TD 22 : TOPOLOGIE ET CONTINUITÉ

PSI 1 2024-2025 **vendredi 21 mars 2025**

22.1 **a.** Si $f \in E$, par composition et somme, la fonction $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ est aussi continue sur $[0;1]$ car $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ envoient $[0;1]$ dans $[0;1]$ donc l'application T va bien de E dans E. Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $x \in [0;1]$, on a $T(\lambda f+g)(x) = (\lambda f+g)\left(\frac{x}{2}\right)+(\lambda f+g)f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \lambda\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)$ donc $T(\lambda f+g)(x) = \lambda T(f)(x)+T(g)(x)$ et on en déduit donc que $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$ ce qui montre la linéarité de T : T est donc un endomorphisme de E.

Soit $x \in [0;1]$ et $f \in E$, alors $|T(f)(x)| = \left|f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leqslant ||f||_\infty+||f||_\infty = 2||f||_\infty$. En passant à la borne supérieure, on en déduit que $||T(f)||_\infty \leqslant 2||f||_\infty$. Ainsi, si $(f,g) \in E^2$, par linéarité de T et ce qui précède, on a $||T(f)-T(g)||_\infty = ||T(f-g)||_\infty \leqslant 2||f-g||_\infty$. Ceci prouve que T est 2-lipschitzienne donc continue sur E. La constante $\alpha = 2$ convient dans l'inégalité $\forall f \in E,\ ||T(f)||_\infty \leqslant \alpha||f||_\infty$. Autrement dit, $|||T||| = \underset{f\in E,\ f\neq 0}{\text{Sup}} \frac{||T(f)||_\infty}{||f||_\infty} \leqslant 2$ (norme subordonnée). Si on prend pour u la fonction constante égale à 1, alors $T(u) = 2u$ est constante égale à 2 donc $\alpha = 2$ est optimale (en fait minimale). En effet, si on avait $\forall f \in E,\ ||T(f)||_\infty \leqslant \beta||f||_\infty$ avec $\beta < 2$, comme $u \in E$, on aurait $2 = ||T(u)||_\infty \leqslant \beta||u||_\infty = \beta$ ce qui est absurde. Ainsi, $\alpha = 2$ est la plus petite constante telle que $\forall f \in E,\ ||T(f)||_\infty \leqslant \alpha||f||_\infty$: $|||T||| = 2$.

b. Comme $|f|$ est continue sur le segment $[0;1]$, par le théorème des bornes atteintes, il existe $c \in [0;1]$ tel que $|f(c)| = ||f||_\infty$; c ne peut pas être nul car f est non nulle donc $||f||_\infty > 0$ alors que $f(0) = 0$ par hypothèse. Posons $A = \{x \in [0;1],\ |f(x)| = ||f||_\infty\}$. Alors $A \subset]0;1]$, $A \neq \emptyset$ car $c \in A$ et A est minoré par 0. On peut donc poser $x_0 = \text{Inf}(A) \in [0;1]$. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers x_0, alors comme $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(a_n)| = ||f||_\infty$, en passant à la limite, on obtient par continuité de f la relation $|f(x_0)| = ||f||_\infty$ ce qui montre que $x_0 > 0$ car $|f(0)| = 0 < ||f||_\infty$. Soit $x \in]0;x_0]$, alors $x \notin A$ car $x < \text{inf}(A)$ donc $|f(x)| \neq ||f||_\infty$. Mais comme on a $|f(x)| \leqslant ||f||_\infty$ par définition de la norme infinie, on en déduit qu'on a bien $|f(x)| < ||f||_\infty$.

c. On a vu en **a.** que u est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. La question est donc de montrer que $E_1(T) = \text{Vect}(u)$. Soit g un vecteur propre de T associé à la valeur propre 2, alors $T(g) = 2g$. Posons $f = g-g(0)u$. Comme $E_2(T)$ est un sous-espace vectoriel de E, $f \in E_2(T)$ de sorte que $T(f) = 2f$. Supposons que f n'est pas la fonction nulle, d'après la question précédente, $\exists x_0 \in]0;1],\ \forall x \in [0;x_0[,\ |f(x)| < |f(x_0)| = ||f||_\infty$. Comme $\frac{x_0}{2} \in [0;x_0[$, on a $\left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| < |f(x_0)|$ et, par définition de la norme infinie, $\left|f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right| \leqslant |f(x_0)|$. On a donc $\left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)+f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right| < 2f(x_0)$ par inégalité triangulaire. Mais ceci vient contredire le fait que $T(f)(x_0) = 2f(x_0)$, c'est-à-dire $f\left(\frac{x_0}{2}\right)+f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2f(x_0)$.

On conclut ce raisonnement par l'absurde par $f = g-g(0)u = 0$ donc $g \in \text{Vect}(u)$. Ainsi $E_2(T) = \text{Vect}(u)$ et le sous-espace propre de T associé à la valeur propre 2 est bien de dimension 1.

22.2 **a.** Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction positive $t \mapsto |P(t)|$ est continue sur le segment $[-1;1]$ donc elle y est bornée et y atteint ses bornes, ce qui justifie la définition de $||P||_1$. Ainsi, $||.||_1$ va bien de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}_+$.
En fait, la norme $||\,.\,||_1$ est la norme $||\,.\,||_{\infty,[-1;1]}$ pour laquelle on a déjà vu dans le cours qu'elle vérifiait l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $||P||_1 = 0$, puisque $||\,.\,||_{\infty,[-1;1]}$ est une norme, la fonction polynomiale P s'annule sur le segment $[-1;1]$ et le polynôme P admet donc une infinité de racines ce qui montre bien que $P = 0$. On vient d'établir la séparation de $||\,.\,||_1$: $||\,.\,||_1$ est une norme sur E.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$, on a $||P_n||_\infty = 1$ et $||P_n||_1 = P_n(1) = n+1$ car, par inégalité triangulaire, $\forall t \in [-1;1],\ |P_n(t)| \leqslant 1 + |t| + \cdots + |t|^n \leqslant n+1 = P_n(1)$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||P_n||_1}{||P_n||_\infty} = +\infty$ ce qui interdit à $||\,.\,||_\infty$ de dominer $||\,.\,||_1$: ces deux normes ne sont pas équivalentes.
b. f_n est linéaire en tant que restriction à E_n de f qui l'est. Comme E_n est de dimension finie, d'après le cours, f_n est lipschitzienne donc continue : ceci justifie l'existence du réel $u_n = |||f_n|||_\infty = \operatorname*{Sup}\limits_{P\in E_n, ||P||_\infty=1} |f_n(P)|$.
Ici, pas besoin de ce théorème puisque si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in E_n$ et $||P||_\infty = 1$, alors $\forall k \in [\![0;n]\!],\ |a_k| \leqslant 1$ et on a donc $|f_n(P)| = |P(x_0)| = \Big|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x_0^k\Big| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k||x_0|^k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |x_0|^k$ donc u_n existe (on le savait déjà mais là on a une majoration effective) et $u_n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |x_0|^k$.
• Si $x_0 \geqslant 0$, en prenant $P = P_n = 1+X+\cdots+X^n$, on a bien $P \in E_n$ et $||P||_\infty = 1$ et $|f_n(P)| = \sum\limits_{k=0}^{n} x_0^k = \sum\limits_{k=0}^{n} |x_0|^k$ donc le majorant trouvé précédemment est en fait un élément de l'ensemble à majorer et on en déduit que $u_n = |||f_n|||_\infty = \operatorname*{Sup}\limits_{P\in E_n, ||P||_\infty=1} |f_n(P)| = \operatorname*{Max}\limits_{P\in E_n, ||P||_\infty=1} |f_n(P)| = \sum\limits_{k=0}^{n} |x_0|^k$.
• Si $x_0 \leqslant 0$, avec $P = Q_n = 1 - X + \cdots + (-1)^n X^n$, $P \in E_n$ et $||P||_\infty = 1$ et $|f_n(P)| = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x_0^k = \sum\limits_{k=0}^{n} |x_0|^k$ donc le majorant trouvé précédemment est encore un élément de l'ensemble à majorer et on déduit à nouveau que $u_n = |||f_n|||_\infty = \operatorname*{Sup}\limits_{P\in E_n, ||P||_\infty=1} |f_n(P)| = \operatorname*{Max}\limits_{P\in E_n, ||P||_\infty=1} |f_n(P)| = \sum\limits_{k=0}^{n} |x_0|^k$.
Dans les deux cas, on a $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |x_0|^k$ et u_n est la somme partielle de la série géométrique de raison $|x_0|$.
Si $|x_0| < 1$, la série converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1-|x_0|}$; si $|x_0| \geqslant 1$, alors la série diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
c. Initialisation : $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0.x) = T_0(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{ch}(0.x)$ et $T_1(\cos x) = \cos(1.x)$ et $T_1(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{ch}(1.x)$.
Si on suppose ces relations vraies pour tout réel x et pour les entiers $n \geqslant 1$ et $n+1$ fixés, alors par définition de la suite des polynômes de TCHEBYCHEV, on a $T_{n+2}(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx)$ et $T_n(\mathrm{ch}\,(x)) = 2\mathrm{ch}\,(x)\mathrm{ch}\,((n+1)x) - \mathrm{ch}\,(nx)$ sauf que l'on connaît les formules de trigonométrie circulaire et hyperbolique $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ et $2\mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) = \mathrm{ch}\,(a+b) + \mathrm{ch}\,(a-b)$ donc, en les appliquant pour $a = (n+1)x$ et $b = x$, $T_{n+2}(\cos(x)) = \cos((n+2)x) + \cos(nx) - \cos(nx) = \cos((n+2)x)$ mais aussi $T_{n+2}(\mathrm{ch}\,(x)) = \mathrm{ch}\,((n+2)x) + \mathrm{ch}\,(nx) - \mathrm{ch}\,(nx) = \mathrm{ch}\,((n+2)x)$.
Par principe de récurrence, on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_n\big(\cos(x)\big) = \cos(nx)$ et $T_n\big(\mathrm{ch}\,(x)\big) = \mathrm{ch}\,(nx)$.
De même, par une récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$, $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$, T_n a la même parité que n.
d. Traitons à nouveau deux cas :
• Si $|x_0| \leqslant 1$ et $P \in E_n$ tel que $||P||_1 = 1$, il est clair que $|f_n(P)| = |P(x_0)| \leqslant ||P||_1 = \operatorname*{Sup}\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1} |P(t)|$

car $x_0 \in [-1;1]$ donc v_n existe et on a $v_n \leqslant 1$. En prenant $P = 1$, on a bien $P \in E_n$ et $||P||_1 = 1$ et $|f_n(P)| = 1$ donc le majorant trouvé avant est un élément de l'ensemble à majorer et on en déduit que $v_n = |||f_n|||_1 = \underset{P\in E_n, ||P||_1=1}{\text{Sup}} |f_n(P)| = \underset{P\in E_n, ||P||_1=1}{\text{Max}} |f_n(P)| = 1$.

• Si $|x_0| > 1$, comme ch est une bijection strictement croissante et continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1;+\infty[$, il existe $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x_0| = \text{ch}\,(y_0)$ (il s'agit en fait de $y_0 = \text{Argch}\,(|x_0|) = \ln(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1})$ mais chut !). D'après ce qui précède, $T_n \in E_n$ car $\deg(T_n) = n$, $||T_n||_1 = 1$ car tout réel $x \in [-1;1]$ s'écrit $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ donc $|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leqslant 1$ avec $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n.0) = 1$. De plus, comme T_n est pair ou impair, on obtient $|f_n(T_n)| = |T_n(x_0)| = |T_n(|x_0|)| = |T_n(y_0)| = |\text{ch}(ny_0)| = \text{ch}\,(ny_0)$ ce qui prouve que $v_n = |||f_n|||_1 = \underset{P\in E_n, ||P||_1=1}{\text{Sup}} |f_n(P)| \geqslant \text{ch}\,(ny_0)$.

Par conséquent, si $|x_0| \leqslant 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ et, si $|x_0| > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ par minoration.

On peut revenir sur **a.** maintenant qu'on a les polynômes de TCHEBYCHEV à disposition. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on vient de voir que $||T_n||_1 = 1$, on a aussi $T_n \in E$ et $||T_n||_\infty \geqslant 2^{n-1}$. Par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||T_n||_\infty}{||T_n||_1} = +\infty$ ce qui interdit à $||\,.\,||_1$ de dominer $||\,.\,||_\infty$. Ces deux normes sont incomparables : aucune ne domine l'autre.

22.3 **a.** Comme $|\lambda| < 1$, $\forall \theta \in [0;2\pi]$, on a $|-\lambda e^{i\theta}| < 1$ donc la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-\lambda e^{i\theta})^n$ converge et on a $\dfrac{e^{i\theta}}{1+\lambda e^{i\theta}} = e^{i\theta} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \lambda^n e^{in\theta} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \lambda^n e^{i(n+1)\theta}$. Définissons $f_n : \theta \mapsto (-1)^n \lambda^n e^{i(n+1)\theta}$, alors $||f_n||_{\infty,[0;2\pi]} = |\lambda|^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} |\lambda|^n$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur le segment $[0;2\pi]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0;2\pi]$, on peut intégrer terme à terme pour avoir $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1+\lambda e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\theta)\Big) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \lambda^n \Big[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}\Big]_0^{2\pi} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$.

b. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc, comme $Q \neq 0$ car Q n'admet pas de racine dans $D(a,r)$, on peut décomposer $Q = d \prod\limits_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)^{m_j}$ dans $\mathbb{C}[X]$ avec $d \neq 0$ son coefficient dominant, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines distinctes de Q et $m_1, \cdots, m_r$ les ordres de multiplicité respectifs de $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ dans le polynôme Q. D'après les propriétés de la dérivée logarithmique (des polynômes : c'est au programme en MPSI mais pas en PCSI et ça ce montre assez simplement par récurrence sur r), on a $\dfrac{Q'}{Q} = \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{m_j}{X-\alpha_j}$ donc $\dfrac{Q'(a+re^{i\theta})}{Q(a+re^{i\theta})} = \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{m_j}{a+re^{i\theta}-\alpha_j} = \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{b_j}{1+\lambda_j e^{i\theta}}$ en posant $b_j = \dfrac{m_j}{a-\alpha_j}$ et $\lambda_j = \dfrac{r}{a-\alpha_j}$. Soit $j \in [\![1;r]\!]$, comme $a_j \notin D(a,r)$, on a $|a - \alpha_j| > r$ donc $|\lambda_j| < 1$ et on peut appliquer le résultat de la question **a.** pour avoir $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1+\lambda_j e^{i\theta}} d\theta = 0$ de sorte que, par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle I(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q'(a+re^{i\theta})}{Q(a+re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta = \frac{r}{2\pi} \sum_{j=1}^{r} b_j \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1+h_j e^{i\theta}} d\theta = \frac{r}{2\pi} \sum_{j=1}^{r} 0 = 0$.

c. Si $Q = (X-a)^m U$ où U ne possède aucune racine dans $D(a,r)$, alors $\dfrac{Q'}{Q} = \dfrac{m}{X-a} + \dfrac{U'}{U}$ car la dérivée logarithmique transforme les produits en somme (comme un logarithme). Ainsi, par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle I(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{a+re^{i\theta}-a} re^{i\theta} d\theta + I(U) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m d\theta + I(U)$ donc $I(Q) = m$ d'après la question **b.**.

d. Déjà, il s'agit bien d'un maximum car la fonction $\varphi : z \mapsto |P(z)|$ est bien continue sur $D(a,r)$ qui est un fermé borné de l'espace $\mathbb{C}$ (qui est de dimension finie) donc φ est bornée et atteint ses bornes sur $D(a,r)$ ce

qui justifie l'existence de $||P|| = ||P||_{\infty, D(a,r)}$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire de $||\,.\,||$ proviennent des propriétés équivalentes de la norme infinie classique (sur $D(a,r)$). Pour la séparation, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $||P|| = 0$, alors $\forall z \in D(a,r),\ |P(z)| = 0$ donc $P(z) = 0$ donc P possède une infinité de racines d'où $P = 0$.
Au final, $||\,.\,||$ est bien une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$ (et même sur $\mathbb{R}[X]$).

e. L'application $f : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie. D'après le cours, f est donc lipschitzienne. On en déduit l'existence de $M \geqslant 0$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ ||f(P)|| = ||P'|| \leqslant M||P||$.

f. • Si $\mu = 0$, en prenant $k_0 = 0$, on a bien $\forall k \geqslant 0,\ |P_k(z)| \geqslant 0 = \frac{\mu}{2}$.

• Si $\mu > 0$, on prend $\varepsilon = \frac{\mu}{2} > 0$ et, puisque la suite $(P_k)_{k \geqslant 0} \in (\mathbb{R}_n[X])^{\mathbb{N}}$ converge vers P (pour n'importe quelle norme car on est en dimension finie donc en particulier pour la norme de la question **d.**), il existe un entier k_0 tel que $\forall k \geqslant k_0,\ ||P_k - P|| \leqslant \varepsilon = \frac{\mu}{2}$. Pour tout entier $k \geqslant k_0$ et tout complexe $z \in C(a,r) \subset D(a,r)$, $\mu \leqslant |P(z)| = |P(z) - P_k(z) + P_k(z)| \leqslant |P(z) - P_k(z)| + |P_k(z)| \leqslant ||P_k - P|| + |P_k(z)| \leqslant \frac{\mu}{2} + |P_k(z)|$ (on peut bien sûr aussi utiliser $\big||P(z)| - |P_k(z)|\big| \leqslant |P(z) - P_k(z)|$) et on en déduit bien que $|P_k(z)| \geqslant \frac{\mu}{2}$.

g. Dans cette question, pour s'assurer que $\mu > 0$, on choisit r assez petit pour être sûr qu'il n'y a pas de racine de P sur le cercle $C(a,r)$. Comme a est une racine de P par hypothèse, en notant $a, a_1, \cdots, a_q$ les différentes racines de P, il suffit de prendre $r < \underset{1 \leqslant i \leqslant q}{\mathrm{Min}} |a - a_i|$. Avec un tel choix, P ne s'annule pas sur $C(a,r)$ donc $\mu > 0$ car il s'agit d'un minimum. Soit $k \geqslant k_0$, on a $\frac{2\pi}{r}|I(P_k) - I(P)| \leqslant \int_0^{2\pi} \left|\frac{P_k'(a + re^{i\theta})}{P_k(a + re^{i\theta})} - \frac{P'(a + re^{i\theta})}{P(a + re^{i\theta})}\right| d\theta$ par inégalité de la moyenne. En écrivant $\frac{P_k'}{P_k} - \frac{P'}{P} = \frac{(P_k' - P')P + P'(P - P_k)}{PP_k}$, on peut majorer le numérateur $|(P_k'(a + re^{i\theta}) - P'(a + re^{i\theta}))P(a + re^{i\theta}) + P'(a + re^{i\theta})(P(a + re^{i\theta}) - P_k(a + re^{i\theta})(a + re^{i\theta}))|$, puisque $|P_k'(a + re^{i\theta}) - P'(a + re^{i\theta})| \leqslant ||P_k' - P'|| \leqslant M||P_k - P||$, $|P(a + re^{i\theta})| \leqslant ||P||$, $|P'(a + re^{i\theta})| \leqslant ||P'||$ et $|P(a + re^{i\theta}) - P_k(a + re^{i\theta})| \leqslant ||P_k - P||$ car $C(a,r) \subset D(a,r)$, par la quantité $(||P'|| + M||P||)||P - P_k||$. Mais pour minorer le dénominateur, on sait que $|P_k(a + re^{i\theta})| \geqslant \frac{\mu}{2}$ d'après **e.** et $|P(a + re^{i\theta})| \geqslant \mu$ par définition de μ donc $|P_k(a + re^{i\theta})P(a + re^{i\theta})| = |P_k(a + re^{i\theta})|.|P(a + re^{i\theta})| \geqslant \frac{\mu^2}{2}$ donc, on obtient :

$$\frac{2\pi}{r}|I(P_k) - I(P)| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{(||P'|| + M||P||))||P - P_k||}{(\mu^2/2)} d\theta = \frac{2}{\mu^2}.(2\pi).(||P'|| + M||P||)||P - P_k|| \leqslant \frac{8\pi M||P||||P_k - P||}{\mu^2}.$$

On en conclut, puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} ||P - P_k|| = 0$ par hypothèse, que $\lim\limits_{k \to +\infty} |I(P_k) - I(P)| = 0$.
Or, en prenant $r > 0$ tel qu'on ait aussi $r < |\mathrm{Im}(a)|$, comme les P_k n'admettent que des racines réelles, P_k n'a pas de racine dans $D(a,r)$ donc $I(P_k) = 0$ par la question **b.**. On a alors $I(P) = 0$ puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} I(P_k) = I(P)$. Mais ceci contredit la question **c.** car P admet a pour racine de multiplicité $m \geqslant 1$ donc on sait que $I(P) = m$.
Au final, une limite dans $\mathbb{R}_n[X]$ de polynômes scindés dans $\mathbb{R}$ est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$ puisqu'il ne peut avoir que des racines réelles. L'ensemble de ces polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés dans $\mathbb{R}$ est donc un fermé.

22.4 **a.** Soit $i \in [\![1;p]\!]$ et v_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Comme la fonction $g_i : M \mapsto Mv_i$ est continue car linéaire en dimension finie et que la suite $(A^k)_{k \geqslant 0}$ converge, alors la suite $(A^k v_i)_{k \geqslant 0}$ converge vers le vecteur Lv_i. Or, par une récurrence facile, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k v_i = \lambda_i^k v_i$. De plus, la convergence de la suite $(\lambda_i^k v_i)_{k \geqslant 0}$ équivaut à la convergence de la suite numérique $(\lambda_i^k)_{k \geqslant 0}$ (par exemple car les coordonnées de $\lambda_i^k v_i$ dans une base $\mathcal{B}$ dont le premier vecteur est $v_i \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ sont $(\lambda_i^k, 0, \cdots, 0)$).

Si $|\lambda_i| < 1$, la suite $(\lambda_i^k)_{k\geqslant 0}$ converge vers 0. Si $\lambda_i = 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_i^k = 1$. Si $|\lambda_i| > 1$, comme $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda_i|^k = +\infty$, la suite $(\lambda_i^k)_{k\geqslant 0}$ diverge. Si $|\lambda_i| = 1$ mais $\lambda_i \neq 1$, alors $\lambda_i = e^{i\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, comme $\lambda_i^{k+1} = e^{i\theta}\lambda_i^k$ (1), si la suite $(\lambda_i^k)_{k\geqslant 0}$ convergeait vers un complexe ℓ, on aurait $\ell = e^{i\theta}\ell$ donc $\ell = 0$ en passant à la limite dans (1) et c'est impossible car $|\lambda_i^k| = 1$. En résumé, la suite $(\lambda_i^k)_{k\geqslant 0}$ converge si et seulement si $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$. On peut conclure que la convergence de $(A^k)_{k\geqslant 0}$ implique $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$.

Toujours dans le cas où A est diagonalisable, la réciproque est vraie et laissée aux étudiants curieux.

Pour aller plus loin, soit une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs propres de A telle que $(v_1, \cdots, v_r)$ soit une base de $E_1(A)$, alors ce qui précède prouve que $Lv_i = v_i$ si $i \in [\![1;r]\!]$ et $Lv_i = 0_{\mathbb{C}^n}$ si $i \in [\![r+1;n]\!]$. Ainsi, l'application L est la projection sur le sous-espace propre $E_1(A)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(A)\setminus\{1\}} E_\lambda(A)$.

b. D'après le cours, $P = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$ est annulateur de A car A est diagonalisable et $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.

c. Soit $Q = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ annulateur de A et λ une valeur propre de A, alors il existe un vecteur propre v associé à λ : $Av = \lambda v$. Comme $A^k v = \lambda^k v$ comme ci-dessus, on a $Q(A)v = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k v = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \lambda^k v = Q(\lambda)v$ donc $Q(\lambda)v = 0_{\mathbb{C}^n}$ alors que $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ d'où $Q(\lambda) = 0$ et λ est bien une racine de Q.

Soit $(a_0, \cdots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i A^i = 0$, cela signifie que le polynôme $Q = \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i X^i$ est annulateur de A. Or, on vient de voir qu'alors toutes les valeurs propres de A sont des racines de Q. Ainsi $Q \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ admet donc au moins p racines distinctes ce qui prouve que $Q = 0$ d'où $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$ donc la famille $(I_n, \cdots, A^{p-1})$ est une famille libre. Ceci justifie que P est bien le polynôme minimal de A.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^k par P ce qui donne $X^k = PQ_k + P_k$ avec la condition $\deg(P_k) < \deg(P) = p$ sur le reste P_k : $P_k \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$. Ainsi, $A^k = P(A)Q_k(A) + P_k(A) = P_k(A)$ car $P(A) = 0$.

e. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie donc tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont fermés (vu en cours). Ainsi, $\mathbb{C}[A] = \mathrm{Vect}(I_p, \cdots, A^{p-1})$ (d'après **d.**) est fermé. Comme la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de matrices de $\mathbb{C}[A]$, sa limite L est dans $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{p-1}[X]$. Ainsi, il existe $U \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que $L = U(A)$.

22.5 **a.** Les matrices $-I_n$ et I_n sont orthogonales et pourtant $[-I_n; I_n] \not\subset O(n)$ car la matrice nulle 0_n n'est pas orthogonale et $O_n \in [-I_n; I_n]$ car $O_n = \frac{1}{2}.I_n + \frac{1}{2}(-I_n)$ avec $\frac{1}{2} \in [0;1]$ et $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.
On en déduit que $O(n)$ n'est pas convexe.

b. Considérons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ normé par la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B)$. C'est un choix mais tous les choix se valent car toutes les normes sont équivalentes puisqu'on est en dimension finie.
Pour toute matrice $M \in O(n)$, on a $M^T M = I_n$ donc $||M||^2 = \mathrm{Tr}\,(M^T M) = \mathrm{Tr}\,(I_n) = n$ et $||M|| = \sqrt{n}$ donc $O(n)$ est inclus dans la sphère de centre O_n et de rayon $\sqrt{n}$, ce qui prouve déjà que $O(n)$ est borné.

Soit une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in O(n)^{\mathbb{N}}$ de matrices orthogonales qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice M. On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_k^T M_k = I_n$. $\varphi : A \mapsto (A^T, A)$ et $\psi : (A, B) \mapsto AB$ sont respectivement linéaires et bilinéaires en dimension finie donc continues d'où $f = \psi \circ \varphi : A \mapsto A^T A$ est continue par composition. Par caractérisation séquentielle de la continuité, la suite $(f(M_k))_{k\geqslant 0}$ converge vers $f(M)$ mais cette suite est constante et vaut I_n donc $f(M) = M^T M = I_n$ d'où $M \in O(n)$. Ainsi, $O(n)$ est fermé.

c. Soit $v_1 = \frac{1}{3}\big(2,1,2\big)$, $v_2 = \frac{1}{3}\big(2,-2,-1\big)$, $v_3 = \frac{1}{3}\big(1,2,-2\big)$ les vecteurs dont les coordonnées sont dans les colonnes de A. Comme $(v_1|v_2) = \frac{1}{9}\big(4-2-2\big) = (v_1|v_3) = \frac{1}{9}\big(2+2-4\big) = (v_2|v_3) = \frac{1}{9}\big(2-4+2\big) = 0$ et que $||v_1||^2 = ||v_2||^2 = ||v_3||^2 = \frac{1}{9}\big(4+4+1\big) = 1$, (v_1,v_2,v_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ donc $A \in O(3)$. De plus, $\det(A) = \frac{1}{27}\big(8+8-1+4+4+4\big) = 1$ donc $A \in SO(3)$. Comme A n'est pas symétrique, A représente une "vraie" rotation d'angle $\theta \in]0;2\pi[$ tel que $\text{Tr}\,(A) = 1+2\cos(\theta) = -\frac{2}{3}$ donc $\theta = \pm\,\text{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$. Comme $A - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système $AX = X$ équivaut à $\begin{cases} -x+2y+z &= 0\ (1) \\ x-5y+2z &= 0\ (2) \\ 2x-y-5z &= 0\ (3) \end{cases}$. En faisant $(2) \longleftarrow (2)+(1)$ et $(3) \longleftarrow (3)+2(1)$, on a $AX = X \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+2y+z &= 0\ (1) \\ -3y+3z &= 0\ (2') \\ 3y-3z &= 0\ (3') \end{cases}$. Par conséquent, on a $AX = X \Longleftrightarrow (x = 3z,\ y = z)$ et $E_1(A) = \text{Vect}(u)$ avec $u = (3,1,1)$. Prenons $v = (1,0,0)$, alors u et v ne sont pas colinéaires et on sait que $\sin(\theta)$ est du signe de $[v, Av, u] = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$ donc $\sin(\theta) < 0$.

Ainsi, A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\theta = -\,\text{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right) \sim -146,4^{\text{o}}$ autour de l'axe orienté par le vecteur $u = (3,1,1)$.

22.6 **a.** L'application Φ est bien définie et elle est linéaire car si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(P,Q) \in \mathbb{C}_n[X]$, on a la relation $\Phi(\lambda P+Q) = \big((\lambda P+Q)(a_0),\cdots,(\lambda P+Q)(a_n)\big) = \big(\lambda P(a_0)+Q(a_0),\cdots,\lambda P(a_n)+Q(a_n)\big)$ qui se transforme en $\Phi(\lambda P+Q) = \lambda\big(P(a_0),\cdots,P(a_n)\big) + \big(Q(a_0),\cdots,Q(a_n)\big) = \lambda\Phi(P)+\Phi(Q)$.

De plus, si $P \in \text{Ker}(\Phi)$, on a $\forall k \in [\![0;n]\!],\ P(a_k) = 0$ donc P admet $n+1$ racines distinctes alors que $\deg(P) \leqslant n$. On sait qu'alors $P = 0$. Ainsi, Φ est injective donc, comme $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = \dim(\mathbb{C}^{n+1}) = n+1$, Φ est un isomorphisme, en particulier c'est une bijection.

b. Pour $i \in [\![0;n]\!]$, soit le vecteur e_{i+1}tvi de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, puisque Φ est une bijection, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\Phi(L_i) = e_{i+1}$, il s'agit de $L_i = \Phi^{-1}(e_{i+1})$. Par définition de Φ, on a $\Phi(L_i) = (L_i(a_0),\cdots,L_i(a_n)) = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ donc $L_i(a_i) = 1$ et $\forall j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\},\ L_i(a_j) = 0$.

D'après le cours, on a même $L_i = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$ (polynômes de Lagrange).

c. Comme $\chi_M \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\Phi(\chi_M) = \big(\chi_M(a_0),\cdots,\chi_M(a_n)\big) = \sum\limits_{k=0}^{n}\chi_M(a_k)e_{k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\chi_M(a_k)\Phi(L_k)$, par linéarité et bijectivité de Φ, on a $\Phi(\chi_M) = \Phi\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\chi_M(a_k)L_k\Big)$ donc $\chi_M = \sum\limits_{k=0}^{n}\chi_M(a_k)L_k$.

d. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'application $f_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $f_k(M) = \chi_M(a_k) = \det(a_k I_n - M)$ est continue car polynomiale en les coefficients de M. Plus précisément, $f_k = \det \circ g_k$ avec $g_k : M \mapsto a_k I_n - M$ qui est continue car 1-lipschitzienne puisque $||g_k(M) - g_k(N)|| = ||M-N||$.

Or, d'après **c.**, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(M) = \chi_M = \sum\limits_{k=0}^{n}\chi_M(a_k)L_k$ donc $f = \sum\limits_{k=0}^{n}f_k L_k$ est continue en tant que somme de fonctions continues. En effet, $h_k : M \mapsto \chi_M(a_k)L_k$ est la composée de la fonction f_k et de la fonction $h_k : z \mapsto zL_k$ qui est linéaire donc continue (en dimension finie).

e. Considérons deux cas :

• Si A est inversible, alors $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables. Directement, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

• Si A n'est inversible, comme χ_A n'admet qu'un nombre fini de racines car $\deg(\chi_A) = n$, la matrice A n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, puisque $A - \dfrac{I_n}{p}$ n'est pas inversible si et seulement $\dfrac{1}{p}$ est valeur propre de A, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p \geqslant p_0,\ A_p = A - \dfrac{I_n}{p} \in GL_n(\mathbb{C})$. D'après le premier cas, comme $A_pB = AB - \dfrac{B}{p} = BA_p$, on en déduit que $\chi_{A_pB} = \chi_{BA_p}$. Comme les deux applications $\varphi_B : M \mapsto MB$ et $\psi_B : M \mapsto BM$ sont linéaires en dimension finie, elles sont continues donc, puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = A$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \varphi_B(A_p) = \varphi_B(A)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \psi_B(A_p) = \psi_B(A)$ par caractérisation séquentielle de la continuité. Ainsi, $\lim\limits_{p\to+\infty} A_pB = AB$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} BA_p = BA$. Par conséquent, comme f est continue, il vient $\lim\limits_{p\to+\infty} f(A_pB) = f(AB)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} f(BA_p) = f(BA)$. Pour $p \geqslant p_0$, $f(A_pB) = f(BA_p)$ d'après ce qui précède, donc $f(AB) = f(BA) = \lim\limits_{p\to+\infty} f(A_pB) = \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Dans les deux cas, on a bien le résultat attendu, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

22.7 Par définition, même si ce n'est plus au programme depuis 2021, $\overset{\circ}{X}$ est la partie de E qui est composée des points intérieurs à X.

a. • Soit $x \in \overset{\circ}{X}$, par définition $\exists r > 0,\ B(x,r) \subset X$. Mais comme $x \in B(x,r)$, on a $x \in X$. Ainsi, $\overset{\circ}{X} \subset X$.

• Soit $x \in X$, pour tout réel $r > 0$, $B(x,r) \cap X \neq \emptyset$ car $x \in B(x,r) \cap X$. Ainsi, x est adhérent à X donc $x \in \overline{X}$. Par conséquent, $X \subset \overline{X}$.

b. • Soit $(a,b) \in (\overset{\circ}{C})^2$, montrons que $[a;b] \subset \overset{\circ}{C}$. Par définition, il existe deux réels $r_a > 0$ et $r_b > 0$ tels que $B(a,r_a) \subset C$ et $B(b,r_b) \subset C$. Posons alors $r = \mathrm{Min}(r_a,r_b) > 0$. Soit $\lambda \in [0;1]$, posons $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ et montrons que c est intérieur à C. Soit $x \in B(c,r_c)$, posons $y = x - c$ de sorte que $||y|| < r_c$ donc $||y|| < r_a$ et $||y|| < r_b$ ce qui montre que $a+y \in B(a,r_a)$ et $b+y \in B(b,r_b)$. Comme $B(a,r_a) \subset$ et $B(b,r_b) \subset C$, on a donc $(a+y,b+y) \in C^2$ donc, par convexité de C, $\lambda(a+y)+(1-\lambda)(b+y) \in C$. Or, $\lambda(a+y)+(1-\lambda)(b+y) = c+y$ donc $c+y \in C$. On en déduit que $B(c,r_c) \subset C$ donc $c \in \overset{\circ}{C}$ donc $[a;b] \subset \overset{\circ}{C}$. Par conséquent, $\overset{\circ}{C}$ est un convexe.

• Méthode 1 : soit $(a,b) \in (\overline{C})^2$, montrons que $[a;b] \subset \overline{C}$. Par définition, pour tout réel $r > 0$, $B(a,r) \cap C \neq \emptyset$ et $B(b,r) \cap C \neq \emptyset$ de sorte qu'il existe deux vecteurs $x \in B(a,r) \cap C$ et $y \in B(b,r) \cap C$. Soit $\lambda \in [0;1]$, posons $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, alors $||c-z|| = ||\lambda(a-x)+(1-\lambda)(b-y)|| \leqslant |\lambda|\,||a-x|| + |1-\lambda|\,||b-y||$ donc, comme $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$, on a $||c-z|| < \lambda r + (1-\lambda)r = r$ donc $z \in B(c,r)$ car $\lambda > 0$ ou $1-\lambda > 0$. Or $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ donc $z \in C$ car $(x,y) \in C^2$ et que C est convexe, ce qui prouve que $B(c,r) \cap C \neq \emptyset$ donc $c \in \overline{C}$. Par conséquent, $[a;b] \subset \overline{C}$ et $\overline{C}$ est un convexe.

Méthode 2 : soit $(a,b) \in (\overline{C})^2$, montrons que $[a;b] \subset \overline{C}$. Par caractérisation séquentielle des points adhérents, il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Soit $\lambda \in [0;1]$ et $c = \lambda a + (1-\lambda)b$, par opération sur les suites de vecteurs, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda a_n + (1-\lambda)b_n) = \lambda a + (1-\lambda)b = c$. Mais $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \lambda a_n + (1-\lambda)b_n \in C$ car C est convexe donc c est la limite d'une suite de vecteurs de C ce qui prouve que $c \in \overline{C}$. Par conséquent, $\overline{C}$ est convexe.

22.8 **a.** En notant $\lambda = \mathrm{dom}(P) > 0$, comme P est scindé à racines simples et qu'on connaît ses racines, on peut écrire $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \in S$. Comme les racines de P sont simples, la fonction polynomiale P change de signe au voisinage de chacune de ses racines (car $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P'(a_k) \neq 0$ car a_k est racine simple de P) et $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ car $\lambda > 0$. Ainsi, $P(\beta_n) > 0$, $P(\beta_{n-1}) < 0$, etc... et $P(\beta_0)$ du signe de $(-1)^n$.

Ou alors $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P(\beta_k) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (\beta_k - \alpha_i) = \lambda \prod_{i=1}^{k-1} (\beta_k - \alpha_i) \times \prod_{i=k}^{n} (\beta_k - \alpha_i)$ ce qui fait k termes strictement positifs et $n - k$ termes strictement négatifs dans ce produit : $P(\beta_k)$ est du signe de $(-1)^{n-k}$.

b. Pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, l'application $\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_k(R) = R(\beta_k)$ est linéaire et $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie donc φ_k est lipschitzienne donc continue.

c. Soit $U = \bigcap_{k=0}^{n} \varphi_k^{-1}((-1)^{n-k}\,\mathbb{R}_+^*)$ avec la convention $(1)\,\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^*$ et $(-1)\,\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_-^*$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$ et que φ_k est continue, alors $\varphi_k^{-1}((-1)^{n-k}\,\mathbb{R}_+^*)$ est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$ en tant qu'image réciproque d'un intervalle ouvert par une application continue. De plus, U est alors ouvert en tant qu'intersection d'un nombre fini d'ouverts.

Comme P appartient à l'ouvert U d'après la question **a.**, il existe $r > 0$ tel que $B(P, r) \subset U$.

Or si un polynôme Q appartient à U, on a $Q(\beta_n) > 0$, $Q(\beta_{n-1}) < 0$, $\cdots$, $Q(\beta_0)$ du signe de $(-1)^n$ ce qui implique grâce au théorème des valeurs intermédiaires que la fonction polynomiale continue Q s'annule (en c_k) sur chaque intervalle du type $]\beta_k;\beta_{k+1}[$ avec $k \in [\![0;n-1]\!]$. Le polynôme Q a donc n racines distinctes, il est de degré n, on en déduit qu'il existe $\mu > 0$ tel que $Q = \mu \prod_{k=0}^{n-1} (X - c_k)$ donc $Q \in S$. Comme on vient de prouver que $U \subset S$, et puisque $B(P, r) \subset U$, on a donc $B(P, r) \subset S$ ce qui justifie que S est ouvert.