DEVOIR 23 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PSI 1 2024-2025 **mardi 18 mars 2025**

QCM

1 *DSE classiques : vrai ou faux ?*

1.1 $\forall x \in]-1;1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

1.2 $\forall x \in]-1;1[,\ \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

1.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

1.4 $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

2 *Équations linéaires du premier ordre ; soit* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, l'équation différentielle* $(E)\ :\ y' - ay = b$*, on note* S_E *l'ensemble des fonctions réelles* y *solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$*, on note aussi* A *une primitive de* a *sur* $\mathbb{R}$ *et* B *une primitive de* b *sur* $\mathbb{R}$

2.1 $\forall y_0 \in \mathbb{R},\ \big(\exists! y \in S_E,\ y(0) = y_0\big)$

2.2 $\forall y_1 \in \mathbb{R},\ \big(\exists! y \in S_E,\ y'(0) = y_1\big)$

2.3 $y \in S_E \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ y = \lambda e^A + Be^A\big)$

2.4 S_E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

3 *Raccord : soit* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, l'équation différentielle* $(E)\ :\ ty' - a(t)y = 0$*, on note* $S_{E,I}$ *l'ensemble des fonctions* $y : I \to \mathbb{R}$ *solutions de* (E) *sur* I

3.1 Il existe $y \in S_{E,\mathbb{R}_+}$ telle que $y(0) = 1$

3.2 Il existe $y \in S_{E,\mathbb{R}_+^*}$ telle que $y(1) = 1$

3.3 Il existe $y \in S_{E,\mathbb{R}}$ telle que $y(1) = 1$

3.4 Il existe $y \in S_{E,\mathbb{R}}$ telle que $y(2) = 0$

4 *Équation : soit* $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues,* $(E)\ :\ t^2y'' + a(t)y' + b(t)y = 1$ *et* $(E_0)\ :\ t^2y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$

4.1 Si $y_0 \neq 0$ solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$, on résout (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $y = \lambda y_0$ (avec $\lambda \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$)

4.2 Il existe une solution y de (E) non nulle et développable en série entière

4.3 Il existe une unique solution $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de (E) telle que $y(1) = 1$

4.4 Il existe une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $y(1) = y(-1) = 0$

Énoncé Soit un intervalle I, $t_0 \in I$ et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues sur I. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire relatif aux solutions de (E) système différentiel $(E)\ :\ X' = A(t)X + B(t)$ vérifiant une certaine “condition initiale”.

Preuve Soit $a : I \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue sur un intervalle I. Montrer que les solutions de $(E_0)\ :\ y' - ay = 0$ sont les fonctions y_λ définies sur I par $\forall t \in I,\ y_\lambda(t) = \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I.

Exercice 1 Résoudre sur l'intervalle $]-1;1[$ l'équation différentielle $(E)\ :\ (1-t^2)y' - y = 1 + t$.
Quelle solution y de (E) sur $]-1;1[$ se prolonge en une fonction continue sur $[-1;1]$?

Exercice 2 Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}_-^*$) l'équation différentielle $(E)\ :\ t^2y'' + 4ty' + (2-t^2)y = 1$.

Indication : poser $z = t^2y$, calculer z''. En déduire l'équation différentielle (F) vérifiée par z ssi y vérifie (E).
Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

DEVOIR 23 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 23 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X		X	
2	X				
3		X		X	
4	X				

1.1 Faux : ça commence à $n = 1$ **1.2** Vrai : cours **1.3** Faux : il y a des $(-1)^n$ **1.4** Vrai : x devient $x^2 \in \mathbb{R}$.
2.1 Vrai : CAUCHY-LIPSCHITZ **2.2** Faux : avec $a = b = 0$ et $y_1 = 1$ par exemple **2.3** Faux : B doit être une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$ pour que ça marche (th 14.2) **2.4** Faux : si $b \neq 0$.
3.1 Faux : si $a(t) = 1$, $y = \lambda t$ vaut 0 en 0 **3.2** Vrai : CAUCHY-LIPSCHITZ **3.3** Faux : si $a(t) = -1$, les solutions sont les $y : t \mapsto \lambda/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et $S_{E,\mathbb{R}} = \{0\}$ **3.4** Vrai : fonction nulle.
4.1 Vrai : les termes en λ vont s'éliminer et il restera une équation du premier ordre en λ' qui nous permet de trouver λ' puis λ en intégrant **4.2** Faux : aucune raison pour que ça soit vrai (si a et b ne sont que continues par exemple) **4.3** Faux : il faut imposer la valeur de $y'(1)$ pour avoir unicité **4.4** Faux : il peut très bien n'y avoir aucune solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Énoncé}}$ Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues sur I et $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors le problème de CAUCHY $\begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$ admet une unique solution X définie sur I en entier.

$\boxed{\textbf{Preuve}}$ Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable. Alors, comme I est un intervalle et que la fonction dérivable (par composée) e^A ne s'annule pas sur I et que $(e^{-A})' = -ae^{-A}$, on a la série d'équivalences suivante :
$y' - ay = 0 \iff (y' - ay)e^{-A} = 0 \iff (ye^{-A})' = 0 \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ ye^{-A} = \lambda\big) \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = \lambda e^A\big)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ L'équation homogène associée est $(E_0)\ :\ y' = \dfrac{y}{1-t^2}$. Comme $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2(1-t)} + \dfrac{1}{2(1+t)}$, les solutions sur $]-1;1[$ de (E_0) sont les $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{\frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{2}} = \lambda\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Variation de la constante : $\lambda'\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}} = \dfrac{1}{1-t} \iff \lambda' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Longleftarrow \lambda = \operatorname{Arcsin}(t)$. Par théorème de structure, les solutions de (E) sur $]-1;1[$ sont les $y_\alpha : t \mapsto \sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}\Big(\alpha + \operatorname{Arcsin}(t)\Big)$ où α parcourt $\mathbb{R}$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to -1^+} y_\alpha(t) = 0$ donc y_α est C^0 sur $[-1;1[$ en posant $y_\alpha(-1) = 0$. Mais en 1^-, avec $\sqrt{1-t}$ au dénominateur, si y_α admet une limite finie en 1^-, $\alpha = -\frac{\pi}{2} = -\operatorname{Arcsin}(1)$. Or $-\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin}(t) = -\operatorname{Arccos}(t)$ et $\operatorname{Arccos}(t) \underset{1}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos}(t)) = \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1+t}\sqrt{1-t} \underset{1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-t}$ donc $y_{-\pi/2}(t) \underset{1}{\sim} -\sqrt{2}\sqrt{1+t} \underset{t \to 1^-}{\longrightarrow} -2$.
Seule $y_{-\pi/2}$ se prolonge continûment sur $[-1;1]$ avec $y_{-\pi/2}(-1) = 0$, $y_{-\pi/2}(1) = -2$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Soit $z : t \mapsto t^2 y(t)$, alors z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}_-^*$) si et seulement si y l'est.
$t^2y'' + 4ty' + (2-t^2)y = 1 \iff t^2\Big(\dfrac{tz'' - 4tz' + 6z}{t^4}\Big) + 4t\Big(\dfrac{tz' - 2z}{t^3}\Big) + (2-t^2)\dfrac{z}{t^2} = 1 \iff z'' - z = 1$.
On pouvait aussi calculer $z' = t^2y' + 2ty$ et $z'' = t^2y'' + 4ty' + 2y$ et constater que $t^2y'' + 4ty' + (2-t^2)y = z'' - z$.
Les solutions de $(F)\ :\ z'' - z = 1$ sont clairement $z : t \mapsto a\operatorname{ch}(t) + b\operatorname{sh}(t) - 1$ donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}_-^*$) sont les $y : t \mapsto \dfrac{a\operatorname{ch}(t) + b\operatorname{sh}(t) - 1}{t^2}$. Comme $a\operatorname{ch}(t) + b\operatorname{sh}(t) - 1 \underset{0}{=} (a-1) + bt + \frac{a}{2}t^2 + o(t^2)$, y se prolonge de façon C^2 en 0 si $b = 0$ et $a = 1$. Ainsi, la seule fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $y : t \mapsto \dfrac{\operatorname{ch}(t) - 1}{t^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{2n-2}}{(2n)!}$ (qui est bien solution et de classe C^2 car DSE sur $\mathbb{R}$).