DEVOIR 24 : ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PSI 1 2024-2025 **mardi 25 mars 2025**

QCM

1 *Topologie : soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E*

1.1 A et B ouvertes $\Longrightarrow A \cup B$ ouverte

1.2 A et B convexes $\Longrightarrow A \cup B$ convexe

1.3 A et B fermées $\Longrightarrow A \cap B$ fermée

1.4 A et B fermées $\Longrightarrow A \cup B$ fermée

2 *Topologie : soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E, $x \in E$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de A*

2.1 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in \overline{A}$

2.2 si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in \overline{A}$

2.3 $x \in \overline{A} \Longrightarrow x \in A$

2.4 $x \in A \Longrightarrow x \in \overline{A}$

3 *Images directes et réciproques : soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue, soit O_1 un ouvert de E, K_1 un fermé borné de E et S_2 un segment de $\mathbb{R}$*

3.1 $f(O_1)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

3.2 $f(K_1)$ est un borné de $\mathbb{R}$

3.3 $f^{-1}(]0;+\infty[)$ est un ouvert de E

3.4 $f^{-1}(S_2)$ est un fermé borné de E

4 *Applications lipschitziennes : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) une application k-lipschitzienne (resp. k'-lipschitzienne) et deux réels a et b*

4.1 $af + bg$ est $(ak + bk')$-lip.

4.2 f est dérivable et $|f'| \leqslant k$

4.3 fg est (kk')-lip.

4.4 $f \circ g$ est (kk')-lip.

Énoncé Soit $(E, ||\,.\,||_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $(F, ||\,.\,||_F)$ un espace vectoriel normé de dimension quelconque. Que dire de $f \in \mathcal{L}(E,F)$?

Preuve Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$.
Montrer que la boule ouverte $B(a,r) = \{x \in E \mid ||x-a|| < r\}$ est un ouvert de E.

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_∞ définie par $N_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Sup}}(|a_n|)$ si $P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et la partie $A = \{P \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) > 0\}$. Est-ce que A est une partie convexe ? bornée ? fermée ? ouverte ?

Exercice 2 Soit $n \geqslant 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la norme (on l'admet) $||\,.\,||_\infty$ définie par $||P||_\infty = \underset{0\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}} |a_k|$ si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. On définit $f : E \to E$ par $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.
Que peut-on dire de f ? Déterminer une constante $K \geqslant 0$ telle que : $\forall P \in E,\ ||f(P)||_\infty \leqslant K||P||_\infty$.
Trouver la plus petite constante K possible.

DEVOIR 24 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 24	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X	X	
2		X		X	
3		X	X		
4				X	

1.1 Vrai : du cours **1.2** Faux : faire un dessin **1.3** Vrai : du cours **1.4** Vrai : du cours (2 c'est fini).
2.1 Faux : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut diverger **2.2** Vrai : caractérisation séquentielle d'un vecteur adhérent **2.3** Faux : $0 \in \overline{]0;1]}$ mais $0 \notin]0;1]$ **2.4** Vrai : la suite $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
3.1 Faux : $E = \mathbb{R}$, $O_1 =]0;4\pi[$, $f = \cos$ et $f(O_1) = [-1;1]$ **3.2** Vrai : du cours, f est bornée et atteint ses bornes sur le "compact" K_1 **2.3** Vrai : du cours **3.4** Faux : même exemple que **3.1** et $f^{-1}([-1;1]) = \mathbb{R}$ alors que $[-1;1]$ est un segment et $\mathbb{R}$ n'est pas borné.
4.1 Faux : on ne connaît pas les signes de a et b **4.2** Faux : par exemple avec la fonction "valeur absolue" qui est 1-lip. **4.3** Faux : par exemple si $f = g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ **4.4** Vrai : du cours.

Énoncé Soit $\left(E, ||\,.\,||_E\right)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $\left(F, ||\,.\,||_F\right)$ un espace vectoriel normé de dimension quelconque. Toute application linéaire de E vers F est lipschitzienne donc continue.

Preuve Soit $b \in B(a,r)$, alors par définition $||a-b|| < r$, posons alors $r' = r - ||a-b|| > 0$. Soit $x \in B(b,r')$, on a $||b-x|| < r'$. Par inégalité triangulaire : $||a-x|| = ||a-b+b-x|| \leqslant ||a-b|| + ||b-x|| < r' + ||a-b|| = r$ ce qui montre que $x \in B(a,r)$. Ainsi on a $B(b,r') \subset B(a,r)$.
Comme ceci est vrai pour tous les vecteurs b de $B(a,r)$, ceci montre que $B(a,r)$ est ouvert.

Exercice 1 Traitons séparément les quatre questions :

- A est convexe car si $(P,Q) \in A^2$ et $t \in [0;1]$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(tP + (1-t)Q)(x) = tP(x) + (1-t)Q(x) > 0$ car $P(x) > 0$ et $Q(x) > 0$ (t et $1-t$ ne peuvent pas s'annuler en même temps).
- A n'est pas bornée car $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $U_p = X^2 + p \in A$ et $N_\infty(U_p) = p$ et p peut être aussi grand qu'on veut.
- A n'est pas fermée car $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $V_p = X^2 + \dfrac{1}{p} \in A$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} V_p = X^2 \notin A$ (car $N_\infty(V_p - X^2) = \dfrac{1}{p} \to 0$) donc les limites des suites convergentes de vecteurs de A n'étant pas toutes dans A, A n'est pas fermée.
- A n'est pas non plus ouverte car $P = 1 \in A$ et si $r > 0$ le polynôme $P_r = rX + 1$ est dans la boule fermée de centre P et de rayon r et pourtant $P_r \notin A$ car P_r s'annule en $\dfrac{1}{r}$. Ainsi $\forall r > 0$, $B_f(P,r) \not\subset A$ alors que $P \in A$.

Exercice 2 f est un endomorphisme (il suffit de l'écrire) de E de dimension finie donc f est lipschitzienne donc continue par un théorème du cours.
Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $f(P) = P' = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ donc $||P'||_\infty = \underset{0\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}(k|a_k|) \leqslant \left(\underset{0\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\, k\right)||P||_\infty = n||P||_\infty$.
La constante $K = n$ convient. Elle est optimale : si $P_n = X^n \in E$, $P'_n = nX^{n-1}$ donc $||P'_n||_\infty = n = n.||P_n||_\infty$.
Ainsi, il ne peut pas exister $K' \in [0;n[$ telle que $\forall P \in E$, $||f(P)||_\infty \leqslant K'||P||_\infty$ (ce serait faux pour P_n).