TD 24 : FONCTIONS VECTORIELLES

PSI 1 2024-2025 **jeudi 27 mars 2025**

24.1 *Centrale PSI 2012* On appelle S l'ensemble des couples $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $x < y$ et $x^y = y^x$.

Par exemple $(2, 4) \in S$ car $2^4 = 4^2 = 16$ et $2 < 4$.
On définit aussi les trois fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0,\ \varphi(x) = \frac{\ln(x)}{x} \text{ et } \forall t > 0,\ f(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \text{ et } g(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}.$$

a. Étudier rapidement φ et tracer son graphe. En déduire que $(x, y) \in S \Longrightarrow 1 < x < e < y$.
b. Déterminer un intervalle I tel que g réalise une bijection entre $\mathbb{R}_+^*$ et I.
On admettra, le travail est similaire, que f réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}_+^*$ et $]1\,; e[$.
c. Prouver alors que $t \mapsto \big(f(t), g(t)\big)$ constitue un paramétrage de S (pour $t \in \mathbb{R}_+^*$).
d. Étudier les deux extrémités de cette courbe $x = f(t)$, $y = g(t)$: quand $t \to 0+$ et quand $t \to +\infty$.

24.2 **a.** Étudier et représenter la courbe définie par $\Gamma\ :\ x = 4t^3,\ y = 3t^4$.

b. Former une équation de la tangente au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

c. Déterminer un paramétrage du lieu $\mathcal{L}$ des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à Γ (c'est-à-dire l'orthoptique de Γ) et tracer cette courbe.

24.3 *ENS Cachan PSI 2016* Hugo Saint-Vignes

a. Démontrer la formule de TAYLOR reste intégral.
b. Démontrer l'inégalité de TAYLOR : $\left| f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.
c. Soit f telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et majorer $||f'||_\infty$ en fonction de $||f||_\infty$ et $||f''||_\infty$.
d. Soit $f : [0; b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f''(0) = 0$ et $f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0; b],\ g(x) = f(x)$ et $\forall k \in \{0, 1, 2\},\ ||g^{(k)}||_{\infty, \mathbb{R}} = ||f^{(k)}||_{\infty, [0;b]}$.
e. Soit $a \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $b = a + \dfrac{\cos(a)}{2\sin(a)}$. Soit $f : [0; b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sin(x)$ si $x \in [0; a]$ et sinon $f(x) = \sin(a) + (x-a)\cos(a) - \dfrac{1}{2}(x-a)^2 \sin(a)$. Montrer que f est de classe C^2 sur $[0; b]$. Montrer que f vérifie les hypothèses de la question précédente.

24.4 *Mines PSI 2017* Élio Garnaoui II Soit $n \geqslant 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $(S)\ :\ X' = AX$.

a. On suppose n impair. Montrer que A n'est pas inversible et qu'il existe une solution X_0 non nulle constante de (S). Montrer que toute solution est incluse dans un hyperplan affine ; c'est-à-dire qu'il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que si $X : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t) e_k$ est une solution de (E), alors x_n est constante.
b. On suppose à nouveau n quelconque. Si X et Y sont solutions de (E), montrer que $X^T Y$ est constant. En déduire que toutes les solutions de (S) sont bornées.