + v_y$. Comme on sait que justement $||\,.\,||_\infty$ est une norme, on en déduit que $N(\lambda x) = ||v_{\lambda x}||_\infty = ||\lambda v_x||_\infty = |\lambda|\,||v_x||_\infty = |\lambda|\,N(x)$ et $N(x+y) = ||v_{x+y}||_\infty = ||v_x + v_y||_\infty \leqslant ||v_x||_\infty + ||v_y||_\infty = N(x) + N(y)$.

N vérifie l'axiome de séparation, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire, donc N est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b. Prenons $m = n$ et $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (bien génératrice), alors si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, puisque $\mathcal{F}$ est orthonormale, $x_i = (e_i|x)$ donc $N(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathsf{Max}}\, |x_i| = ||x||_\infty$ (norme infini classique dans $\mathbb{R}^n$).

c. Prenons $m = 2^n$ et $\mathcal{F} = (v_\varepsilon)_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n}$ où, si on note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, on pose $v_\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$. La famille $\mathcal{F}$ est bien génératrice de $\mathbb{R}^n$ car, par exemple en notant $A_1 = \{\varepsilon \in \{-1,1\}^n \mid \varepsilon_1 = 1\}$ la partie de $\{-1,1\}^n$ de cardinal 2^{n-1}, on a $\sum\limits_{\varepsilon \in A_1} v_\varepsilon = 2^{n-1} e_1$ car dès que $j \geqslant 2$, il existe autant de n-uplets ε dans A_1 tels que $\varepsilon_j = 1$ que de n-uplets tels que $\varepsilon_j = -1$ (2^{n-2} de chaque sorte). Ainsi, $e_1 = \dfrac{1}{2^{n-1}} \sum\limits_{\varepsilon \in A_1} v_\varepsilon$. Bien sûr, par symétrie, si $k \in [\![2; n]\!]$, $e_k = \dfrac{1}{2^{n-1}} \sum\limits_{\varepsilon \in A_k} v_\varepsilon$ avec $A_k = \{\varepsilon \in \{-1,1\}^n \mid \varepsilon_k = 1\}$. De plus, toujours si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, pour $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, $(v_\varepsilon|x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$ ce qui donne $N(x) = \underset{\varepsilon \in \{-1,1\}^n}{\mathsf{Max}} \left| \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right|$. Il est clair que $\left| \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right|$ est maximale si les $\varepsilon_i x_i$ sont tous de même signe, c'est-à-dire si $(\forall i \in [\![1; n]\!],\ \varepsilon_i x_i = |x_i|)$ ou si $(\forall i \in [\![1; n]\!],\ \varepsilon_i x_i = -|x_i|)$. On a donc $N(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = ||x||_1$ (norme 1 classique dans $\mathbb{R}^n$).

d. Supposons qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $||.||_2 = N$ (N associée à $\mathcal{F}$ comme dans l'énoncé). On peut déjà supposer que deux vecteurs différents de $\mathcal{F}$ ne sont pas colinéaires. En effet, si par exemple v_1 et v_2 sont colinéaires, et si on suppose que v_2 est celui des deux qui a une norme maximale ($||v_2||_2 \geqslant ||v_1||_2$), alors $N(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathsf{Max}} (|(v_i|x)|) = \underset{2 \leqslant i \leqslant m}{\mathsf{Max}} (|(v_i|x)|) = N'(x)$ avec la famille $\mathcal{F}' = (v_2, \cdots, v_m)$ qui est encore génératrice. Dorénavant, on prendra donc $\mathcal{F}$ avec des vecteurs non deux à deux colinéaires.

Soit $j \in [\![1; m]\!]$ tel que $||v_j||_2 = \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathsf{Max}} ||v_i||_2$. Comme, par Cauchy-Schwarz, pour $i \in [\![1; m]\!]$, on a $|(v_i|v_j)| \leqslant ||v_i||_2 ||v_j||_2 \leqslant ||v_j||_2^2$ par définition de j, on en déduit que $N(v_j) = \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathsf{Max}} (|(v_i|v_j)|) = ||v_j||_2^2$. Puisqu'on a supposé que $N = ||.||_2$, on a aussi $N(v_j) = ||v_j||_2^2 = ||v_j||_2$ donc $||v_j|| = 1$ (on ne peut pas avoir $||v_j||_2 = 0$ sinon tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ seraient nuls par définition de j et $\mathcal{F}$ ne pourrait pas être génératrice). On prend un vecteur v unitaire qui est orthogonal à v_j, on le peut car $n \geqslant 2$. Et on pose alors $x = v_j + \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, d'après Pythagore, $||x||_2^2 = ||v_j||_2^2 + \lambda^2 ||v||_2^2 > ||v_j||_2^2$ donc $||x||_2 > ||v||_2 = 1$. On va montrer que, pour λ assez petit, le vecteur x vérifie $N(x) = N(v_j)$ (les boules unités pour les normes N sont des polyèdres et, comme v_j est sur la sphère unité $B_N(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$, la "face" du polyèdre contenant v_j est une partie du plan passant par v_j et de vecteur normal v_j - on l'a constaté pour les normes 1 et ∞ en **b.** et **c.**).

D'abord, comme $v_j \perp v$, on a $|(v_j|v)| = |(v_j|v_j + \lambda v)| = |(v_j|v_j) + 0| = ||v_j||_2^2 = 1$. Évaluons, pour $i \in [\![1; m]\!]$

tel que $i \neq j$, la quantité $(v_i|x) = (v_i|v_j + \lambda v) = (v_i|v_j) + \lambda(v_i|v)$. Par inégalité triangulaire et puisque l'on a $||v_i||_2 \leqslant ||v_j||_2 = 1$, $|(v_i|x)| \leqslant |(v_i|v_j)| + |\lambda|\,|(v_i|v)| \leqslant |(v_i|v_j)| + |\lambda|\,||v_i||_2\,||v||_2 \leqslant |(v_i|v_j)| + |\lambda|$. Comme v_i n'est pas colinéaire à v_j, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $|(v_i|v_j)| < ||v_i||_2||v_j||_2 = ||v_i||_2 \leqslant 1$ donc $|(v_i|v_j)| < 1$. Il suffit donc de choisir λ tel que $0 < |\lambda| \leqslant 1 - |(v_i|v_j)|$ pour qu'on ait $|(v_i|x)| \leqslant 1$. Il faut maintenant rendre ce choix indépendant de i.

Posons donc $\lambda_0 = \underset{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq j}}{\mathrm{Min}} (1 - |(v_i|v_j)|) > 0$, alors si on choisit $\lambda \in [-\lambda_0; \lambda_0]$, on a donc $\forall i \in [\![1; m]\!]$, $|(v_i|x)| \leqslant 1$ et $|(v_j|x)| = 1$ donc $N(x) = 1$. Comme on a vu que $||x||_2 > 1$, on ne peut donc pas avoir $N = ||.||_2$.

Ainsi, la norme 2 classique $||.||_2$ de $\mathbb{R}^n$ n'est pas une norme N obtenue comme ceci.

4.63 **a.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geqslant 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a; b]$, $h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0; 1[$ tel que $h(c) = 0$, donc un unique point fixe c de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c \sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f, on obtient $f \circ f \circ f = f \circ \cos$ donc $\cos \circ f = f \circ \cos$ ce qui, en c, devient $f(c) = \cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question **a.**, on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c, devient $f'(c)^2 = -\sin(c) < 0$ car, comme $c \in]0; 1[\subset]0; \pi[$, on a $\sin(c) > 0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

4.64 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$ de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$. Par une petite étude de cette fonction dont le graphe est une parabole, on constate que l'intervalle $[-2; 2]$ est stable par f. En effet, f est paire et croissante sur $[0; 2]$ avec $f(0) = -2$ et $f(2) = 2$.

<u>Méthode 1 cas réel</u> : supposons $a \in \mathbb{R}$ et traitons deux cas :

- si $|a| \leqslant 2$, comme $[-2; 2]$ est stable par f, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 2$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- si $|a| > 2$, $u_1 = a^2 - 2 > 2$ et, par une récurrence simple, $\forall n \geqslant 1$, $u_n > 2$. Or, pour $x > 2$, on a $x^2 - 2 > x$ car $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) > 0$ donc $u_{n+1} = u_n^2 - 2 > u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ, alors en passant à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell^2 = \ell - 2$ donc $\ell = 2$ ou $\ell = -1$, ce qui est absurde car $u_1 > 2$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non convergente, elle tend vers $+\infty$ donc n'est pas bornée.

Ainsi, si $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|a| \leqslant 2$.

<u>Méthode 2 cas réel</u> : supposons $a \in \mathbb{R}$ et traitons trois cas :

- si $a \in [-2; 2]$, il existe un réel θ tel que $a = 2\cos(\theta)$ car $\cos$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1; 1]$. Ainsi, $a = u_0 = 2\cos(\theta)$, puis $u_1 = a^2 - 2 = 4\cos^2(\theta) - 2 = 2\cos(2\theta)$ et on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos(2^n\theta)$ ce qui montre aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

• Si $a > 2$, comme ch est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1;+\infty[$, il existe $t > 0$ tel que $a = u_0 = 2\text{ch}\,(t)$ puis $u_1 = a^2 - 2 = 4\text{ch}^2(t) - 2 = 2\text{ch}\,(2t)$. À nouveau, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\text{ch}\,(2^n t)$ et, comme $t > 0$, ceci justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Si $a < -2$, il existe $t > 0$ tel que $a = u_0 = -2\text{ch}\,(t)$ puis $u_1 = a^2 - 2 = 4\text{ch}^2(t) - 2 = 2\text{ch}\,(2t)$. Encore, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2\text{ch}\,(2^n t)$ et, comme $t > 0$, ceci justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

À nouveau, si $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|a| \leqslant 2$.

Cas complexe non réel : soit maintenant $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On prolonge la fonction cos à $\mathbb{C}$ en écrivant, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. On va vérifier que cette fonction est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, posons $u = e^{iz} \neq 0$. Alors $\cos(z) = z' \iff \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \dfrac{u + (1/u)}{2} = z' \iff u^2 - 2z'u + 1 = 0$. D'après D'ALEMBERT-GAUSS, il existe au moins un complexe u qui soit racine de $P = X^2 - 2z'X + 1$, et ce u est forcément non nul car 0 n'est pas racine de P. Soit donc $u \neq 0$ tel que $u^2 - 2z'u + 1 = 0$. Or l'application $\exp : v \mapsto e^v$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ puisque si $w = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, le complexe $v = \ln(r) + i\theta$ est un antécédent de w par exp puisque $e^{\ln(r)+i\theta} = e^{\ln(r)} \times e^{i\theta} = re^{i\theta} = w$. Ainsi, soit $v \in \mathbb{C}$ tel que $u = e^v$ et $z = -iv$ de sorte que $v = iz$ et qu'on ait $u = e^{iz}$ puis $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \dfrac{u + (1/u)}{2} = z' = \cos(z)$.

On a bien établi la surjectivité de cos de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Et on vérifie qu'on a toujours, même pour $z \in \mathbb{C}$, la formule $2\cos^2(z) - 1 = 2\Big(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\Big)^2 - 1 = \dfrac{2e^{2iz} + 4 + 2e^{-2iz} - 4}{4} = \dfrac{e^{i(2z)} + e^{-i(2z)}}{2} = \cos(2z)$.

Comme $\frac{a}{2} \in \mathbb{C}$ et que cos est surjective, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $a = u_0 = 2\cos(b)$. Alors on a comme avant $u_1 = u_0^2 - 2 = 4\cos^2(b) - 2 = 2(2\cos^2(b) - 1) = 2\cos(2b)$ et on démontre, par récurrence, que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\cos(2^n b)$. Si on avait $b \in \mathbb{R}$, on aurait $a = 2\cos(b) = e^{ib} + e^{-ib} \in \mathbb{R}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, $b = b_1 + ib_2$ avec $b_1 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}^*$ et on a donc $u_n = 2\cos(2^n b) = e^{i2^n b} + e^{-i2^n b}$ qu'on peut aussi écrire $u_n = e^{i2^n b_1 - 2^n b_2} + e^{-i2^n b_1 + 2^n b_2}$. Traitons deux cas :

• si $b_2 > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2^n b_2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{i2^n b_1 - 2^n b_2} = 0$ et $|e^{i2^n b_1 + 2^n b_2}| = e^{2^n b_2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |e^{i2^n b_1 - 2^n b_2}| = +\infty$ ce qui prouve, par somme d'une suite bornée car convergente et d'une suite non bornée, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

• si $b_2 < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{2^n b_2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{i2^n b_1 + 2^n b_2} = 0$ et $|e^{i2^n b_1 - 2^n b_2}| = e^{-2^n b_2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |e^{i2^n b_1 + 2^n b_2}| = +\infty$ et à nouveau, par somme d'une suite bornée car convergente et d'une suite non bornée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Si $a \notin \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est jamais bornée.

On a donc montré que l'ensemble de JULIA associé à la constante $c = -2$ est réduit au segment réel $[-2;2]$!

4.65 **a.** Supposons que f est K-lipschitzienne, alors si $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, par télescopage, on peut majorer $\sum\limits_{k=1}^{n} \big|f(t_k) - f(t_{k-1})\big| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \big(K(t_k - t_{k-1})\big) = K(t_n - t_0) \leqslant K$. Ainsi, $V(f) \leqslant K < +\infty$ et $f \in BV$.

b. Supposons f croissante (si f est décroissante, on remplace f par $-f$) et si $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, on trouve par télescopage $\sum_{k=1}^{n} \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| = \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) - f(t_{k-1})) = f(t_n) - f(t_0) \leqslant f(1) - f(0)$ donc $V(f) \leqslant f(1) - f(0) < +\infty$ et $f \in BV$.

c. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. f est continue par opérations sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue sur $[0;1]$. Soit $n \geqslant 2$, $t_k = \dfrac{1}{(n+1-k)\pi}$ si $k \in [\![0;n]\!]$, alors $V_n = \sum_{k=1}^{n} \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{(n+1-k)\pi} + \dfrac{1}{(n+2-k)\pi}\right) = \dfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ par divergence de la série harmonique. Ainsi, f est continue sur $[0;1]$ et elle n'appartient pas à BV.

d. Si $f \in BV$ et $t \in [0;1]$, si $n = 1$, $t_0 = 0$ et $t_1 = t$, $\sum_{k=1}^{1} \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| = |f(t_1) - f(t_0)| = |f(t) - f(0)| \leqslant V(f)$ donc $|f(t)| = |f(t) - f(0) + f(0)| \leqslant |f(t) - f(0)| + |f(0)| \leqslant V(f) + |f(0)|$. Ainsi, f est bornée sur $[0;1]$.

e. D'abord, la fonction nulle $f = 0$ est à variations bornées car dès que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| = 0$ donc $V(f) = 0 < +\infty$. De plus, si on prend un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et un couple $(f,g) \in BV^2$, toujours pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, on peut majorer par inégalité triangulaire $\sum_{k=1}^{n} \left|(\lambda f + g)(t_k) - (\lambda f + g)(t_{k-1})\right| \leqslant |\lambda| \sum_{k=1}^{n} \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|g(t_k) - g(t_{k-1})\right| \leqslant \lambda V(f) + V(g) < +\infty$ donc $\lambda f + g \in BV$. Ainsi, BV est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0;1], \mathbb{R})$ donc BV est un espace vectoriel.

<u>Homogénéité</u> : soit $f \in BV$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{k=1}^{n} \left|(\lambda f)(t_k) - (\lambda f)(t_{k-1})\right| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| \leqslant |\lambda| V(f)$ si $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$ donc $V(\lambda f) \leqslant |\lambda| V(f)$. Si $\lambda \neq 0$, on applique ce qui précède à $\dfrac{1}{\lambda}$ et λf pour avoir $V\left(\dfrac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) \leqslant \left|\dfrac{1}{\lambda}\right| V(\lambda f)$ donc $V(\lambda f) \geqslant |\lambda| V(f)$. Ainsi, $V(\lambda f) = |\lambda| V(f)$ qui est aussi vrai si $\lambda = 0$ car $0 = 0$. Ainsi, on a bien l'homogénéité $N(\lambda f) = V(\lambda f) + |(\lambda f)(0)| = |\lambda| V(f) + |\lambda|\,|f(0)| = |\lambda| N(f)$.

<u>Inégalité triangulaire</u> : on a déjà vu en montrant que BV était un espace vectoriel (en prenant $\lambda = 1$) que $\sum_{k=1}^{n} \left|(f+g)(t_k) - (f+g)(t_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|g(t_k) - g(t_{k-1})\right| \leqslant V(f) + V(g)$ donc on déduit que $V(f+g) \leqslant V(f) + V(g)$. D'où $N(f+g) = V(f+g) + |(f+g)(0)| \leqslant V(f) + V(g) + |f(0)| + |g(0)| = N(f) + N(g)$.

<u>Séparation</u> : Si on suppose que $N(f) = 0$, comme $V(f)$ et $|f(0)|$ sont positifs, on en déduit que $V(f) = 0$ et $|f(0)| = f(0) = 0$. Avec l'inégalité de la question **d.**, $\forall t \in [0;1]$, $|f(t) - f(0)| \leqslant V(f) = 0$ donc $f(t) = f(0)$ et f est constante. Comme $f(0) = 0$ donc $f(0) = 0$.

On peut donc conclure que N est une norme sur l'espace BV.

f. Soit f et g deux fonctions de BV, on peut définir d'après **d.** les deux réels $A = ||f||_{\infty,[0;1]} = \operatorname{Sup}\limits_{t \in [0;1]} |f(t)|$ et $B = ||g||_{\infty,[0;1]} = \operatorname{Sup}\limits_{t \in [0;1]} |g(t)|$. Si $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, en faisant intervenir un terme intermédiaire, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $|f(t_k)g(t_k) - f(t_{k-1})g(t_{k-1})| = |f(t_k)g(t_k) - f(t_k)g(t_{k-1}) + f(t_k)g(t_{k-1}) - f(t_{k-1})g(t_{k-1})|$.

Par inégalité triangulaire, $|f(t_k)g(t_k) - f(t_{k-1})g(t_{k-1})| \leqslant |f(t_k)||g(t_k) - g(t_{k-1})| + |g(t_{k-1})||f(t_k) - f(t_{k-1})|$ donc $|f(t_k)g(t_k) - f(t_{k-1})g(t_{k-1})| \leqslant A|g(t_k) - g(t_{k-1})| + B|f(t_k) - f(t_{k-1})|$. En sommant, on arrive à majorer $\sum_{k=1}^{n} \left|(fg)(t_k) - (fg)(t_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(A|g(t_k) - g(t_{k-1})| + B|f(t_k) - f(t_{k-1})|\right) \leqslant AV(g) + BV(f)$. Ainsi, $fg \in BV$ et l'espace vectoriel BV est bien stable par produit (on dit que c'est une algèbre).

g. Soit f et g dans BV avec $g : [0;1] \to [0;1]$ monotone. Supposons que g est une fonction croissante (sinon on remplace g par $-g \in BV$). Soit $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$. Comme $g(0) \geqslant 0$, $g(1) \leqslant 1$ et g croissante, on a $0 \leqslant t'_0 = g(t_0) \leqslant t'_1 = g(t_1) \leqslant \cdots \leqslant t'_n = g(t_n) \leqslant 1$. Puisque $f \in BV$, on a la majoration $\sum\limits_{k=1}^{n} |f \circ g(t_k) - f \circ g(t_{k-1})| = \sum\limits_{k=1}^{n} |f(t'_k) - f(t'_{k-1})| \leqslant V(f)$ donc $f \circ g \in BV$.

h. Soit $g : [0;1] \to [0;1]$ définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \in]0;1]$. Les variations les plus importantes de la fonctions g sont atteintes quand on parcourt tous les creux et bosses de g, g est croissante sur tout segment $C_n = \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{2n-1}\right]$ pour $n \geqslant 2$ et elle est décroissante sur tout segment $D_n = \left[\frac{2}{2n+1}; \frac{1}{n}\right]$ avec $n \geqslant 1$. La variation de g sur C_n est de $\left|g\left(\frac{2}{2n-1}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{4}{(2n-1)^2}$ et celle sur D_n est de $\left|g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{2}{2n+1}\right)\right| = \frac{4}{(2n+1)^2}$. Ainsi, comme $\sum\limits_{n \geqslant 2} \left(\frac{4}{(2n+1)^2} + \frac{4}{(2n-1)^2}\right)$ converge par Riemann car $\frac{4}{(2n+1)^2} + \frac{4}{(2n-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$, la fonction g est à variation bornée. Prenons maintenant $f : [0;1] \to [0;1]$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors f est croissante donc f appartient à BV d'après **b.** et $f \circ g(x) = x\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ si $x \in]0;1]$ et on peut montrer comme en question **c.**, que $f \circ g$ n'appartient pas à BV.
Ainsi, la condition "f monotone" n'est pas suffisante pour que $f \circ g \in BV$ si $(f,g) \in BV^2$ avec $g : [0;1] \to [0;1]$.

4.66 **a.** Comme $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ est scindé d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que A est trigonalisable et semblable à $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_p, \cdots, \lambda_p)$ où chaque valeur propre λ_i est répétée n_i fois si n_i est la multiplicité de λ_i dans le polynôme χ_A. Pour $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est semblable à la matrice D^k donc $\text{Tr}\,(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{p} n_i \lambda_i^k = n_1 \lambda_1^k \Big(1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \frac{n_i}{n_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\Big)$. Par hypothèse, $\lim\limits_{k \to +\infty} \Big(1 + \sum\limits_{i=2}^{p} \frac{n_i}{n_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\Big) = 1$ car $\forall i \in [\![2;p]\!]$, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ donc $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geqslant k_0$, $\left|\sum\limits_{i=2}^{p} \frac{n_i}{n_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\right| \leqslant \frac{1}{2}$ ce qui prouve que $\forall k \geqslant k_0$, $\text{Tr}\,(A^k) \neq 0$.
Alors, pour $k \geqslant k_0$, $t_k = \frac{\text{Tr}\,(A^{k+1})}{\text{Tr}\,(A^k)}$ est bien défini.
On a même $\text{Tr}\,(A^k) \underset{+\infty}{\sim} n_1 \lambda_1^k$ donc $t_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{n_1 \lambda_1^{k+1}}{n_1 \lambda_1^k} = \lambda_1$ ce qui prouve que $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = \lambda_1$.

b. Prenons par exemple $n = p = 2$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ avec $A^{2k} = I_2$ et $A^{2k+1} = A$. Ainsi, comme $\text{Tr}\,(A) = 0$, on ne peut pas définir t_k si k est impair.
Cela vient du fait que, dans ce cas particulier, $|\lambda_1| = |1| = 1 = |-1| = |\lambda_2|$.

c. On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 2 & X-3 & -1 \\ -4 & 4 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 4 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)\big[(X-3)(X+1) - 4\big] = (X-1)^3$ donc $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et on n'est pas dans le cas de la question **a.**. Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, on a $\text{rang}\,(A - I_3) = 1$ donc $\dim(\text{Ker}\,(A - I_3)) = 2$ d'après la formule du rang et, clairement, $E_1(A) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ en posant $v_1 = (1,1,0)$ et $v_2 = (0,1,-2)$. Comme $E_1(A) \neq \mathbb{C}^3$, A n'est pas diagonalisable mais elle est trigonalisable car χ_A est scindé (dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$). Cherchons un vecteur v_3 tel que $Av_3 = v_2 + v_3$, ou encore $(A - I_3)v_3 = v_2$ et on constate sur la troisième colonne de la matrice ci-dessus que $v_3 = (0,0,1)$ convient. Comme $v_3 \notin E_1(A) = \text{Vect}(v_1, v_2)$, on a (v_1, v_2, v_3) libre donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de

$\mathbb{C}^3$ et, par construction, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$ si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par formule de changement de base, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a $A = PTP^{-1}$ donc A et T sont semblables.

d. Comme $T = I_3 + E_{2,3}$ et $I_3 E_{2,3} = E_{2,3} I_3$, par le binôme de NEWTON, on a $T^k = (I_3 + E_{2,3})^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E_{2,3}^i$. Mais $E_{2,3}^2 = 0$ donc $T^k = I_3 + kE_{2,3}$. Comme $A^k = PT^kP^{-1}$, on a $A^k = P(I_3 + kE_{2,3})P^{-1} = I_3 + kPE_{2,3}P^{-1}$. Mais $E_{2,3} = T - I_3$ donc $PE_{2,3}P^{-1} = P(T - I_3)P^{-1} = A - I_3$, ce qui montre que $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{A^k}{k} = A - I_3$ car on a $\dfrac{A^k}{k} = \dfrac{I_3 + k(A - I_3)}{k} = A - I_3 + \dfrac{I_3}{k}$. On pouvait directement effectuer le binôme avec $A = I_3 + (A - I_3)$ sachant que les matrices I_3 et $A - I_3$ commutent et que $A - I_3$ est nilpotente d'indice 2.

4.67 **a.** Soit $d = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$, il existe une base $(e_1, \cdots, e_d)$ de F qu'on peut compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_d, \cdots, e_{d+1}, \cdots, e_n)$ de E. Soit une suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de F qui converge dans E, on note $v = \lim\limits_{p \to +\infty} v_p \in E$ et on décompose ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$, $v = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $v_p = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{p,k} e_k$. D'après le cours, on sait que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $a_k = \lim\limits_{p \to +\infty} a_{p,k}$. Mais comme $v_p \in F$, on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall k \in d + 1n$, $a_{p,k} = \lim\limits_{p \to +\infty} a_{p,k} = \lim\limits_{p \to +\infty} 0 = 0$ donc $a_k = 0$. Ainsi, $v \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_d) = F$. Par caractérisation séquentielle des fermés, on peut conclure que F est fermé.

b. Prenons par exemple la norme ∞ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors on montre que $||AB||_\infty \leqslant n||A||_\infty ||B||_\infty$ par définition du produit matriciel donc, par récurrence, on a $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $||A^p||_\infty \leqslant n^{p-1} ||A||_\infty^p$. Comme la série $\sum\limits_{p \geqslant 0} \dfrac{||A||_\infty^p}{p!}$ converge (par D'ALEMBERT ou en tant que série exponentielle), la série associée à chaque case converge absolument donc converge ce qui fait que la série de matrices converge aussi (par les coordonnées).

c. Soit $p \in \mathbb{N}$, par la division euclidienne de X^k par χ_A, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in F = \text{Vect}(A^k \mid k \in [\![0; n-1]\!])$ donc $\exp_p(A) \in F$ par stabilité de F par combinaison linéaire. Ainsi, comme $(\exp_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge d'après **b.**, on a $\exp(A) = \lim\limits_{p \to +\infty} \exp_p(A) \in F = \text{Vect}(A^k \mid k \in [\![0; n-1]\!])\text{Vect}(A^k \mid k \in [\![0; n-1]\!])$.

4.68 **a.** Soit $f \in E$, on a $f \leqslant |f|$ donc $g = |f| - f \geqslant 0$ ce qui donne, par hypothèse, $u(g) = u(|f|) - u(f) \geqslant 0$ par linéarité de u. De même, $-f \leqslant |f|$ donc $h = |f| + f \geqslant 0$ et, à nouveau $u(h) = u(|f|) + u(f) \geqslant 0$ donc $-u(|f|) \leqslant u(f) \leqslant u(|f|)$ ce qui garantit bien que $|u(f)| \leqslant u(|f|)$.

b. Pour $f \in E$, comme f est continue sur le segment I, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc $|f| \leqslant ||f||_{\infty,I} e$. On pose cette fois $a = ||f||_{\infty,I} e - f \geqslant 0$ donc $u(a) \geqslant 0$ ce qui donne une nouvelle fois par linéarité de u, $||f||_{\infty,I} u(e) - u(|f|) \geqslant 0$. On a donc, d'après **a.**, $|u(f)| \leqslant u(|f|) \leqslant ||f||_{\infty,I} u(e)$ donc on a bien $\forall f \in E$, $|u(f)| \leqslant C ||f||_{\infty,I}$ en posant $C = u(e) \geqslant 0$ car e est positive sur I.

c. D'après la question précédente, $\forall f \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} \leqslant u(e)$. La partie $A = \left\{ \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} \;\middle|\; f \in E \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$ est non vide (car il existe des fonctions non nulles sur I) et majorée par $u(e)$ ce qui montre que la borne supérieure de l'énoncé existe et que $\text{Sup}(A) \leqslant u(e)$. De plus, en prenant $f = e$, on a $e \in E \setminus \{0\}$ et $\dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} = u(e)$ donc $u(e) \in A$ ce qui montre que cette borne supérieure est un maximum (atteint en e) et que $\text{Sup}_{\substack{f \in E \\ f \neq 0}} \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} = u(e)$.

4.69 **a.** p_2 est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- si $p_2(A) = 0$, on a $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = 0$ ce qui montre, comme une somme de quantités positives ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = 0$ donc que $A = 0$ (séparation).

- si $\lambda \in \mathbb{R}$, $p_2(\lambda A) = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\lambda a_{i,j})^2} = \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2} = |\lambda| p_2(A)$ (homogénéité).
- $p_2(A+B)^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} + b_{i,j})^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j} + \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{i,j}^2$. Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $\mathbb{R}^{n^2}$, on a $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2} \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{i,j}^2}$ donc on obtient $p_2(A+B)^2 \leqslant p_2(A)^2 + 2p_2(A)p_2(B) + p_2(B)^2$ ce qui, en passant à la racine, donne bien la majoration $p_2(A+B) \leqslant p_2(A) + p_2(B)$ (inégalité triangulaire).

Par conséquent, p_2 est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. La norme p_2 définie par l'énoncé est, d'après le cours, la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $(\,.\,|\,.\,) : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \to \mathbb{R}$ défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}\ (A^T B) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$.

c. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$, en notant $L_i(M)$ la ligne i de la matrice M vue comme un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $(MX)^T = \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} m_{1,j} x_j \ \cdots \ \sum\limits_{j=1}^{n} m_{n,j} x_j \Big) = \big((L_1(M)|X) \ \cdots \ (L_n(M)|X) \big)$. Ainsi, $||MX||_2^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (L_i(M)|X)^2$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $(L_i(M)|X)^2 \leqslant ||L_i(M)||_2^2 ||X||_2^2$ donc $||MX||_2^2 \leqslant \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} ||L_i(M)||_2^2 \Big) ||X||_2^2 = p_2(M)^2 ||X||_2^2$. En passant à la racine, on a bien $||MX||_2 \leqslant p_2(M) ||X||_2$.

Pour trouver $X \neq 0$ tel que $||MX||_2 = p_2(M)||X||_2$, il faut que toutes les inégalités précédentes soient des égalités, c'est-à-dire que X et $L_i(M)$ soient colinéaires pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, donc que toutes les lignes de M soient proportionnelles, ou encore que M soit de rang 1. Ce n'est donc pas la meilleure constante cherchée dans le cas général.

d. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $||MX||_2^2 = (MX|MX) = X^T M^T M X$. La matrice $M^T M$ est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable par le théorème spectral. De plus, si λ est une valeur propre de $M^T M$, il existe $X \neq 0$ tel que $M^T M X = \lambda X$ ce qui donne $X^T M^T M X = \lambda X^T X$ ou encore $||MX||_2^2 = \lambda ||X||_2^2$ donc $\lambda \geqslant 0$ car $||X||_2^2 > 0$ puisque $X \neq 0$. On dit que $M^T M$ est symétrique positive. Il existe donc $P \in O(n)$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des termes positifs sur la diagonale (les valeurs propres de $M^T M$), plus précisément $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ telles que $M^T M = PDP^T$.

Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||MX||_2^2 = X^T M^T M X = X^T P D P^T X = Y^T D Y$ en posant $Y = P^T X$. Si on note $Y^T = (y_1 \ \cdots \ y_n)$, on calcule $Y^T D Y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \lambda_n \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = \lambda_n ||Y||_2^2$. Or $||Y||_2^2 = Y^T Y = X^T P P^T X = X^T X = ||X||_2^2$ car $PP^T = I_n$. Ainsi, $||MX||_2^2 \leqslant \lambda_n ||X||_2^2$ d'où, en passant à la racine, $||MX||_2 \leqslant \sqrt{\lambda_n} ||X||_2$ donc $\dfrac{||MX||_2}{||X||_2} \leqslant \sqrt{\lambda_n}$. Si X_n est un vecteur propre unitaire de $M^T M$ associé à la valeur propre λ_n, on a $\dfrac{||MX_n||_2^2}{||X_n||_2^2} = X_n^T M^T M X_n = \lambda_n X_n^T X_n = \lambda_n$ donc $\dfrac{||MX_n||_2}{||X_n||_2} = \sqrt{\lambda_n}$. Par conséquent, $\sqrt{\lambda_n}$ majore $\Big\{ \dfrac{||MX||_2}{||X||_2} \ \Big| \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X \neq 0 \Big\}$ et fait partie de cet ensemble, ceci prouve que $\operatorname*{Sup}\limits_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2} = \operatorname*{Max}\limits_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2} = \sqrt{\lambda_n}$.

4.70 **a.** Supposons que f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, alors, pour tout réel x tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha = \dfrac{\varepsilon}{k+1}$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0| \leqslant \dfrac{\varepsilon k}{k+1} \leqslant \varepsilon$. Ceci prouve que f est continue en x_0 et, comme ceci est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $f : x \mapsto |x|$. La fonction f n'est pas dérivable en 0. Pourtant, f est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En effet, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$, traitons quatre cas :

- si $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $|f(x) - f(y)| = |x - y| \leqslant 1.|x - y|$.
- si $x \leqslant y \leqslant 0$, on a $|f(x) - f(y)| = |(-x) - (-y)| = |y - x| = |x - y| \leqslant 1.|x - y|$.
- si $x \leqslant 0 \leqslant y \leqslant |x|$, on a $|f(x) - f(y)| = |(-x) - y| = |x + y| = -x - y \leqslant 1.|x - y| = y - x$ car $-y \leqslant y$.
- si $x \leqslant 0 \leqslant |x| \leqslant y$, on a $|f(x) - f(y)| = |(-x) - y| = |x + y| = x + y \leqslant 1.|x - y| = y - x$ car $x \leqslant -x$.

Le fait que f soit lipschitzienne n'implique donc pas que f soit dérivable.

4.71 **a.** C est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc, par la propriété fondamentale des réels, elle admet une borne supérieure. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Sup}(C)$ est un majorant de C mais $\mathrm{Sup}(C) - \dfrac{1}{2^n}$ n'en est pas un car $\mathrm{Sup}(C)$ est le plus grand des majorants. Ainsi, il existe un réel $x_n \in C$ tel que $\mathrm{Sup}(C) - \dfrac{1}{2^n} < x_n \leqslant \mathrm{Sup}(C)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathrm{Sup}(C) - \dfrac{1}{2^n}\right) = \mathrm{Sup}(C)$, par le théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \mathrm{Sup}(C)$. Par conséquent, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C qui converge vers $\mathrm{Sup}(C)$. Bien sûr, il existe aussi une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C qui converge vers $\mathrm{Inf}(C)$.

b. Comme C est non vide, X ne l'est pas non plus car si $c \in C$, alors $|c - c| = 0 \in X$. De plus, comme C est non vide et bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in C,\ |x| \leqslant M$. Ainsi, $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ |x - y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2M$ par inégalité triangulaire donc C est non vide, minoré par 0 et majoré par $2M$ donc X admet une borne inférieure et une borne supérieure toujours par la propriété fondamentale des réels. Mieux, si $(x, y) \in C^2$, en supposant que $x \geqslant y$ (l'autre cas est symétrique), on a $|x - y| = x - y \leqslant \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$ car $x_n \leqslant \mathrm{Sup}(C)$ et $y_n \geqslant \mathrm{Inf}(C)$ donc $\mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$ est un majorant de C.

- 0 minore X et $0 \in X$ donc $0 = \mathrm{Min}(C) = \mathrm{Inf}(X)$.
- D'après **a.**, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C qui convergent respectivement vers $\mathrm{Sup}(C)$ et $\mathrm{Inf}(C)$. Il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \geqslant y_n$ (et ceci même si $C = \{c\}$ car alors $x_n = y_n = c$). Alors $\forall n \geqslant n_0,\ x_n - y_n = |x_n - y_n| \in C$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$. Comme $\mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$ est un majorant de X et qu'il existe une suite d'éléments de X qui converge vers $\mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$, par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\mathrm{Sup}(X) = \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$.

4.72 **a.** Soit un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + bt \geqslant 0$. traitons deux cas :

Si $a = 0$, pour avoir $bt \geqslant 0$ pour tout réel t, on doit clairement avoir $b = 0$.

Si $a \neq 0$, $f : t \mapsto at^2 + bt$ est polynomiale de degré 2 et son discriminant $\Delta = b^2$ doit être négatif car sinon f s'annulerait deux fois et changerait de signe au passage des racines. Ainsi, $0 \leqslant b^2 \leqslant 0$ donc $b = 0$.

Dans les deux cas, on a forcément $b = 0$ si $\forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + bt \geqslant 0$.

b. Méthode 1 : pour se servir de la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $f : t \mapsto < B(x_0 + tx), x_0 + tx >$. Par bilinéarité du produit scalaire, $f(t) = < Bx_0, x_0 > + (< Bx_0, x > + < Bx, x_0 >)t + < Bx, x > t^2$. Or la matrice B est symétrique donc $< Bx_0, x > = x_0^T B^T x = x_0^T Bx = < x_0, Bx > = < Bx, x_0 >$. Ainsi, par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 2 < Bx_0, x > t + < Bx, x > t^2 \geqslant 0$. La question précédente montre alors que $< Bx_0, x > = 0$. Ceci étant vrai pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a $Bx_0 \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ donc $Bx_0 = 0$.

Méthode 2 : d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $B = PDP^T$. Comme B est positive par hypothèse, on peut écrire $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ positives de B. Alors $< Bx_0, x_0 >= x_0^T B x_0 = x_0^T PDP^T x_0 = y_0^T D y_0$ en posant $y_0 = P^T x_0$. Si on pose $y_0 = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et , on a $< Bx_0, x_0 >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = 0$ donc $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\lambda_i y_i^2 = 0$ donc $\lambda_i y_i = 0$ ce qui montre que $Dy_0 = 0$ d'où $Bx_0 = PDP^T P y_0 = PDy_0 = 0$ car $P^T P = I_n$.

c. En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$ donc F est polynomiale en les coordonnées de x ce qui prouve que F est continue. On pouvait aussi écrire $F = G \circ H$ où $H : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^2$ et $G : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$ sont définies par $H(x) =< Ax, x >$ et $G(x, y) =< x, y >$ puis, comme G et H sont continues car respectivement bilinéaire et linéaire en dimension finie, F est continue par composition. La sphère unité S est clairement bornée. De plus, en notant $N : x \mapsto ||x||$ la fonction norme qui est continue car 1-lipschitzienne d'après le cours, on a $S = N^{-1}(\{1\})$ et $\{1\}$ est fermé donc S est aussi fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue. F étant continue sur un fermé borné en dimension finie, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que F est bornée sur S et y atteint ses bornes, d'où l'existence de $\operatorname{Inf}_{x \in S} F(x) = \operatorname{Min}_{x \in S} F(x) = \lambda_1 = F(e_1)$ avec $e_1 \in S$ d'après l'énoncé de la question **d.**.

d. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, si $x = 0$, alors $< (A - \lambda_1 I_n)x, x >= 0 \geqslant 0$. Si $x \neq 0$, on pose $y = \frac{x}{||x||} \in S$ donc $F(y) \geqslant \lambda_1$ d'après la question précédente, ce qui s'écrit $< Ay, y >= \frac{1}{||x||^2} < Ax, x > \geqslant \lambda_1$ par bilinéarité du produit scalaire et on a donc $< Ax, x > \geqslant \lambda_1 < x, x >$ ou encore $< (A - \lambda_1 I_n)x, x > \geqslant 0$.

e. Comme $A - \lambda_1 I_n$ est symétrique, que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< (A - \lambda_1 I_n)x, x > \geqslant 0$ et que, d'après ce qui précède, on a aussi $< (A - \lambda_1 I_n)e_1, e_1 >= F(e_1) - \lambda_1 = 0$, on a $(A - \lambda_1 I_n)e_1 = 0$ d'après la question **b.**. Ainsi, λ_1 est une valeur propre de A et e_1 un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre λ_1.

Soit λ une valeur propre de A et $e \in S$ un vecteur propre de A associé à λ_1, alors on a $Ae = \lambda e$ donc $F(e) =< \lambda e, e >= \lambda ||e||^2 = \lambda \geqslant \lambda_1$ par construction de λ_1. Ainsi, λ_1 est la plus petite valeur propre de A.

4.73 **a.** Si $n = 1$, $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc M est diagonalisable.

Si $n \geqslant 2$, M n'est pas forcément diagonalisable. En effet, si $M_k = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{k+1}, \cdots, \frac{1}{k+n}\right) + E_{1,2}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, alors M_k est triangulaire supérieure avec des termes tous différents sur la diagonale donc $\chi_{M_k} = \prod_{i=1}^{n} \left(X - \frac{1}{k+i}\right)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc M_k est diagonalisable. Clairement, en regardant les suites coordonnées (case par case), $\lim_{k \to +\infty} M_k = E_{1,2}$ et $\chi_{E_{1,2}} = X^n$ alors que $\dim \mathrm{Ker}(E_{1,2}) = n - 1$ avec la formule du rang car $\mathrm{rang}\,(E_{1,2}) = 1$. Ainsi, M n'est pas diagonalisable (les deux ordres de multiplicité de 0 ne sont pas égaux) même en étant limite d'une suite de matrices toutes diagonalisables.

b. ($\Longrightarrow$) Supposons P unitaire et scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors $P = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$ avec $r \geqslant 1$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P et $m_1, \cdots, m_r$ les ordres de multiplicité associés. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = \prod_{k=1}^{r} (z - \alpha_k)^{m_k}$ donc $|P(z)|^2 = \prod_{k=1}^{r} |z - \alpha_k|^{2m_k}$. Or, pour $k \in [\![1; r]\!]$, $|z - \alpha_k|^2 = (\mathrm{Re}\,(z) - \alpha_k)^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2 \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^2$ et on a donc $|P(z)|^2 \geqslant \prod_{k=1}^{r} |\mathrm{Im}\,(z)|^{2m_k}$. Comme $\deg(P) = n = \sum_{k=1}^{r} m_k$, on a $|P(z)|^2 \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^{2n}$ ce qui donne bien

$|P(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|^n$ en passant à la racine.

($\Longleftarrow$) On sait d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS que P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Soit λ une racine complexe de P, comme $|P(z)| = 0 \geqslant |\text{Im}\,(z)|^n$, on a $|\text{Im}\,(z)| = 0$ donc z est réelle. Ainsi, P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ car toutes les racines de P sont réelles.

Par double implication, on a montré que (P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$) $\Longleftrightarrow$ ($\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|^n$).

c. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers M, donc $(zI_n - M_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers $zI_n - M$. Comme la fonction $\det$ est polynomiale donc continue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\big(\det(zI_n - M_k)\big)_{k\geqslant 0}$ converge vers $\det(zI_n - M)$. Ainsi, $(\chi_{M_k}(z))_{k\geqslant 0}$ converge vers $\chi_M(z)$. Comme toutes les matrices M_k sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les polynômes χ_{M_k} sont scindés sur $\mathbb{R}$, ce qui montre avec la question **b.** que $|\chi_{M_k}(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient donc $|\chi_M(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|$, ce qui montre avec l'autre sens de la question précédente que χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ car χ_M est unitaire de degré n. Ainsi, par théorème, M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.74 **a.** Soit $(A,B) \in E^2$, la case (i,j) de A^TB contient, par définition du produit matriciel et de la transposée, le terme $\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,j}$. Ainsi, $\text{Tr}\,(A^TB) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,i}\Big) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j} = < A, B >$ en remplaçant k par i, i par j. $||A||$ est donc la norme euclidienne (associée au produit scalaire canonique) de A.

b. Pour $(u,v) \in (\mathbb{R}^m)^2$, si on écrit $u = (u_1, \cdots, u_m)$ et $v = (v_1, \cdots, v_m)$, on a l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^m$) : $|(u|v)| = \Big|\sum_{i=1}^{m} u_iv_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} v_i^2} = ||u||\,||v||$.

Si on note la matrice $C = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ par définition du produit matriciel donc, avec l'inégalité précédente élevée au carré, en posant $u_k = a_{i,k}$ et $v_k = b_{k,j}$ et $m = n$, il vient $||AB||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\Big) \times \Big(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\Big)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\Big)\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\Big)\right)$ or $\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\Big) = ||B||^2$ donc $||AB||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(||B||^2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\Big)\right) = ||A||^2\,||B||^2$.

c. On a déjà $AM_0 = M_0A$ par hypothèse. Si on suppose, pour un entier $p \in \mathbb{N}$, que $AM_p = M_pA$, alors $AM_{p+1} = A(2M_p - M_pAM_p) = 2AM_p - (AM_p)^2 = 2M_pA - (M_pA)^2 = (2M_p - M_pAM_p)A = M_{p+1}A$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, par principe de récurrence, on a $\forall p \in \mathbb{N},\ AM_p = M_pA$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, $||I_n - AM_{p+1}|| = ||I_n - 2AM_p + AM_pAM_p|| = ||(I_n - AM_p)^2|| \leqslant ||I_n - AM_p||^2$ d'après la question **b.**. On a $||I_n - AM_0|| = ||I_n - AM_0||^{2^0}$ et, si on suppose que $||I_n - AM_p|| \leqslant ||I_n - AM_0||^{2^p}$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$, alors $||I_n - AM_{p+1}|| \leqslant ||I_n - AM_p||^2 \leqslant (||I_n - AM_0||^{2^p})^2 = ||I_n - AM_0||^{2^{p+1}}$. Par principe de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant ||I_n - AM_p|| \leqslant ||I_n - AM_0||^{2^p}$.

Comme $||I_n - AM_0|| < 1$ par hypothèse, on a $\lim_{p\to+\infty} ||I_n - AM_0||^{2^p} = 0$ et, par encadrement avec l'inégalité précédente, on en déduit que $\lim_{p\to+\infty} ||I_n - AM_p|| = 0$, ce qui prouve que $\lim_{p\to+\infty} AM_p = I_n$. On a aussi $||A^{-1} - M_p|| = ||A^{-1}(I_n - AM_p)|| \leqslant ||A^{-1}||\,||I_n - AM_p||$ donc, de même, $\lim_{p\to+\infty} M_p = A^{-1}$.

La suite $\big(||I_n - AM_0||^{2^p}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ tend très vite vers 0 donc la convergence de $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vers A^{-1} est extrêmement rapide, seul le choix de la matrice M_0 telle que $||I_n - AM_0|| < 1$ reste à faire.

4.75 **a.** Pour $f \in E$, la fonction $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $\int_0^x tf(t)dt$ est bien défini pour tout $x \in [0;1]$. Ceci justifie que φ est bien définie. De plus, $\phi(f)$ étant la primitive de g qui s'annule en 0, $\phi(f)$ est de classe C^1 donc a fortiori continue : ϕ va donc bien de E dans E. La linéarité de ϕ découle très naturellement de la linéarité de l'intégrale. Par conséquent, ϕ définit un endomorphisme de E.

b. Pour une fonction $f \in E$ et un réel $x \in [0;1]$, par inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient la majoration $|\phi(f)(x)| = \left|\int_0^x tf(t)dt\right| \leqslant \int_0^x t|f(t)|dt \leqslant \int_0^x t||f||_\infty dt = ||f||_\infty \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{||f||_\infty x^2}{2}$. Ainsi, il vient $||\phi(f)||_1 = \int_0^1 |\phi(f)(x)|dx \leqslant \int_0^1 \frac{||f||_\infty x^2}{2}dx = ||f||_\infty \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{||f||_\infty}{6}$. Si on prend $f = 1$, alors $\phi(f) : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ donc $||\phi(f)||_1 = \frac{1}{6}$ alors que $||f||_\infty = 1$. Ceci justifie que $K_1 = \frac{1}{6}$ est le plus petit réel tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_1||f||_\infty$. En effet, s'il existait $k < \frac{1}{6}$ tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant k||f||_\infty$, en prenant $f = 1$, on aurait $||f||_\infty = 1$, $\phi(f) : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ donc $||\phi(f)||_1 = \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6} \leqslant k$ ce qui est contradictoire.

c. Pour une fonction $f \in E$ et un réel $x \in [0;1]$, posons la fonction $F : x \mapsto \int_0^x t|f(t)|dt$ de sorte que l'on a $||\phi(f)||_1 = \int_0^1 |\phi(f)(x)|dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x t|f(t)|dt\right)dx = \int_0^1 F(x)dx$ par inégalité triangulaire sur les intégrales. Ainsi, comme F est de classe C^1 sur $[0;1]$ d'après le théorème fondamental de l'intégration car $t \mapsto t|f(t)|$ est continue sur $[0;1]$, en posant $u = F$ et $v' : x \mapsto x - 1$, par intégration par parties, on obtient la relation $\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 v'(x)u(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 x(1-x)|f(x)|dx$ car $u(0) = v(1) = 0$. Alors, comme $\forall x \in [0;1],\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, on a $||\phi(f)||_1 \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x)|}{4}dx = \frac{||f||_1}{4}$.

Si on trouvait une fonction non nulle $f \in E$ telle que $||\phi(f)||_1 = \frac{||f||_1}{4}$, on montrerait comme à la question précédente que $K_2 = \frac{1}{4}$. Supposons l'existence d'une telle fonction. Alors $\int_0^1 x(1-x)|f(x)|dx = \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|dx$ ce qui donne, en soustrayant et par linéarité de l'intégrale, la relation $\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - x(1-x)\right)|f(x)|dx = 0$. Or $x \mapsto \left(\frac{1}{4} - x(1-x)\right)|f(x)|$ est continue et positive sur le segment $[0;1]$. on en déduit par théorème que $x \in [0;1],\ \left(\frac{1}{4} - x(1-x)\right)|f(x)| = 0$ donc que $\forall x \in [0;1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\},\ f(x) = 0$. Par continuité de f, on en déduit que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse initiale. Ainsi, il n'existe aucune fonction non nulle f telle que $||\phi(f)||_1 = \frac{||f||_1}{4}$ mais on peut essayer avec les suites de fonctions.

Il faut que l'intégrale se condense autour de $\frac{1}{2}$, un peu comme une fonction de DIRAC, là où $x(1-x)$ est maximal. On peut donc prendre, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto (x(1-x))^n = x^n(1-x)^n$. Posons $I_n = ||f_n||_1$ et, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $J(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx > 0$. Par le changement de variables $x = 1-t$ on trouve facilement $J(p,q) = J(q,p)$ et par intégration par parties, en posant $u : x \mapsto (1-x)^{q+1}$ et $v : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$, on obtient $J(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1}J(p+1,q)$. Ainsi, comme $J(p,0) = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$, on a par télescopage $J(p,q) = \left(\prod_{k=0}^{q} \frac{J(p+k,q-k)}{J(p+k+1,q-k-1)}\right) \times J(p+q,0) = \left(\prod_{k=0}^{q-1} \frac{q-k}{p+k+1}\right) \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Ainsi,

$I_n = J(n,n) = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant k||f||_1$, en prenant $f = f_n \neq 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{||\phi(f_n)||_1}{||f_n||_1} = \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)} \leqslant k$ ce qui donne, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $k \geqslant \dfrac{1}{4}$. Comme on a vu que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant \dfrac{||f||_1}{4}$, ceci justifie que $K_2 = \dfrac{1}{4}$ est le plus petit réel tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_2||f||_1$.

4.76 **a.** Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$, comme on a $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient $B_n(A) = I_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}A^k = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ par définition avec $a_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}a^k$ et $b_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}b^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le cours, la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. La série entière $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}z^k$ a pour rayon $R = 1$ par la règle de D'ALEMBERT car en notant $u_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right| = 1$ puisque $\forall k \geqslant 1,\ \left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \dfrac{2k-1}{4(2k+1)} \times \dfrac{(2k+2)!k!k!}{(2k)!(k+1)!(k+1)!} = \dfrac{2k-1}{4(2k+1)} \times \dfrac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}$. Comme $|a| < 1$ et $|b| < 1$, les deux séries $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}a^k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}b^k$ convergent donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Ainsi, la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b. Comme I_2 et N commutent, on a $\forall n \geqslant 1,\ A^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}(\lambda I_2)^k N^{n-k} = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}N$ par le binôme de NEWTON car $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$. Pour $n \geqslant 2$, $B_n(A) = I_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}(\lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}N)$ donc $B_n(A) = \Big(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}\lambda^k\Big)I_2 + \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}k\lambda^{k-1}\Big)N$. On a vu en **a.** que le rayon de convergence de $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}z^k$ vaut 1 donc celui de la “série dérivée” $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}kz^{k-1}$ vaut aussi 1 d'après le cours. Comme $|\lambda| < 1$ par hypothèse, les deux séries $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}\lambda^k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}k\lambda^{k-1}$ convergent donc, d'après l'expression (1), la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c. Traitons les deux cas quant à la diagonalisabilité de A :

- Si A est diagonalisable, alors A est semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ du type de la question **a.** avec a et b qui sont les valeurs propres de A donc qui vérifient bien $|a| < 1$ et $|b| < 1$ par hypothèse. Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. On a classiquement, $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$ donc $B_n(A) = P\Big(I_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}D^k\Big)P^{-1} = PB_n(D)P^{-1}$. On sait d'après **a.** que $(B_n(D))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers D' et, comme $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie, elle est continue donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}} = (\varphi(B_n(D)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B = \varphi(D')$.
- Si A n'est pas diagonalisable, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, A est tout de même trigonalisable et on a forcément, d'après le cours, $\chi_A = (X-\lambda)^2$ car χ_A ne peut pas être scindé à racines simples puisque A n'est pas diagonalisable. Ainsi, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et

$\alpha \neq 0$. En posant $N = \alpha E_{1,2}$, on a bien N nilpotente d'indice 2 donc, d'après la question **b.**, la suite $(B_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T'. Comme avant, puisque $B_n(A) = PB_n(T)P^{-1}$ et que $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est continue, $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}} = (\varphi(B_n(T)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B = \varphi(T')$.

Comme $\forall k \geqslant 1$, $\binom{1/2}{k} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k}$ par un calcul classique, pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a la relation $\sqrt{1+x} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k}x^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$ en notant à nouveau $u_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k}$ pour $k \geqslant 1$ et $u_0 = 1$. Comme $\forall x \in]-1;1[$, $(\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x}) = 1+x$, on a $\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k x^k\right) \times \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k x^k\right) = 1+x$ donc, par identification des coefficients d'une série entière de rayon strictement positif, on a $u_0^2 = u_0 = 1$, $2u_0u_1 = 1$ car $u_1 = 1$ (on le savait déjà) mais surtout $\forall n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = 0$. Ainsi, si on prend $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, par produit de CAUCHY, on a $\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k z^k\right) \times \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k z^k\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\right)z^n = 1+z$ (1) donc $f(z)^2 = 1+z$ en notant $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k z^k$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

De même, en notant $g(z) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k} k z^{k-1}$ pour $|z| < 1$, on a $\forall x \in]-1;1[$, $g(x) = f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ car $f(x) = \sqrt{1+x}$ donc $2f(x)g(x) = 1$. Comme avant, en passant par l'égalité des coefficients qui provient d'un produit de CAUCHY, on montre que $\forall |z| < 1$, $2f(z)g(z) = 1$. À nouveau, on traite les deux cas :

- Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$. D'après ce qui précède, $(B_n(D))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $D' = \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{pmatrix}$ et, en élevant au carré, il vient $D'^2 = \begin{pmatrix} f(a)^2 & 0 \\ 0 & f(b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1+b \end{pmatrix} = I_2 + D$ d'après (1). Ainsi, $B = \varphi(D') = PD'P^{-1}$, et on obtient bien la relation $B^2 = PD'^2P^{-1} = P(I_2+D)P^{-1} = I_2 + A$.
- Si A n'est pas diagonalisable, A est trigonalisable et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\alpha \neq 0$ donc $T = \lambda I_2 + N$ en posant $N = \alpha E_{1,2}$. On a vu qu'alors la suite $(B_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T' = f(\lambda)I_2 + g(\lambda)N$. À nouveau, $T'^2 = f(\lambda)^2 I_2 + 2f(\lambda)g(\lambda)N$ car $N^2 = 0$ donc $T'^2 = (1+\lambda)I_2 + N = I_2 + (\lambda I_2 + N) = I_2 + T'$. Comme avant, $B = \varphi(T') = PT'P^{-1}$, et on obtient bien la relation $B^2 = PT'^2P^{-1} = P(I_2+T')P^{-1} = I_2 + A$.

Dans les deux cas, la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = I_2 + A$.

4.77 **a.** Soit $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = f(x) - x$. Comme f est continue sur $[0;1]$, φ est aussi continue par opérations sur $[0;1]$. Or $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$ car $f(0) \in [0;1]$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car $f(1) \in [0;1]$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, comme $\varphi(0)\varphi(1) \leqslant 0$ et que φ est continue sur $[0;1]$, il existe un réel $\alpha \in [0;1]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, ce qui justifie que $\alpha \in A$ donc $A \neq \emptyset$.

A est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par 1 et minorée par 0. La propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ montre que A admet une borne supérieure $M \leqslant 1$ et une borne inférieure $m \geqslant 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n$ (R) et, en passant à la limite dans cette relation (R) et par caractérisation séquentielle de la continuité de f, on a $f(M) = M$. Ainsi, $M \in A$ et M majore A assure que M est le maximum de A. De même, m est le minimum de A.

b. Posons $h = f - g$, de sorte que h est continue sur $[0;1]$ par opérations. Comme $f \circ g = g \circ f$, en l'appliquant en M, on a $f(g(M)) = g(f(M)) = g(M)$ donc $g(M) \in A$ ce qui montre que $g(M) \leqslant M = \mathrm{Max}(A)$. Ainsi, $h(M) = f(M) - g(M) = M - g(M) \geqslant 0$. De même, $f(g(m)) = g(f(m)) = g(m)$ donc $g(m) \in A$ ce qui montre que $g(m) \geqslant m = \mathrm{Min}(A)$. Ainsi, $h(m) = f(m) - g(m) = m - g(m) \leqslant 0$. À nouveau, par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque h est continue sur $\widetilde{[m;M]}$ et $h(m)h(M) \leqslant 0$, il existe un réel $c \in \widetilde{[m;M]} \subset [0;1]$ tel que $h(c) = 0$, ce qui revient à $f(c) = g(c)$.

4.78 **a.** Comme $N^{k-1} \neq 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $N^{k-1}X \neq 0$. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{k-1}) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{C}^k$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{k-1} \lambda_i N^i X = 0$, posons $r = \mathrm{Min}(\{i \in [\![0;k-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}) \leqslant k-1$, alors $\sum\limits_{i=r} \lambda_i N^i X = 0$ donc $N^{k-r-1} \sum\limits_{i=r} \lambda_i N^i X = 0 = \lambda_r N^{k-1} X$ ce qui est absurde car $\lambda_r \neq 0$ et $N^{k-1}X \neq 0$. Par l'absurde, on a montré que $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{k-1}) = (0, \cdots, 0)$ si $\sum\limits_{i=0}^{k-1} \lambda_i N^i X = 0$. Ainsi, $(X, NX, \cdots, N^{k-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Comme une famille libre a moins de vecteurs que la dimension de l'espace qu'elle occupe, on a donc $k \leqslant n$.

b. D'après **a.**, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mathcal{B} = (X, NX, \cdots, N^{n-1}X)$ est libre donc c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ car $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})) = n$. La famille $\mathcal{B}' = (N^{n-1}X, \cdots, NX, X)$ est aussi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et, en notant u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à N, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = J_n$ par construction. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathcal{B}'$, on a $N = PJ_nP^{-1}$ par formule de changement de base. Ainsi, N est semblable à J_n.

c. D'après **a.**, il existe $k \leqslant n$ tel que $A^k = 0$ donc $A^n = 0$. De même, $B^n = 0$. Ainsi, d'après le binôme car A et B commutent, $(A+B)^{2n} = \sum\limits_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} A^j B^{2n-j}$. Pour $j \in [\![0;2n]\!]$, si $j \geqslant n$, on a $A^j = A^n A^{j-n} = 0$ et si $j \leqslant n$, $B^{2n-j} = B^n B^{n-j} = 0$. Ainsi, $(A+B)^{2n} = 0$ donc $A+B$ est nilpotente (et même $(A+B)^n = 0$ avec **a.**). De plus, $(I_n + A)\Big(\sum\limits_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^j\Big) = \Big(\sum\limits_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^j\Big) - \Big(\sum\limits_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^{j+1}\Big) = I_n + (-1)^n A^n = I_n$ par télescopage donc $I_n + A$ est inversible et $(I_n + A)^{-1} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^j$.

d. Posons $A = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{J_n^k}{k!}$ de sorte que $e^{J_n} = I_n + A$. Comme $A = J_n \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{J_n^{k-1}}{k!}$, en posant $K_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{J_n^{k-1}}{k!}$, on a $A = J_n K_n = K_n J_n$ donc $A^n = J_n^n K_n^n = 0$ car $J_n^n = 0$. D'après la question **c.**, $e^{J_n} = I_n + A$ est inversible.

e. Comme $J_n e^{J_n} = e^{J_n} J_n$, on a $(J_n e^{J_n})^n = J_n^n (e^{J_n})^n = 0$ donc J_n est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n. En prenant $X = E_1$, par définition de J_n, on a $J_n E_1 = E_2$, puis $J_n^2 E_1 = J_n E_2 = E_3$ et, par une récurrence facile, $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $J_n^k E_1 = E_{k+1}$. Ainsi, $J_n^{n-1} \neq 0$ donc J_n est nilpotente d'indice n. Comme on a $(J_n e^{J_n})^k = J_n^k (e^{J_n})^k$ pour $k < n$, que $(e^{J_n})^k$ est inversible d'après la question **d** et que $J_n^k \neq 0$, on a $(J_n e^{J_n})^k \neq 0$ donc $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'indice n.

f. Si $L_n = PJ_nP^{-1}$ et $S_m(L_n) = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{L_n^k}{k!}$ et $S_m(J_n) = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{J_n^k}{k!}$, on a classiquement $S_m(L_n) = PS_m(J_n)P^{-1}$. Comme $f : M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie donc continue, par caractérisation séquentielle de la continuité, on a $e^{L_n} = \lim\limits_{m \to +\infty} S_m(L_n) = \lim\limits_{m \to +\infty} f\big(S_m(J_n)\big) = f\big(\lim\limits_{m \to +\infty} S_m(J_n)\big) = f(e^{J_n}) = Pe^{J_n}P^{-1}$.

g. Comme $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'ordre n d'après la question **e.**, il existe une matrice inversible Q telle que $J_n e^{J_n} = Q^{-1}J_nQ$ d'après **b.**. Ainsi, $J_n = Q^{-1}(J_n e^{J_n})Q$. Si on note $P = Q^{-1}$, on a $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $J_n = PJ_nP^{-1}Pe^{J_n}P^{-1} = PJ_nP^{-1}e^{PJ_nP^{-1}}$ d'après **f.**. En posant $\tilde{N} = PJ_nP^{-1}$, on a donc $\tilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n = \tilde{N}e^{\tilde{N}}$ et $\tilde{N}$ est nilpotente d'indice n.

4.79 **a.** Les matrices $-I_n$ et I_n sont orthogonales et pourtant $[-I_n; I_n] \not\subset O(n)$ car la matrice nulle 0_n n'est pas orthogonale et $O_n \in [-I_n; I_n]$ car $O_n = \frac{1}{2}.I_n + \frac{1}{2}(-I_n)$ avec $\frac{1}{2} \in [0;1]$ et $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.
On en déduit que $O(n)$ n'est pas convexe.

b. Considérons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ normé par la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^TB)$. C'est un choix mais tous les choix se valent car toutes les normes sont équivalentes puisqu'on est en dimension finie.
Pour toute matrice $M \in O(n)$, on a $M^TM = I_n$ donc $||M||^2 = \mathrm{Tr}\,(M^TM) = \mathrm{Tr}\,(I_n) = n$ et $||M|| = \sqrt{n}$ donc $O(n)$ est inclus dans la sphère de centre O_n et de rayon $\sqrt{n}$, ce qui prouve déjà que $O(n)$ est borné.
Soit une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in O(n)^{\mathbb{N}}$ de matrices orthogonales qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice M. On a donc $\forall k \in \mathbb{N},\ M_k^TM_k = I_n$. $\varphi : A \mapsto (A^T, A)$ et $\psi : (A,B) \mapsto AB$ sont respectivement linéaires et bilinéaires en dimension finie donc continues d'où $f = \psi \circ \varphi : A \mapsto A^TA$ est continue par composition. Par caractérisation séquentielle de la continuité, la suite $(f(M_k))_{k\geqslant 0}$ converge vers $f(M)$ mais cette suite est constante et vaut I_n donc $f(M) = M^TM = I_n$ d'où $M \in O(n)$. Ainsi, $O(n)$ est fermé.

c. Soit $v_1 = \frac{1}{3}(2,1,2)$, $v_2 = \frac{1}{3}(2,-2,-1)$, $v_3 = \frac{1}{3}(1,2,-2)$ les vecteurs dont les coordonnées sont dans les colonnes de A. Comme $(v_1|v_2) = \frac{1}{9}(4-2-2) = (v_1|v_3) = \frac{1}{9}(2+2-4) = (v_2|v_3) = \frac{1}{9}(2-4+2) = 0$ et que $||v_1||^2 = ||v_2||^2 = ||v_3||^2 = \frac{1}{9}(4+4+1) = 1$, (v_1,v_2,v_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ donc $A \in O(3)$. De plus, $\det(A) = \frac{1}{27}(8+8-1+4+4+4) = 1$ donc $A \in SO(3)$. Comme A n'est pas symétrique, A représente une "vraie" rotation d'angle $\theta \in]0;2\pi[$ tel que $\mathrm{Tr}\,(A) = 1 + 2\cos(\theta) = -\frac{2}{3}$ donc $\theta = \pm\,\mathrm{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$. Comme $A - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système $AX = X$ équivaut à $\begin{cases} -x+2y+z &= 0\ (1) \\ x-5y+2z &= 0\ (2) \\ 2x-y-5z &= 0\ (3) \end{cases}$. En faisant $(2) \longleftarrow (2)+(1)$ et $(3) \longleftarrow (3)+2(1)$, on a $AX = X \iff \begin{cases} -x+2y+z &= 0\ (1) \\ -3y+3z &= 0\ (2') \\ 3y-3z &= 0\ (3') \end{cases}$. Par conséquent, on a $AX = X \iff (x = 3z,\ y = z)$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (3,1,1)$. Prenons $v = (1,0,0)$, alors u et v ne sont pas colinéaires et on sait que $\sin(\theta)$ est du signe de $[v, Av, u] = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$ donc $\sin(\theta) < 0$.
Ainsi, A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\theta = -\,\mathrm{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right) \sim -146,4^{\circ}$ autour de l'axe orienté par le vecteur $u = (3,1,1)$.

4.80 **a.** L'application Φ est bien définie et elle est linéaire car si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(P,Q) \in \mathbb{C}_n[X]$, on a la relation $\Phi(\lambda P + Q) = \big((\lambda P+Q)(a_0), \cdots, (\lambda P+Q)(a_n)\big) = \big(\lambda P(a_0) + Q(a_0), \cdots, \lambda P(a_n) + Q(a_n)\big)$ qui se transforme en $\Phi(\lambda P + Q) = \lambda\big(P(a_0), \cdots, P(a_n)\big) + \big(Q(a_0), \cdots, Q(a_n)\big) = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$.
De plus, si $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, on a $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $P(a_k) = 0$ donc P admet $n+1$ racines distinctes alors que $\deg(P) \leqslant n$. On sait qu'alors $P = 0$. Ainsi, Φ est injective donc, comme $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = \dim(\mathbb{C}^{n+1}) = n+1$, Φ est un

isomorphisme, en particulier c'est une bijection.

b. Pour $i \in [\![0;n]\!]$, soit le vecteur e_{i+1}tvi de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, puisque Φ est une bijection, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\Phi(L_i) = e_{i+1}$, il s'agit de $L_i = \Phi^{-1}(e_{i+1})$. Par définition de Φ, on a $\Phi(L_i) = (L_i(a_0), \cdots, L_i(a_n)) = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ donc $L_i(a_i) = 1$ et $\forall j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\},\ L_i(a_j) = 0$.

D'après le cours, on a même $L_i = \prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \dfrac{X-a_j}{a_i-a_j}$ (polynômes de LAGRANGE).

c. Comme $\chi_M \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\Phi(\chi_M) = \big(\chi_M(a_0), \cdots, \chi_M(a_n)\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)e_{k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)\Phi(L_k)$, par linéarité et bijectivité de Φ, on a $\Phi(\chi_M) = \Phi\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)L_k\Big)$ donc $\chi_M = \sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)L_k$.

d. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'application $f_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $f_k(M) = \chi_M(a_k) = \det(a_kI_n - M)$ est continue car polynomiale en les coefficients de M. Plus précisément, $f_k = \det \circ g_k$ avec $g_k : M \mapsto a_kI_n - M$ qui est continue car 1-lipschitzienne puisque $||g_k(M) - g_k(N)|| = ||M - N||$.

Or, d'après **c.**, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(M) = \chi_M = \sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)L_k$ donc $f = \sum\limits_{k=0}^{n} f_kL_k$ est continue en tant que somme de fonctions continues. En effet, $h_k : M \mapsto \chi_M(a_k)L_k$ est la composée de la fonction f_k et de la fonction $h_k : z \mapsto zL_k$ qui est linéaire donc continue (en dimension finie).

e. Considérons deux cas :

- Si A est inversible, alors $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables. Directement, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- Si A n'est inversible, comme χ_A n'admet qu'un nombre fini de racines car $\deg(\chi_A) = n$, la matrice A n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, puisque $A - \dfrac{I_n}{p}$ n'est pas inversible si et seulement $\dfrac{1}{p}$ est valeur propre de A, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p \geqslant p_0,\ A_p = A - \dfrac{I_n}{p} \in GL_n(\mathbb{C})$. D'après le premier cas, comme $A_pB = AB - \dfrac{B}{p} = BA_p$, on en déduit que $\chi_{A_pB} = \chi_{BA_p}$. Comme les deux applications $\varphi_B : M \mapsto MB$ et $\psi_B : M \mapsto BM$ sont linéaires en dimension finie, elles sont continues donc, puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = A$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \varphi_B(A_p) = \varphi_B(A)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \psi_B(A_p) = \psi_B(A)$ par caractérisation séquentielle de la continuité. Ainsi, $\lim\limits_{p\to+\infty} A_pB = AB$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} BA_p = BA$. Par conséquent, comme f est continue, il vient $\lim\limits_{p\to+\infty} f(A_pB) = f(AB)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} f(BA_p) = f(BA)$. Pour $p \geqslant p_0$, $f(A_pB) = f(BA_p)$ d'après ce qui précède, donc $f(AB) = f(BA) = \lim\limits_{p\to+\infty} f(A_pB) = \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Dans les deux cas, on a bien le résultat attendu, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

4.81 Par définition, même si ce n'est plus au programme depuis 2021, $\overset{\circ}{X}$ est la partie de E qui est composée des points intérieurs à X.

a. • Soit $x \in \overset{\circ}{X}$, par définition $\exists r > 0,\ B(x, r) \subset X$. Mais comme $x \in B(x, r)$, on a $x \in X$. Ainsi, $\overset{\circ}{X} \subset X$.

• Soit $x \in X$, pour tout réel $r > 0$, $B(x, r) \cap X \neq \emptyset$ car $x \in B(x, r) \cap X$. Ainsi, x est adhérent à X donc $x \in \overline{X}$. Par conséquent, $X \subset \overline{X}$.

b. • Soit $(a, b) \in (\overset{\circ}{C})^2$, montrons que $[a; b] \subset \overset{\circ}{C}$. Par définition, il existe deux réels $r_a > 0$ et $r_b > 0$ tels que $B(a, r_a) \subset C$ et $B(b, r_b) \subset C$. Posons alors $r = \mathrm{Min}(r_a, r_b) > 0$. Soit $\lambda \in [0; 1]$, posons $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ et montrons que c est intérieur à C. Soit $x \in B(c, r_c)$, posons $y = x - c$ de sorte que $||y|| < r_c$ donc $||y|| < r_a$ et $||y|| < r_b$ ce qui montre que $a + y \in B(a, r_a)$ et $b + y \in B(b, r_b)$. Comme $B(a, r_a) \subset$ et $B(b, r_b) \subset C$, on a donc

$(a+y,b+y) \in C^2$ donc, par convexité de C, $\lambda(a+y)+(1-\lambda)(b+y) \in C$. Or, $\lambda(a+y)+(1-\lambda)(b+y) = c+y$ donc $c+y \in C$. On en déduit que $B(c,r_c) \subset C$ donc $c \in \overset{\circ}{C}$ donc $[a;b] \subset \overset{\circ}{C}$. Par conséquent, $\overset{\circ}{C}$ est un convexe.

• <u>Méthode 1</u> : soit $(a,b) \in (\overline{C})^2$, montrons que $[a;b] \subset \overline{C}$. Par définition, pour tout réel $r > 0$, $B(a,r) \cap C \neq \emptyset$ et $B(b,r) \cap C \neq \emptyset$ de sorte qu'il existe deux vecteurs $x \in B(a,r) \cap C$ et $y \in B(b,r) \cap C$. Soit $\lambda \in [0;1]$, posons $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, alors $||c-z|| = ||\lambda(a-x)+(1-\lambda)(b-y)|| \leqslant |\lambda|\,||a-x||+|1-\lambda|\,||b-y||$ donc, comme $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$, on a $||c-z|| < \lambda r + (1-\lambda)r = r$ donc $z \in B(c,r)$ car $\lambda > 0$ ou $1-\lambda > 0$. Or $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ donc $z \in C$ car $(x,y) \in C^2$ et que C est convexe, ce qui prouve que $B(c,r) \cap C \neq \emptyset$ donc $c \in \overline{C}$. Par conséquent, $[a;b] \subset \overline{C}$ et $\overline{C}$ est un convexe.

<u>Méthode 2</u> : soit $(a,b) \in (\overline{C})^2$, montrons que $[a;b] \subset \overline{C}$. Par caractérisation séquentielle des points adhérents, il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Soit $\lambda \in [0;1]$ et $c = \lambda a + (1-\lambda)b$, par opération sur les suites de vecteurs, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda a_n + (1-\lambda)b_n) = \lambda a + (1-\lambda)b = c$. Mais $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \lambda a_n + (1-\lambda)b_n \in C$ car C est convexe donc c est la limite d'une suite de vecteurs de C ce qui prouve que $c \in \overline{C}$. Par conséquent, $\overline{C}$ est convexe.

4.82 **a.** E est non vide car $0 \in E$ et, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in E^2$, la fonction $\lambda f + g$ est de classe C^1 sur $[0;1]$par opérations et $(\lambda f+g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda.0 + 0 = 0$ donc $\lambda f + g \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $C^1([0;1],\mathbb{R})$ donc est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

<u>Homogénéité</u> : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, comme la norme infinie $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme sur $C^0([0;1],\mathbb{R})$ d'après le cours, donc a fortiori sur E qui en est un sous-espace vectoriel, par linéarité de la dérivation, on a $N_1(\lambda f) = ||\lambda f + (\lambda f)'||_\infty = ||\lambda(f+f')||_\infty = |\lambda|\,||f+f'||_\infty = |\lambda|\,N_1(f)$.

De même, $N_2(\lambda f) = ||(\lambda f)'||_\infty = ||\lambda f'||_\infty = |\lambda|\,||f'||_\infty = |\lambda|\,N_2(f)$.

<u>Inégalité triangulaire</u> : soit $(f,g) \in E^2$, par linéarité de la dérivation et car $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme sur E, $N_1(f+g) = ||(f+g)+(f+g)'||_\infty = ||f+g+f'+g'||_\infty = ||(f+f')+(g+g')||_\infty \leqslant ||f'||_\infty + ||g'||_\infty = N_1(f)+N_1(g)$.

De même, $N_2(f+g) = ||(f+g)'||_\infty = ||f'+g'||_\infty \leqslant ||f'||_\infty + ||g'||_\infty = N_2(f)+N_2(g)$.

<u>Séparation pour N_1</u> : soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$, alors $f'+f = 0$ car $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme. On sait résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle $[0;1]$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = Ce^{-x}$. Mais $f \in E$ donc $f(0) = C = 0$ et on a bien $f = 0$.

<u>Séparation pour N_2</u> : soit $f \in E$ telle que $N_2(f) = 0$, alors $f' = 0$ car $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme. Comme $[0;1]$ est un intervalle, $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0;1],\ f(x) = C$. Mais $f \in E$ donc $f(0) = C = 0$ et on a bien $f = 0$.

Les deux applications N_1 et N_2 sont donc bien des normes sur E.

b. <u>Domination de N_2 par N_1</u> : soit $f \in E$, posons $g = f + f'$. On sait résoudre l'équation homogène $(E_0)\ :\ y'+y = 0$ dont les solutions sur l'intervalle $[0;1]$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve classiquement que les solutions de $(E)\ : y'+y = g$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or f est solution de cette équation mais vérifie aussi $f(0) = 0$ car $f \in E$ donc $\lambda = 0$ et $\forall x \in [0;1],\ f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt$ donc $f'(x) = g(x) - f(x) = g(x) - e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt$. Ainsi, comme $\forall x \in [0;1],\ |g(x)| \leqslant N_1(f)$ et qu'on a $|f'(x)| \leqslant |g(x)| + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t|g(t)|dt$ par inégalité triangulaire, on trouve $|f'(x)| \leqslant \left(1 + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t dt\right)N_1(f) = (2-e^{-x})N_1(f) \leqslant 2N_1(f)$. Ainsi, $N_2(f) \leqslant 2N_1(f)$.

Domination de N_1 par N_2 : soit $f \in E$ et $x \in [0;1]$, alors $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$ d'où, par inégalité triangulaire, la majoration $|f(x)| \leqslant \int_0^x |f'(t)|dt \leqslant xN_2(f) \leqslant N_2(f)$. De plus, $|(f+f')(x)| = |f(x)+f'(x)| \leqslant |f(x)|+|f'(x)|$ par inégalité triangulaire donc $|(f+f')(x)| \leqslant 2N_2(f)$ car $|f'(x)| \leqslant N_2(f)$. Par conséquent, on a $N_1(f) \leqslant 2N_2(f)$. Par définition, comme N_1 domine N_2 et N_2 domine N_1, les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

4.7 Officiel de la Taupe

4.83 Supposons par exemple $\mu > 0$ (sinon on remplace f par $-f$). Alors : $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in]0;\alpha[,\ xf'(x) > \frac{\alpha}{2}$ grâce à la limite. On aurait : $\forall x \in]0;\alpha[,\ f(x) = f(\alpha) + \int_\alpha^x f'(t)dt \geqslant f(\alpha) + \int_\alpha^x \frac{\mu dt}{2t} = f(\alpha) - \frac{\mu}{2}\ln(\alpha) + \frac{\mu}{2}\ln(x)$. En faisant tendre x vers 0^+ dans cette inégalité, on a par encadrement : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ce qui contredit l'énoncé. Fin du raisonnement par l'absurde : $\mu = 0$.
On peut très bien ne pas avoir de limite pour $xf'(x)$ quand x tend vers 0^+ avec les autres hypothèses. Par exemple si $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, alors f est dérivable sur $]0;1[$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lambda$. On a même f ainsi prolongée par $f(0) = 0$ qui est dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 = f'(0)$ mais on n'a pas de limite finie pour $xf'(x)$ car $xf'(x) = 2x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ qui oscille entre 1 et -1 au voisinage de 0.

4.84 f est continue donc les intégrales existent.
Comme f est convexe : $\forall r \in I,\ \forall r \geqslant 0,\ \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda(a-r)+(1-\lambda)(a+r)) \leqslant \lambda f(a-r)+(1-\lambda)f(a+r)$.
Géométriquement, si la fonction f était supposée dérivable, on écrirait que la courbe est au-dessus de sa tangente en a : $f(t) \geqslant f(a)+(t-a)f'(a)$; et on aurait directement le résultat en intégrant cette inégalité.
Sans cette hypothèse, il convient de lier les points t à gauche de a à ceux qui sont à droite. On va donc couper l'intégrale en 2 et faire des changements de variables pour avoir une somme de valeurs prises par la fonction f.
Ainsi : $\int_{a-r}^{a+r} f(t)dt = \int_{a-r}^{a} f(t)dt + \int_a^{a+r} f(t)dt$ et on pose $t = a-ru$ dans la première intégrale et $t = a+ru$ dans la seconde pour avoir (les justifications sont claires) : $\int_{a-r}^{a+r} f(t)dt = r\int_0^1 \big(f(a-ru)+f(a+ru)\big)du$. Or $f(a) = f\Big(\frac{1}{2}(a-r)+\frac{1}{2}(a+r)\Big) \leqslant \frac{1}{2}\big(f(a-ru)+f(a+ru)\big)$ par convexité donc $\int_{a-r}^{a+r} f(t)dt \geqslant 2r\int_0^1 f(a)du = 2rf(a)$.
Si f est de classe C^2 et $f''(a) < 0$, la fonction g est de classe C^3 sur I et vérifie $g'(x) = f(a+x)+f(a-x)-2f(a)$, $g''(x) = f'(a+x)-f'(a-x)$ et $g'''(x) = f''(a+x)+f''(a-x)$.
Par Taylor-Young : $g(x) \underset{0}{=} g(a)+xg'(a)+\frac{x^2}{2}g''(a)+\frac{x^3}{6}g'''(a)+o(x^3)$ donc $g(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}f''(a)$ qui est localement strictement négatif quand $x \to 0^+$. Il existe donc des $r > 0$ telles que $g(r) < 0$ ce qui contredit la propriété.
Conclusion : si f est de classe C^2, comme on sait que f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur I, on a une nouvelle caractérisation : f est convexe $\Longleftrightarrow \Big(\forall a \in I,\ \forall r \in \mathbb{R}_+,\ [a-r;a+r] \subset I \Longrightarrow \int_{a-r}^{a+r} f(t)dt \geqslant 2rf(a)\Big)$.

4.85 **a.** Il est classique qu'une application lipschitzienne est continue (même uniformément pour les ex-MPSI).
Soit f, g lipschitziennes avec des constantes k et k' et $\alpha \in \mathbb{R}$ un scalaire, alors par inégalité triangulaire, on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |(\alpha f+g)(x)-(\alpha f+g)(y)| = |\alpha f(x)-\alpha f(y)+g(x)-g(y)| \leqslant |\alpha|k|x-y|+k'|x-y|$ donc $\alpha f+g$ est aussi lipschitziennes associées à la constante $|\alpha|k+k'$. Comme la fonction nulle est lipschitzienne (constante 0), alors l'ensemble des fonctions lipschitziennes est bien le sous-espace espéré.
b. Montrer que F est un sous-espace est extrêmement classique ! $G = \mathrm{Vect}(1)$ (les fonctions constantes) est assez clairement un supplémentaire de F avec la décomposition $f = f - f(0) + f(0)$ ($f(0)$ signifie ici la fonction constante) et la fonction g est toujours lipschitzienne (même constante que celle de f) et elle s'annule en 0.

c. L'application g est bien définie en fonction de f et ϕ est clairement linéaire. Si f est k-lipschitzienne, alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x)-g(y)| = |f(x)-f(y)-f(tx)+f(ty)| \leqslant k|x-y|+k|tx-ty| \leqslant (1+t)k|x-y|$ donc g est aussi lipschitzienne. De plus $g(x) = f(0)-f(0) = 0$ donc ϕ est bien en endomorphisme de F.
Si $f \in F$ et $\phi(f) = 0$, alors pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $\phi(f)(x) = 0$ donc $f(x) = f(tx) = f(t^2x) = \cdots$ ce qui donne par une récurrence simple : $\forall k \in \mathbb{N},\ f(t^kx) = f(x)$. Or $\lim\limits_{k\to+\infty} t^kx = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{k\to+\infty} f(t^kx) = f(0) = 0 = f(x)$ (suite constante). Ainsi $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$: ϕ est injective.

d. Par télescopage, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(t^kx) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(f(t^kx)-f(t^{k+1}x)\big) = f(x)-f(t^nx)$. À nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t^nx) = f(0) = 0$ donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on a la convergence de la série et sa somme : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g(t^kx)$.
Réciproquement, g k-lipschitzienne étant fixée dans F, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} g(t^nx)$ est absolument convergente car $|g(t^nx)| \leqslant kt^n|x|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} kt^nx$ converge car $0 < t < 1$. Ainsi $f : x \to \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g(t^nx)$ est bien définie, elle vérifie clairement $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x)-f(tx)$ par télescopage et car $\lim\limits_{n\to+\infty} g(t^nx) = g(0) = 0$. Il reste néanmoins à vérifier que f appartient bien à F. Or il est clair que $f(0) = 0$ car $g(0) = 0$. De plus, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x)-f(y)| = \Big|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g(t^nx) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g(t^ny)\Big| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |g(t^nx)-g(t^ny)| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} kt^n|x-y| = \dfrac{k}{1-t}|x-y|$ donc $f \in F$ et $g = \phi(f)$. On en déduit que ϕ est aussi surjective : ϕ est un automorphisme de F.

e. L'équation se traduit par $\phi^2(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = h$. Or $h \in F$ et comme, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi^{-1}(h)(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^nx = \dfrac{x}{1-t}$ donc $\phi^{-1}(h) = \dfrac{1}{1-t}h$. Comme ϕ est bijective, il existe une unique solution dans F et comme $\dfrac{h}{(1-t)^2}$ en est une, l'unique solution de cette équation est $\dfrac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}{(1-t)^2}$.

4.86 Si $p = 0$ ou $p = 1$, la propriété $\Big(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ |x^p-y^p| \leqslant |x-y|^p\Big)$ est évidente (car $0^0 = 1$).
Si $p > 1$, prenons $x = 1$ et $y = 2$, alors comme $2^p > 2$, on a $|x^p-y^p| = 2^p-1 > 1 = |x-y|^p$.
Si $p \in]0;1[$, il s'agit de montrer que pour $0 < x < y$, on a $y^p-x^p \leqslant (y-x)^p \Longleftrightarrow \left(\dfrac{y}{x}\right)^p - 1 \leqslant \left(\dfrac{y}{x}-1\right)^p$ (on peut sans perte de généralité supposer que $x < y$). On peut sûrement se servir de la concavité de la fonction $u \to u^p$ (dérivée seconde négative) mais il suffit de montrer : $\forall t > 1,\ t^p-1 \leqslant (t-1)^p$ ($t = \dfrac{y}{x}$ ci-dessus).
Posons donc la fonction $\varphi :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(t) = (t-1)^p - t^p + 1$. Il est clair que φ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que $\lim\limits_{t\to1^+} \varphi(t) = 0$ (car $p > 0$) donc φ se prolonge par continuité par $\varphi(1) = 0$. Comme $\varphi'(t) = p(t-1)^{p-1} - pt^{p-1} > 0$ car $p-1 < 0$ et $t-1 < t$, on a φ croissante sur $[1;+\infty[$ donc elle y est positive car $\varphi(1) = 0$. Ainsi, on a bien $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ |x^p-y^p| \leqslant |x-y|^p$ si $p \in]0;1[$.
Si $p < 0$, en imposant de même que $0 < x < y$ et en posant $t = \dfrac{y}{x}$, on se ramène à prouver que la fonction $\psi : t \mapsto (t-1)^p + t^p - 1$ est positive sur $]1;+\infty[$ ce qui est clairement faux puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = -1$.
Ainsi, on a prouvé que : $\Big(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ |x^p-y^p| \leqslant |x-y|^p\Big) \Longleftrightarrow p \in [0;1]$.

4.87 Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, on a $f([x;y]) = [u;v]$ avec $v-u = y-x$.
Ainsi $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|$ donc f est 1-lipschitzienne d'où f est continue.
De plus, s'il existait deux réels a et b distincts (disons $a < b$) tels que $f(a) = f(b)$, comme $f([a;b]) = [c;d]$ avec $d-c = b-a$, en utilisant le fait que f est continue sur le segment $[a;b]$, il existerait $u \in [a;b]$ et $v \in [a;b]$ tels que $f(u) = c$ et $f(v) = d$. Mais comme on ne peut pas avoir $(u,v) = (a,b)$ ou $(u,v) = (b,a)$, on a forcément $|v-u| < b-a$. Mais $[c;d] \subset f(\widetilde{[u;v]})$ par le TVI et $f(\widetilde{[u;v]}) \subset [c;d]$ par croissance de l'image directe donc $f(\widetilde{[u;v]}) = [c;d]$ est un segment de longueur $b-a$ alors que $\widetilde{[u;v]}$ est un segment de strictement inférieure : ce ne se peut ! On en conclut que f est injective donc strictement monotone car elle est continue.

• Si f est strictement croissante : pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, $f([x;y]) = [f(x);f(y)] \Longrightarrow f(y) - f(x) = y - x$ par hypothèse et la fonction $h : t \mapsto f(t) - t$ est constante sur $\mathbb{R}$ donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t + k$.
• Par le même raisonnement, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = k - t$ si f est strictement décroissante.

4.88 **a.** D'abord, E est bien un espace vectoriel car c'est un sous-espace vectoriel (classique) de $C^2([0;1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, la fonction $f'' + 2f' + f$ est continue sur le segment $[0;1]$ ainsi $N(f) = \underset{[0;1]}{\mathrm{Max}}|f'' + 2f' + f|$ existe.
Comme $||.||_{\infty,[0;1]}$ est elle-même une norme, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont aussi vérifiées pour N. Soit une fonction $f \in E$ telle que $N(f) = 0$, alors $\forall t \in [0;1],\ f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0$. Les solutions sur $[0;1]$ de $y'' + 2y' + y = 0$ sont les fonctions $y : t \mapsto (\alpha + \beta t)e^{-t}$ mais $f(0) = f'(0) = 0$ implique $\alpha = \beta = 0$ (problème de CAUCHY). Par conséquent $f = 0$ comme attendu. Alors, N est bien une norme sur E.
b. La fonction h ainsi définie est bien de classe C^2 par produit donc $\int_0^t (t-u)h''(u)du$ est bien définie si $t \in [0;1]$. En posant $a : u \mapsto t - u$ et $b = h'$, a et b sont C^1 sur $[0;t]$ donc, comme $h(0) = h'(0) = 0$ puisque $f \in E$ (calculs), on a $\int_0^t (t-u)h''(u)du = [(t-u)h'(u)]0^t + \int_0^t h'(u)du = [(t-u)h'(u) + h(u)]_0^t = h(t)$. Ou par TAYLOR reste intégral $h(t) = h(0) + th'(0) + \int_0^t (t-u)h''(u)du$ puisque h est de classe C^2 sur $[0;t]$.
c. On en déduit que $\forall t \in [0;1],\ f(t) = e^{-t}\int_0^t (t-u)h''(u)du = \int_0^t (t-u)(f''(u) + 2f'(u) + f(u))e^{u-t}du$ par LEIBNIZ donc, par inégalité de la moyenne, on a $|f(t)| \leqslant N(f)\int_0^t (t-u)e^{u-t}du$. On pose $v = t - u$ dans cette intégrale et on obtient $|f(t)| \leqslant N(f)\int_0^t ve^{-v}dv = N(f)[1 - (1+v)e^{-v}]_0^t = N(f)(1 - (1+t)e^{-t})$. Or la fonction $g : t \mapsto 1 - (1+t)e^{-t}$ est dérivable et croissante sur $[0;1]$ car sa dérivée vaut $g' : t \mapsto te^{-t} \geqslant 0$ donc $\underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Max}}\ g(t) = g(1) = 1 - 2e^{-1}$. Ainsi, $||f||_{\infty,[0;1]} \leqslant (1 - 2e^{-1})N(f)$ donc $a = 1 - 2e^{-1} \sim 0,27$ convient.
Comme $g \in E$ car $g(0) = g'(0) = 0$, en prenant $f = g$, on a $N(g) = 1$ car les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ sont les $t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-t}$ d'où $g'' + 2g' + g = 1$. De plus, g est maximale en 1 sur $[0;1]$ (déjà vu) donc $||g||_\infty = a = 1 - 2e^{-1}$ donc a est minimal ; si $b < a$, on n'a pas $\forall f \in E,\ ||f||_{\infty,[0;1]} \leqslant bN(f)$ car cela serait faux pour $f = g$. Ainsi, la plus petite constante $\alpha > 0$ telle que $\forall f \in E,\ ||f||_{\infty,[0;1]} \leqslant \alpha N(f)$ est $a = 1 - 2e^{-1}$.
De plus, si $f_n : t \mapsto t^n$, alors $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n(1) = 1$ alors que $f_n'' + 2f_n' + f_n$ est croissante sur $[0;1]$ car $f_n'''(t) + 2f_n''(t) + f_n'(t) = n(n-1)(n-2)t^{n-3} + 2n(n-1)t^{n-2} + nt^{n-1} > 0$ si $t \in]0;1]$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N(f_n)}{||f_n||_{\infty,[0;1]}} = +\infty$ car $N(f_n) = f_n''(1) + 2f_n'(1) + f_n(1) = n^2 + n + 1$. Ainsi, $||.||_{\infty,[0;1]}$ ne domine pas N.

4.89 Si $x = 0$ ou $y = 0$, cette inégalité est évidente car elle se ramène à $|y|^p \leqslant |y|^p$ ou $|x|^p \leqslant |x|^p$. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on peut diviser par x et ceci se ramène à $|1+t|^p \leqslant 1 + |t|^p$ en posant $t = \dfrac{y}{x}$. Or si x et y sont de signes opposés, ceci est évident car alors $t < 0$ et $|1+t|^p \leqslant 1$ si $|t| \leqslant 1$ et $|1+t|^p \leqslant |t|^p$ si $|t| \geqslant 1$. Il ne reste que le cas où x et y sont non nuls et de même signe, et dans ce cas $t > 0$. On pose la fonction $h_p : t \mapsto (1+t)^p - 1 - t^p$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Or h_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h_p'(t) = p(1+t)^{p-1} - pt^{p-1} \leqslant 0$ donc h_p est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (par continuité en 0). Comme $h_p(0) = 0$, la fonction h_p est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a donc $\forall t \geqslant 0,\ (1+t)^p \leqslant 1 + t^p$ ce qui justifie le dernier cas. Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y|^p \leqslant |x|^p + |y|^p$.
L'application $x \mapsto |x|^p$ n'est pas une norme pour $0 < p < 1$ car elle ne vérifie pas l'homogénéité, en effet, si $0 < p < 1$ et $x > 0$, $N(2x) = 2^p x^p \neq 2x^p = 2N(x)$ car $2 \neq 2^p$.

4.90 Soit $a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a:b[$, alors il existe un réel $t \in]a;b[$ tel que

$f'(t) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Cela signifie qu'il existe un instant t dans $]a;b[$ tel que la vitesse instantanée $f'(t)$ soit égale à la vitesse moyenne de f sur le segment $[a;b]$ (interprétation cinématique). Cela signifie aussi qu'il existe un instant $t \in]a;b[$ tel que la tangente en $M(t, f(t))$ à la courbe Γ de f soit parallèle à la droite (la corde) qui relie les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ (interprétation géométrique).
Supposons f dérivable sur un intervalle I et f' bornée. En notant $M = \operatorname{Sup}_{t \in I} |f'(t)|$ (qui existe par hypothèse si on suppose I non vide), alors si $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, comme f est dérivable sur $[a;b]$ par hypothèse, on a $\exists t \in]a;b[\subset I,\ f(b) - f(a) = f'(t)(b - a)$ donc $|f(b) - f(a)| = |f'(t)|(b - a) \leqslant M(b - a) = M|b - a|$.
Ainsi f est M-lipschitzienne sur I donc lipschitzienne sur I.