TD 23 : FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

PSI 1 2024-2025 **mercredi 26 mars 2025**

23.1 **a.** D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs propres. Soit $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \neq 0$, alors $(f(x)|x) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k v_k \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2 > 0$ car les λ_k sont strictement positifs par hypothèse et les α_k non tous nuls.

b. La fonction g est polynomiale (en n variables) en les coordonnées de x donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Si on pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, si on associe à x et u les vecteurs colonnes X et U de leurs coordonnées dans la base canonique, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x) = \frac{1}{2}{}^tXAX - {}^tUX = \frac{1}{2}\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}x_ix_j - \sum\limits_{k=1}^{n} u_kx_k$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, pour entier $p \in [\![1;n]\!]$ et en tout point de l'espace $x \in \mathbb{R}^n$, comme on a $g(x) = \frac{a_{p,p}}{2}x_p^2 + \Big(\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{n} a_{i,p}x_i\Big)x_p - u_px_p + \frac{1}{2}\sum\limits_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq p,\ j\neq p}} a_{i,j}x_ix_j - \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{n} u_kx_k$, en dérivant par rapport à x_p, on obtient $\frac{\partial g}{\partial x_p} = a_{p,p}x_p + \Big(\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{n} a_{i,p}x_i\Big) - u_p = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{p,j}x_j - u_p$. En recomposant le vecteur, comme $\overrightarrow{\text{grad}}\,g(x) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\Big)$, cela donne $\overrightarrow{\text{grad}}\,g(x) = \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j - u_1, \cdots, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j - u_n\Big) = f(x) - u$.

c. On cherche un vecteur x tels que $\overrightarrow{\text{grad}}\,g(x) = \overrightarrow{0}$ ce qui équivaut à $f(x) = u$. mais comme f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ car toutes ses valeurs propres sont strictement positives, $f(x) = u \iff x = f^{-1}(u)$. Ainsi $z = f^{-1}(u)$ est l'unique point critique de g et on a $g(z) = -\frac{1}{2}(u|f^{-1}(u))$.

d. Pour $h \in \mathbb{R}^n$, $g(z+h) = \frac{1}{2}(f(z+h)|z+h) - (u|z+h) = \frac{1}{2}(u+f(h)|f^{-1}(u)+h) - (u|f^{-1}(u)) - (u|h)$. Donc $g(z+h) = \frac{1}{2}(u|h) + \frac{1}{2}(u|f^{-1}(u)) + \frac{1}{2}(f(h)|f^{-1}(u)) + \frac{1}{2}(f(h)|h) - (u|f^{-1}(u)) - (u|h)$ mais f est symétrique donc $(f(h)|f^{-1}(u)) = (h|f(f^{-1}(u))) = (h|u)$ d'où $g(z+h) = g(z) + \frac{1}{2}(f(h)|h) > g(z)$ dès que $h \neq 0$ d'après **a.**. g admet donc un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$ valant $-\frac{1}{2}(u|f^{-1}(u))$ et uniquement atteint en z.

23.2 **a.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xyz-1$. f est de classe C^∞ par opérations et $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x,y,z) = (2x-2yz, 2y-xz, 2z-2xy)$. Ainsi, (x,y,z) est un point singulier (non régulier) de S si et seulement si $(2x-2yz, 2y-xz, 2z-2xy) = (0,0,0)$. Dans ce cas, on a $xyz = (xyz)^2$ en multipliant les trois relations ce qui prouve que $xyz = 0$ ou $xyz = 1$. Si $xyz = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$ mais dans ce cas, si par exemple $x = 0$, on a $y = xz = 0$ et $z = xy = 0$ donc $(x,y,z) = (0,0,0)$ qui n'est pas dans S. Par contre, si $xyz = 1$, on a $x = yz = \frac{1}{x}$ donc $x = \pm 1$ et, de même, $y = \pm 1$ et $z = \pm 1$. En testant les huit cas, les seuls points critiques de f sont les points $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$. Or ces quatre points critiques sont dans S, et ce sont donc des points singuliers de S (ils forment un tétraèdre régulier).

b. Si $x^2+y^2+z^2-2xyz = 1$ et $z = 0$, alors $x^2+y^2 = 1$ ce qui est l'équation du cercle de centre $(0,0,0)$ et de rayon $R = 1$ inclus dans le plan $z = 0$. Aucun des points $M_0 = (x_0,y_0,0)$ de ce cercle n'est un point singulier de S d'après la question **a.**, et on a donc en ce point un plan tangent P_0 à S en M_0. On calcule $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0,0) = (2x_0, 2y_0, -2x_0y_0)$ et on sait que ce vecteur est normal à P_0 qui passe par M_0 d'où l'équation de P_0 : $x_0(x-x_0)x_0 + y_0(y-y_0) - x_0y_0(z-0) = 0 \iff x_0x + y_0y - x_0y_0z = x_0^2 + y_0^2 = 1$.

23.3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$. f est de classe C^∞ par opérations et on calcule $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)$. Ainsi, le seul point critique de f est $(0,0,0)$ qui n'appartient pas à S. S est donc régulière par définition puisque tous ses points sont réguliers : c'est un ellipsoïde mais pas de révolution.

En un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S, comme $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ est orthogonal au plan P_0 tangent à S en M_0, une équation de P_0 est $P_0\ :\ x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+3z_0(z-z_0) = 0 \iff x_0x+2y_0y+3z_0z = x_0^2+2y_0^2+3z_0^2 = 21$ (à nouveau obtenue par dédoublement comme pour toute quadrique).

Le vecteur $\vec{v} = (1,4,6)$ est clairement un vecteur normal à P. On cherche donc les points M_0 tels que $\vec{v}$ est aussi normal à P_0, ce qui équivaut au fait que les deux vecteurs non nuls $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ sont colinéaires. Si M_0 convient, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ x_0 = \lambda,\ 2y_0 = 4\lambda$ et $3z_0 = 6\lambda$. Puisque $M_0 \in S$, $(1+8+12)\lambda^2 = 21 \iff \lambda = \pm 1$ donc $M_0 = M_1 = (1,2,2)$ ou $M_0 = M_2 = (-1,-2,-2)$.

Réciproquement, d'après les calculs précédents, les plans tangents P_1 et P_2 à S en M_1 et M_2 respectivement ont pour équation $P_1\ :\ x+4y+6z = 21$ et $P_2\ :\ x+4y+6z = -21$ et ils ont bien des vecteurs normaux colinéaires à $\vec{v}$ donc P_1 et P_2 sont bien parallèles à P.

Par analyse-synthèse, il existe deux plans qui sont à la fois tangents à S et parallèles à P, ce sont les plans P_1 et P_2 tangents à S respectivement aux points M_1 et M_2.

23.4 L'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est la réunion de deux composantes connexes toutes les deux ouvertes, ce sont $U_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $U_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. La fonction $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \times]0;\pi[\to U_1$ définie par $\varphi_1(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est de classe C^1 et bijective (changement de variable polaire). De même, la fonction $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;0[\to U_2$ définie par $\varphi_2(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est de classe C^1 et bijective.

<u>Analyse</u> Soit $f : U_1 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solution de (E) sur U_1, posons $F_1 = f \circ \varphi_1$ qui est aussi de classe C^1 par composition mais sur $\mathbb{R}_+^* \times]0;\pi[$. Par la formule du cours, comme $F_1(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, on a $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0;\pi[,\ \frac{\partial F_1}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ (inutile mais on a aussi $\frac{\partial F_1}{\partial \theta}(\rho,\theta) = -\rho\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$). En notant $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, on en déduit que $\rho\frac{\partial F_1}{\partial \rho}(\rho,\theta) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Puisque f est solution de (E) sur U_1, on a donc $\forall (\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0;\pi[,\ (F)\ :\ \rho\frac{\partial F_1}{\partial \rho}(\rho,\theta) - F_1(\rho,\theta) = -\rho^2$. Pour chaque valeur de θ, on a donc une équation différentielle linéaire qu'on sait résoudre classiquement : $\exists C_1(\theta) \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ F_1(r,\theta) = C_1(\theta)r - \frac{r^2}{2}$ (la solution particulière $r \mapsto -\frac{r^2}{2}$ se voit ou on la trouve par variation de la constante). La fonction C_1 doit être de classe C^1 sur $]0;\pi[$ car f est de classe C^1 sur U_1 (en effet $\frac{\partial F_1}{\partial \theta} = C_1'(\theta)$ en cas d'existence). Or, pour $(x,y) \in U_1$, on a $\text{cotan}(\theta) = \frac{x}{y}$ donc $\theta = \text{Arccotan}\left(\frac{x}{y}\right)$ (facile à définir comme Arctan, $\text{Arccotan} : \mathbb{R} \to]0;\pi[$) et, en définissant $h_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $h_1(t) = C_1(\text{Arccotan}(t))$, $\forall (x,y) \in U_1,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,h_1\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2+y^2}{2}$.

On trouve de même que si $f : U_2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solution de (E) sur U_2, en posant $F_2 = f \circ \varphi_2$, alors il existe une fonction $C_2 :] -\pi;0[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ F_2(r,\theta) = C_2(\theta)r - \frac{r^2}{2}$. Pour $(x,y) \in U_2$, on a $\text{cotan}(\theta) = \frac{x}{y}$ donc $\theta + \pi = \text{Arccotan}\left(\frac{x}{y}\right)$ donc il existe $h_2 : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ (en posant

$h_2 : t \mapsto C_2(\text{Arccotan}\,(t)-\pi))$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y)\in U_2,\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}h_2\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x^2+y^2}{2}$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, soit $f : U_1 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y)\in U_1,\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}h_1\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x^2+y^2}{2}$ avec $h_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors, f est une fonction de classe C^1 sur U_1 par opérations et on trouve $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}h_1\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}h_1'\left(\frac{x}{y}\right)-x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}h_1\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}h_1'\left(\frac{x}{y}\right)-y$. Ainsi, en reportant, on a $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-f(x,y)=\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right]h_1\left(\frac{x}{y}\right)+\left[\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y}-\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right]h_1'\left(\frac{x}{y}\right)-x^2-y^2=-x^2-y^2$. Même chose sur U_2.

<u>Conclusion</u> : les solutions de (E) sur U_1 sont les $f : (x,y)\mapsto h_1\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{2}$ où h_1 est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et les solutions de l'équation (E) sur U_2 les $f : (x,y)\mapsto h_2\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{2}$ où h_2 est C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$.

23.5 f est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ qui est un ouvert donc si f admet en $M=(x,y,z)$ un extremum local, on a forcément $\nabla f(M)=\overrightarrow{0} \iff (2x-2yz, 2y-2xz, 2z-2xy)=(0,0,0)$. On en déduit que $y(1-z^2)=0$ par exemple donc $y=0$ ou $z=1$ ou $z=-1$. Par symétrie, on a $\{x,y,z\}\subset\{-1,0,1\}$ et en reportant dans le système : $(x,y,z)\in\big\{(0,0,0),(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)\big\}$.

- $f(t,t,0)=2t^2\to+\infty$ quand t tend vers $+\infty$ donc f n'a pas de maximum absolu.
- $f(t,t,t)=3t^2-2t^3\to-\infty$ quand t tend vers $+\infty$ donc f n'a pas de minimum absolu.

En prévision des calculs futurs, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=2$ et, avec SCHWARZ car f est de classe C^2 puisqu'elle est polynomiale, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)=-2z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)=-2y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)=-2x$ donc la matrice hessienne vaut $H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2&-2z&-2y\\-2z&2&-2x\\-2y&-2x&2\end{pmatrix}$.

- Au voisinage de $(0,0,0)$, $H_f(0,0,0)=2I_3$ est symétrique définie positive car sa seule valeur propre est $2>0$ donc f admet en $(0,0,0)$ un minimum local d'après le cours.
- Au voisinage de $(1,1,1)$, $H_f(1,1,1)=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est $(X+2)(X-4)^2$ donc $H_f(1,1,1)$ ayant des valeurs propres strictement négatives et strictement positives, f admet en $(1,1,1)$ un point selle, ce qu'on pouvait aussi constater car $f(1,1,1)=1$ et $f(1+t,1,1-t)=1+4t^2>f(1,1,1)$ pour tout $t\neq 0$ et $f(1+t,1+t,1+t)=1-3t^2-2t^3<f(1,1,1)$ pour t non nul et assez petit.
- Au voisinage de $(1,-1,-1)$, $H_f(1,-1,-1)=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est aussi $(X+2)(X-4)^2$ donc f admet en $(1,-1,-1)$ un point selle, ce qu'on pouvait aussi constater car $f(1,-1,-1)=1$ et $f(1+t,-1,-1+t)=1+4t^2>f(1,1,1)$ pour tout $t\neq 0$ et $f(1-t,-1+t,-1+t)=1-3t^2+2t^3<f(1,1,1)$ pour t non nul et assez petit.
- Comme $f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y)$, c'est pareil pour les deux derniers points $(-1,1,-1),(-1,-1,1)$ en lesquels f admet aussi des points cols.

23.6 **a.** À $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on dérive avec règle de la chaîne, puisque f et $t \mapsto t^a$ sont de classe C^1, la relation $f(tx,ty) = t^a f(x,y)$ pour avoir $\forall t > 0,\ \dfrac{\partial(tx)}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + \dfrac{\partial(ty)}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = at^{a-1}f(x,y)$ ce qui s'écrit aussi $\forall t > 0,\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = at^{a-1}f(x,y)$. Il suffit ensuite de prendre $t = 1$ dans cette relation pour obtenir la relation voulue : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = af(x,y)$ qui est valable pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b. À $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(tx,ty) - t^a f(x,y)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall t > 0,\ tg'(t) = tx\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + ty\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) - at^a f(x,y) = af(tx,ty) - at^a f(x,y) = ag(t)$. On résout cette équation différentielle et on a $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ g(t) = \alpha t^a$ mais comme $g(1) = 0$, on trouve $\alpha = 0$ et g nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $f(0,0) = 0$ en prenant $t = 1$ et $x = y = 0$ dans $(E_a)\ :\ x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = af$. Or $\lim\limits_{t \to 0^+} t^a = 0$ car $a > 0$ donc on peut écrire $0^a = 0$ et $g(0) = f(0,0) - 0^a f(0,0) = 0$ ce qui prouve que g est nulle sur $\mathbb{R}_+$: $\forall t \geqslant 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx,ty) = t^a f(x,y)$ (on dit alors que f est homogène de degré a).

c. Ce qu'on a fait aux questions précédentes marche encore si $a = 0$ car $0^0 = 1$. Ainsi, si on pose $(E_0)\ :\ x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ l'équation homogène associée à (E), on peut déduire de la question **b** que l'on a $\forall t \geqslant 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y)$ ce qui montre qu'en polaires (avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$), f ne dépend que de θ et pas de r. Il existe donc une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 2π-périodique telle que $f(x,y) = h(\theta)$. Comme la fonction $g : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie $\forall t > 0,\ g(tx,ty) = t^2 g(x,y)$, la question **a.** montre que $x\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2g$ donc que la fonction $\dfrac{g}{2}$ est solution particulière de (E) sur U. Par théorème de structure pour cette équation aux dérivées partielles linéaire avec second membre (comme pour les équations différentielles), les solutions générales de (E) sur U sont de la forme $f : (x,y) \mapsto h(\theta) + \dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{2}$ (le problème est de trouver une expression de θ en fonction de x et y qui ne considère pas des cas particuliers).

On aurait aussi pu passer en polaires en posant $h : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et trouver l'équation $\dfrac{\partial h}{\partial r} = 0$ que doit vérifier h si f vérifie (E) en raisonnant par analyse/synthèse.

23.7 **a.** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (formé de deux demi-plans) et pour tout $(x,y) \in D$, on a $f(x,y) = y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ donc f est continue sur D par théorèmes généraux.

Comme $||\sin||_\infty = 1$, on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leqslant y^2$ (valable aussi si $y = 0$). Par conséquent, si $x_0 \in \mathbb{R}$, comme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$ (par continuité des fonctions polynomiales), on a par encadrement : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,0)$ donc f est continue en $(x_0,0)$. On en conclut que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Si $(x,y) \in D$, on a par calcul direct : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t,0) - f(x_0,0)}{t} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0,t) - f(x_0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} t\sin\left(\dfrac{x_0}{t}\right) = 0$.
Ainsi, les dérivées partielles de f existent partout dans $\mathbb{R}^2$.

c. Comme avant, par théorèmes généraux, les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D.

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$, comme $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant |y|$, comme avant, par encadrement, on a la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$ donc sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Encore une fois, en majorant $|\sin|$ par 1, on a la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de $(x,y) \mapsto 2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Mais, si

$x_0 \neq 0$, la fonction $\psi_{x_0} : y \mapsto x_0 \cos\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$ n'admet visiblement pas de limite en 0 (prendre $y = \dfrac{x_0}{2n\pi}$ puis $y = \dfrac{x_0}{(2n+1)\pi}$ dans ψ_{x_0}), a fortiori $\psi : (x,y) \mapsto x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ n'en admet pas non plus donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (en tant que somme d'une fonction continue et d'une fonction qui ne l'est pas) n'est pas continue en $(x_0, 0)$.
Si $x_0 = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_0\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2n\pi}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_0\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right) = -\infty$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2n\pi}\right) = (0,0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right) = (0,0)$: ψ_0 n'est pas continue en $(0,0)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

23.8 **a.** Si $A \cup B = \Omega$ et A, B incompatibles, alors $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ donc en notant $x = P(A)$, on a $\big|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\big| = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = x(1-x)$ et l'étude sur $[0;1]$ de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ montre qu'elle admet son maximum en $\dfrac{1}{2}$ où elle vaut $\dfrac{1}{4}$ (parabole). Ainsi $\big|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\big| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
b. Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A\cap B) = 0$. Avec $x = \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(\Omega) = 1$ donc $\mathbb{P}(B) \leqslant 1 - x$. Ainsi $\big|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\big| = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \leqslant x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
c. K est un tétraèdre et F est la réunion de 4 triangles dans l'espace dont 3 sont rectangles isocèles et le dernier équilatéral : $T_1 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x = 0 \text{ et } y+z \leqslant 1\}$, $T_2 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid y = 0 \text{ et } x+z \leqslant 1\}$, $T_3 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid z = 0 \text{ et } x+y \leqslant 1\}$ et $T_4 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x+y+z = 1\}$.
- Si $(x,y,z) \in T_1$, on a $h(x,y,z) = h(0,y,z) = -yz$ donc $-\dfrac{1}{4} \leqslant -y(1-y) \leqslant h(x,y,z) \leqslant 0$. Or $(0,0,0) \in T_1$ et $h(0,0,0) = 0$ et $\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \in T_1$ et $h\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$. Ainsi : $\underset{T_1}{\mathrm{Min}}\, h = -\dfrac{1}{4}$ et $\underset{T_1}{\mathrm{Max}}\, h = 0$.
- Si $(x,y,z) \in T_2$, on a $h(x,y,z) = h(x,0,z) = x(1-x-z)$ donc $0 \leqslant h(x,y,z) \leqslant x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. Or $(0,0,0) \in T_2$ et $h(0,0,0) = 0$ et $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right) \in T_2$ et $h\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right) = \dfrac{1}{4}$. Ainsi : $\underset{T_2}{\mathrm{Min}}\, h = 0$ et $\underset{T_2}{\mathrm{Max}}\, h = \dfrac{1}{4}$.
- Par symétrie entre y et z dans h, on a aussi $\underset{T_3}{\mathrm{Min}}\, h = 0$ et $\underset{T_3}{\mathrm{Max}}\, h = \dfrac{1}{4}$.
- Si $(x,y,z) \in T_4$, on a $h(x,y,z) = -yz$ et comme avant $\underset{T_4}{\mathrm{Min}}\, h = -\dfrac{1}{4}$ et $\underset{T_4}{\mathrm{Max}}\, h = 0$.

Ainsi $\underset{F}{\mathrm{Min}}\, h = -\dfrac{1}{4}$ et $\underset{F}{\mathrm{Max}}\, h = \dfrac{1}{4}$.
d. h est continue sur le compact K : h y est bornée et y atteint ses bornes. Comme $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = 1-2x-y-z$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = -x-z$ et $\dfrac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = -x-y$, il n'y a pas de point critique de h dans K.
Ainsi, les extrema de h sur K sont atteints en des points de sa frontière sur laquelle $|h| \leqslant \dfrac{1}{4}$. Par conséquent $\underset{K}{\mathrm{Min}}\, h = -\dfrac{1}{4}$ et $\underset{K}{\mathrm{Max}}\, h = \dfrac{1}{4}$ atteint en $\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$ par exemple.
e. Soit A, B deux évènements, posons $x = \mathbb{P}(A\cap B) \geqslant 0$, $y = \mathbb{P}(A \setminus B) \geqslant 0$ et $z = \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant 0$. Comme $x+y+z = \mathbb{P}(A\cup B) \leqslant 1$, le point (x,y,z) appartient à K. Alors $\mathbb{P}(A) = x+y$, $\mathbb{P}(B) = x+z$ et $\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = x - (x+y)(x+z) = x - x^2 - xy - xz - yz = x(1-x-y-z) - yz = h(x,y,z)$. D'après la question **c.**, on a $|h(x,y,z)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $\big|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\big| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

23.9 Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme $|f(x,y)| \leqslant |xy|\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \leqslant ||(x,y)||_2^2$ donc, comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} ||(x,y)||_2 = 0$, par encadrement, on trouve $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y) = -f(y,x)$ (1) donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D par opérations. De plus, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y| \leqslant 2||(x,y)||_2$ et, comme en **a.**, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.
Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{t} = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$. On peut aussi calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$.
Par contraposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

23.10 **a.** Soit $x \in [a;b]$ et $w_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $w_x(t) = v_t(x) = (x, \varphi_t(x), \varphi_t'(x)) = v(x) + t(0, \varphi(x), \varphi'(x))$. Comme les trois coordonnées de w_x sont affines en fonction de t, elles sont continues sur $\mathbb{R}$ donc w_x l'est aussi par théorème. Or $w_x(0) = v_0(x) = v(x) \in U$ par hypothèse et U est un ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(v(0), \varepsilon) \subset U$. Par continuité de w_x en 0, $\exists \alpha > 0$, $\forall t \in [-\alpha;\alpha]$, $|w_x(t) - w_x(0)| = |v_t(x) - v(x)| < \varepsilon$. Ainsi, $\forall t \in [-\alpha;\alpha]$, $|v_t(x) - v(x)| < \varepsilon$ donc $v_t(x) \in B(v(0), \varepsilon) \subset U$ d'où $v_t(x) \in U$.

b. D'abord, l'intégrale I_{φ_t} est bien définie car, par opérations, $x \mapsto f(v_t(x)) = f(x, \varphi(x)+tg(x), \varphi'(x)+tg'(x))$ est continue sur le segment $[a;b]$. Dérivons sous le signe somme en définissant $\varphi : [-\alpha;\alpha] \times [a;b] \to \mathbb{R}$ par la relation $\varphi(t,x) = f(v_t(x)) = f(x, \varphi(x)+tg(x), \varphi'(x)+tg'(x))$.

- $\forall x \in [a;b]$, $t \mapsto \varphi(t,x)$ est de classe C^1 sur $[-\alpha;\alpha]$ par la règle de la chaîne et on a la relation suivante : $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = g(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}(v_t(x)) + g'(x)\dfrac{\partial f}{\partial z}(v_t(x))$.
- $\forall t \in [-\alpha;\alpha]$, $x \mapsto \varphi(t,x)$ est continue sur le segment $[a;b]$ donc y est intégrable. De plus, l'application $x \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)$ est continue sur $[a;b]$ par opérations.
- Comme f est de classe C^2 sur U, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ y sont de classe C^1 donc continues. Comme φ et g sont de classe C^1 sur $[a;b]$, φ_t est de classe C^1 sur $[a;b]$ donc $(t,x) \mapsto v_t(x) = (x, \varphi(x)+tg(x), \varphi'(x)+tg'(x))$ est continue sur le fermé borné $K = [-\alpha;\alpha] \times [a;b]$. Par opérations, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ est continue sur K donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes. Il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall (t,x) \in K$, $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant M = \psi(t)$ et ψ est continue et intégrable sur $[a;b]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, h est dérivable sur $[-\alpha;\alpha]$ donc en particulier en 0 où l'on a $h'(0)=\int_a^b\Big(g(x)\frac{\partial f}{\partial y}(v_0(x))+g'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(v_0(x))\Big)dx$. Ainsi, $h'(0)=\int_a^b g(x)\frac{\partial f}{\partial y}(v(x))dx+\int_a^b g'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))dx$ par linéarité. Dans la seconde intégrale, on pose $u(x)=g(x)$ et $w(x)=\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))$, u et w sont bien de classe C^1 sur $[a;b]$ car f est de classe C^2 sur U. Comme $w'(x)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))\Big)$, $u(a)=u(b)=0$, par intégration par parties, on trouve $\int_a^b g'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))dx=-\int_a^b g(x)\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))\Big)dx$ de sorte qu'on a comme attendu $h'(0)=\int_a^b\Big[\frac{\partial f}{\partial y}(v(x))-\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))\Big)\Big]g(x)dx$ par linéarité de l'intégrale.

c. Posons $c: x\mapsto\frac{\partial f}{\partial y}(v(x))-\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))\Big)$, la question précédente montre que $\int_a^b c(x)g(x)dx=0$ pour toute fonction $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(a)=g(b)=0$. Par la règle de la chaîne, on obtient la relation $c(x)=\frac{\partial f}{\partial y}(v(x))-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(v(x))-\varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(v(x))-\varphi''(x)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(v(x))$ donc c est de classe C^1 car φ et f sont supposées de classe C^3. Si on prend $g(x)=c(x)(x-a)(b-x)$, alors g est bien de classe C^1 sur $[a;b]$ et, pour $x\in[a;b]$, $c(x)g(x)=c^2(x)(x-a)(b-x)\geqslant 0$ donc $\int_a^b c(x)g(x)dx=0\Longrightarrow\forall x\in[a;b],\ c^2(x)(x-a)(b-x)=0$ donc $\forall x\in]a;b[,\ c(x)=0$. Enfin, par continuité de c en a et en b, on en déduit que $c(a)=c(b)=0$ donc c est la fonction nulle sur $[a;b]$ et $\forall x\in[a;b],\ \frac{\partial f}{\partial y}(v(x))-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(v(x))-\varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(v(x))-\varphi''(x)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(v(x))=0$.

23.11 **a.** Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\varphi:(x,y)\mapsto\int_x^y f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=-f(x)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=f(y)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$ comme la fonction f. Comme $(x,y)\to y-x$ est de classe C^1 car polynomiale et ne s'annule pas sur D par définition, g est de classe C^1 sur D par opérations.

De plus, $\forall(x,y)\in D$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y f(t)dt-\frac{f(x)}{y-x}=\frac{1}{(y-x)^2}\Big(\int_x^y f(t)dt-(y-x)f(x)\Big)$. Comme on a $(y-x)f(x)=\int_x^y f(x)dt$, on a la formule plus compacte $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y(f(t)-f(x))dt$.

De même, on a $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y f(t)dt+\frac{1}{y-x}f(y)=\frac{1}{(y-x)^2}\Big((y-x)f(y)-\int_x^y f(t)dt\Big)$, ou encore $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y(f(y)-f(t))dt$, relation qu'on aurait pu obtenir aussi car $g(x,y)=g(y,x)$ ce qui montre, en dérivant ceci par rapport à x par la règle de la chaîne, que $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$.

b. Soit $h\neq 0$, $g(a,a+h)-g(a)=\frac{1}{h}\Big(\int_a^{a+h}f(t)dt\Big)-f(a)$. La fonction $F:h\mapsto\int_a^{a+h}f(t)dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car $F'(h)=f(a+h)$ (f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et on a $\forall h\neq 0,\ g(a+h,a)-g(a)=\frac{F(h)-hf(a)}{h}$.

D'après Taylor-Young, puisque F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, le développement limité d'ordre 2 de F en 0 est donné par $F(h)\underset{0}{=}F(0)+F'(0)h+\frac{F''(0)}{2}h^2+o(h^2)$. Or $F(0)=0$, $F'(0)=f(a)$ et $F''(0)=f'(a)$, donc $F(h)-hf(a)\underset{0}{=}\frac{f'(a)}{2}h^2+o(h^2)$ d'où $\frac{g(a,a+h)-g(a,a)}{h}=\frac{f'(a)}{2}+o(1)$. On en déduit que $\frac{\partial g}{\partial y}(a,a)=\frac{f'(a)}{2}$.

Comme $g(a+h,a)=g(a,a+h)$, on a aussi $\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)=\frac{f'(a)}{2}$.

c. Si $x\neq y$, d'après **a.**, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y(f(t)-f(x))dt$. En posant $u:t\mapsto f(t)-f(x)$ et $v:t\mapsto-(y-t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\widetilde{[x;y]}$ donc, par intégration par parties, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y(f(t)-f(x))dt=\frac{1}{(y-x)^2}\Big([u(t)v(t)]_x^y+\int_x^y(y-t)f'(t)dt\Big)=\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y(y-t)f'(t)dt$.

Or $\frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \frac{f'(a)}{2} = f'(a) \times \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)dt$ car $\int_x^y (y-t)dt = \Big[-\frac{-(y-t)^2}{2}\Big]_x^y$. Ainsi, en soustrayant les deux expressions, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)\big(f'(t)-f'(a)\big)dt$ si $(x,y) \in D$.

d. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]a-\alpha; a+\alpha[$, $|f'(t) - f'(a)| < 2\varepsilon$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(a,a)||_\infty < \alpha$, traitons deux cas :

- si $x = y$, alors $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \frac{|f'(x)-f'(a)|}{2} < \varepsilon$ car $|x-a| < \alpha$.
- si $x \neq y$, avec la question précédente et par inégalité de la moyenne, on obtient la majoration $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leqslant \frac{1}{(y-x)^2}\left|\int_x^y (y-t)|f'(t)-f'(a)|dt\right| < \frac{\varepsilon}{(y-x)^2}\left|\Big[-\frac{-(y-t)^2}{2}\Big]_x^y\right| = \varepsilon$.

Ceci prouve que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue en (a,a) pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc, avec **a.**, que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même, $\frac{\partial g}{\partial y}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^2$. Par définition, la fonction g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

23.12 Avec un dessin en dimension 1, on se rend compte que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 admet un minimum local en x_0, alors $f''(x_0) \geqslant 0$. On s'attend donc à avoir $\Delta f(x_0,y_0) \geqslant 0$ en généralisant !

Méthode 1 : on peut écrire la relation $\text{Tr}\,(H_f(x_0,y_0)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \Delta f(x_0,y_0)$ si on pose $H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ la hessienne de f en (x_0,y_0). Si $H_f(x_0,y_0)$ est définie positive, alors ses deux valeurs propres λ_1, λ_2 sont strictement positives par définition. Comme $\text{Tr}\,(H_f(x_0,y_0))$ est la somme de ces valeurs propres, on a $\Delta f(x_0,y_0) > 0$. Le problème est que f peut admettre un minimum local en (x_0,y_0) sans que $H_f(x_0,y_0)$ soit définie positive. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\Delta f(x_0,y_0)$, alors $\text{Tr}\,(H_f(x_0,y_0)) = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ donc, par exemple, $\lambda_1 < 0$. Soit un vecteur propre unitaire v_1 de $H_f(x_0,y_0)$ associé à λ_1. Comme on connaît le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de (x_0,y_0) qui est $f((x_0+y_0)+v) \underset{v\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + (\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)|v) + \frac{v^T H_f(x_0,y_0)v}{2} + o(||v||^2)$. Comme f admet en (x_0,y_0) et que $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = (0,0)$. En restreignant le développement à $v = tv_1$, on a $f((x_0+y_0)+tv_1) \underset{t\to0}{=} f(x_0,y_0) + \frac{t^2 v_1^T H_f(x_0,y_0)v_1}{2} + o(t^2)$. Or $H_f(x_0,y_0)v_1 = \lambda_1 v_1$ et λ_1 est unitaire donc $f((x_0+y_0)+tv_1) \underset{t\to0}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\lambda_1 t^2}{2} + o(t^2)$ ce qui montre que $\frac{f((x_0,y_0)+tv_1) - f(x_0,y_0)}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{\lambda_1}{2}$ ce qui contredit la minimalité locale de f au voisinage de (x_0,y_0).

Méthode 2 : soit les deux fonctions $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = f(x,y_0)$ et $f_2(y) = f(x_0,y)$. Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, f_1 et f_2 sont aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par composition avec les fonctions $\varphi_1 : x \mapsto (x,y_0)$ et $\varphi_2 : y \mapsto (x_0,y)$ car $f_1 = f \circ \varphi_1$ et $f_2 = f \circ \varphi_2$. De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)$, $f_1''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y_0)$ et $f_2'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$, $f_2''(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y)$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un ouvert et que f admet en (x_0,y_0) un minimum local, d'après le cours, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = (0,0)$ donc $f_1'(x_0) = f_2'(y_0) = 0$.

Comme f_1 et f_2 sont de classe C^2, elles admettent en tout point un développement limité d'ordre 2 par le théorème de TAYLOR-YOUNG. Notamment, $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} f_1(x_0) + (x-x_0)f_1'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f_1''(x_0) + o\big((x-x_0)^2\big)$ et $f_2(x) \underset{y\to y_0}{=} f_2(y_0) + (y-y_0)f_2'(y_0) + \frac{(y-y_0)^2}{2}f_2''(y_0) + o\big((y-y_0)^2\big)$. Comme on a localement les minorations $f(x,y_0) - f(x_0,y_0) \geqslant 0$ et $f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \geqslant 0$ quand x est proche de x_0 et y proche de y_0, cela donne localement $f_1(x)-f_1(x_0) \geqslant 0$ et $f_2(y)-f_2(y_0) \geqslant 0$. Comme $f_1(x)-f_1(x_0) \underset{x\to x_0}{=} \dfrac{(x-x_0)^2}{2}f_1''(x_0)+o\big((x-x_0)^2\big)$ et $f_2(x) - f_2(x_0) \underset{y\to y_0}{=} \dfrac{(y-y_0)^2}{2}f_2''(y_0) + o\big((y-y_0)^2\big)$, les signes précédents imposent que $f_1''(x_0) \geqslant 0$ et $f_2''(y_0) \geqslant 0$, sinon, par exemple $\dfrac{f_1(x)-f_1(x_0)}{(x-x_0)^2} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{f_1''(x_0)}{2} < 0$ si on avait $f_1''(x_0) < 0$ ce qui est absurde.

Par conséquent, $\Delta f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = f_1''(x_0)+f_2''(y_0) \geqslant 0$.

23.13 **a.** La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ par opérations car les fonctions polynomiales $(x_1,\cdots,x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ et $(x_1,\cdots,x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ et même $\exp$ sont de classe C^1. Pour $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on calcule le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_1,\cdots,x_n) = \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\Big)\Big(1-2x_1\sum\limits_{k=1}^{n} x_k,\cdots,1-2x_n\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)$.

<u>Analyse</u> : si $(x_1,\cdots,x_n)$ est un point critique de f, alors $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $1-2x_j\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$ donc $x_j \neq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{1}{2x_j}$ donc $x_1 = \cdots = x_n = \lambda$ et en reportant dans les équations, $1-2\lambda(n\lambda) = 0$ donc $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, si $(x_1,\cdots,x_n) = \pm\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2n}},\cdots,\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big)$, comme $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \pm n\times\dfrac{1}{\sqrt{2n}} = \pm\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = n\times\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_1,\cdots,x_n) = \exp\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)\Big(1-\dfrac{2}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}},\cdots,1-\dfrac{2}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big) = (0,\cdots,0)$.

Ainsi, il y a deux points critiques de f sur $\mathbb{R}^n$ qui sont $a_n = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{2n}},\cdots,\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big)$ et $-a_n$.

b. De même, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $j \in [\![1;n]\!]$, on calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(x_1,\cdots,x_n) = \Big(-2x_j-2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - 2x_j\Big(1-2x_j\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\Big)$ ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(a_n) = \Big(-2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}-2\sqrt{\dfrac{n}{2}}-2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big(1-2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big)\Big)e^{-1/2} = -(n+1)\sqrt{\dfrac{2}{en}}$. Si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\cdots,x_n) = \Big(-2x_j-2x_i\Big(1-2x_j\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\Big) = \Big(-2x_i-2x_j+4x_ix_j\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\Big)$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_n) = \Big(-4\dfrac{1}{\sqrt{2n}}+\dfrac{4}{2n}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big)e^{-1/2} = -\sqrt{\dfrac{2}{en}}$. Ainsi, la matrice hessienne de f en a_n vaut

$$H = -\sqrt{\frac{2}{en}}\begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}.$$ Soit la matrice symétrique réelle $$M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix},$$

$$M - nI_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ est de rang 1, d'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M-nI_n)) = n-1$ donc n est une valeur propre de M d'ordre de multiplicité supérieure à $n-1$. De plus, en notant $v = (1,\cdots,1)$, on a $Mv = 2nv$ avec $v \neq 0$ donc $2n \in \mathrm{Sp}(M)$ de sorte que $\mathrm{Sp}(M) = \{n, 2n\} \subset \mathbb{R}_+^*$ (avec $\chi_M = (X-n)^{n-1}(X-2n)$). Ainsi, M est symétrique définie positive donc H est symétrique définie négative ce qui montre que f admet en a_n un maximum local.

c. Comme $f(-x_1,\cdots,-x_n) = -f(x_1,\cdots,x_n)$, puisque f admet en a_n un minimum local, la fonction f admet un maximum local en $-a_n$ car si $\forall x \in B(a_n,r),\ f(x) \geqslant f(a_n)$, alors $\forall -x \in B(-a_n,r),\ f(-x) \leqslant f(-a_n)$.

d. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|\Big) \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\Big)$ et on sait que $||x||_1 \leqslant \sqrt{n}||x||_2$ (par Cauchy-Schwarz) donc $|f(x)| \leqslant g(||x||_2)$ avec $g : r \mapsto \sqrt{n}re^{-r^2}$. Comme $\lim\limits_{r\to+\infty} g(r)$ par croissances comparées, on a bien $\lim\limits_{||x||_2\to+\infty} f(x) = 0$ par encadrement.

e. Posons $\alpha_n = f(a_n) > 0$, il existe $r_n > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_2 \geqslant r_n \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \frac{\alpha_n}{2}$ d'après la question précédente. La fonction f étant continue sur le fermé borné $K_n = B_f(0, r_n)$, comme on est en dimension finie, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum absolu sur K_n. Comme f est inférieure à $\frac{\alpha_n}{2}$ sur la frontière de K_n et que $f(a_n) = \alpha_n > \frac{\alpha_n}{2}$, le maximum de f sur K_n est atteint dans l'intérieur de K_n, c'est-à-dire dans l'ouvert $\mathring{K}_n = B(0, r_n)$ donc en un point critique, donc en a_n ou en $-a_n$ avec les calculs de la question **a.**. Mais $f(a_n) > 0$ et $f(-a_n) < 0$ donc $m_n = \underset{K_n}{\mathrm{Max}}(f) = f(a_n)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a deux possibilités :

- Si $x \in K_n$, alors $f(x) \leqslant m_n = f(a_n)$.
- Si $x \notin K_n$, alors $f(x) \leqslant \frac{\alpha_n}{2} \leqslant f(a_n)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \leqslant f(a_n) = m_n$ donc $\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Max}}\, f(x) = f(a_n)$ et f admet bien en a_n un maximum absolu.

23.14 La fonction $x \mapsto ||x||$ est de classe C^2 par composée sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ car $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ et que la fonction $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$ est polynomiale donc C^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $F : x \mapsto f\Big(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\Big)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Pour $k \in [\![1; n]\!]$, on a $\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} f'(||x||) = \frac{x_k}{||x||} f'(||x||)$. On dérive une fois de plus et on a $\frac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} f'(||x||) - \frac{2x_k^2}{2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{3/2}} f'(||x||) + \frac{4x_k^2}{4(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} f''(||x||)$ qui se met sous forme plus compacte en $\frac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2}(x) = \frac{f'(||x||)}{||x||} - \frac{x_k^2 f'(||x||)}{||x||^3} + \frac{x_k^2 f''(||x||)}{||x||^2}$.

Or, par hypothèse, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \Delta F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2}(x) = 0$ donc, en regroupant tous les termes, on obtient $\frac{nf'(||x||)}{||x||} - \frac{||x||^2 f'(||x||)}{||x||^3} + \frac{||x||^2 f''(||x||)}{||x||^2} = \frac{(n-1)f'(||x||)}{||x||} + f''(||x||) = 0$. Comme la fonction $x \mapsto ||x||$ est surjective de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ tf''(t) + (n-1)f'(t) = 0$. Ainsi, f' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E)\ :\ ty' + (n-1)y = 0$ qu'on sait résoudre et $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ f'(t) = \frac{\lambda}{t^{n-1}}$. Traitons deux cas :

- Si $n = 1$, on a donc $\forall t > 0,\ f'(t) = \lambda$ donc, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ f(t) = \lambda t + \mu$ et f est affine ce qui est logique pour une fonction dont la dérivée seconde est nulle !
- Si $n = 2$, on a donc, à nouveau, $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ f(t) = \lambda \ln(t) + \mu$.
- Si $n \geqslant 3$, il vient, encore, $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ f(t) = -\frac{\lambda}{(n-2)t^{n-2}} + \mu$.

$\boxed{\textbf{23.15}}$ **a.** Comme $(x,y) \mapsto x^2$, $(x,y) \mapsto y^2$ et $(x,y) \mapsto xy$ sont polynomiales donc de classe C^1 sur Ω et que la dernière ne s'annule pas, la fonction f est de classe C^1 sur Ω par inverse et somme de fonctions de classe C^1. Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto 2x - \frac{a}{x^2 y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto 2y - \frac{a}{xy^2}$ sont continues sur Ω pour les mêmes raisons et on a l'expression du gradient : $\forall (x,y) \in \Omega,\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = \left(2x - \frac{a}{x^2 y}, 2y - \frac{a}{xy^2}\right)$.

b. Comme $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t,t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \left(2t^2 + \frac{a}{t^2}\right) = +\infty$ alors que $\lim\limits_{t \to 0^+} (t,t) = (0,0)$, la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Comme Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet en un point un extremum local, ce point sera un point critique de f d'après le cours. Or, si $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = (0,0)$ pour $(x,y) \in \Omega$, on a $2x - \frac{a}{x^2 y} = 0$ (1) et $2y - \frac{a}{xy^2} = 0$ (2). En multipliant (1) et (2), il vient $4xy = \frac{a^2}{x^3 y^3}$ donc $(xy)^4 = \frac{a^2}{4}$ d'où $xy = \sqrt{\frac{a}{2}}$. Ainsi, en reportant ceci dans (1) et en multipliant par x, $2x^2 = \sqrt{2a}$ donc $x = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4} = x_0$. Par symétrie entre x et y dans ces équations, $y = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4} = y_0 = x_0$. Il y a un seul point critique de f sur Ω, le point $(x_0, y_0) = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^{1/4}, \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4}\right)$.

La valeur de f en (x_0,y_0) est $f(x_0,y_0) = \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{2a} = 2\sqrt{2a} = m$. La fonction f est de classe C^2 sur Ω pour les mêmes raisons qu'avant et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{2a}{x^3 y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \frac{2a}{xy^3}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{a}{x^2 y^2}$, donc la hessienne de f en (x_0,y_0) vaut $H = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Puisque $\chi_H = X^2 - 12X + 32 = (X-4)(X-8)$, $\text{Sp}(H) = \{4, 8\}$ donc H est une matrice symétrique définie positive et f admet en (x_0,y_0) un minimum local.

Soit $T = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \leqslant \sqrt{m},\ y \leqslant \sqrt{m}, xy \geqslant \frac{a}{m}\right\}$. Comme T est borné par définition, fermé (grâce aux inégalité larges), et non vide car $(x_0,y_0) \in T$ puisque $\left(\frac{a}{2}\right)^{1/4} \leqslant \sqrt{m} = (8a)^{1/4}$ et $\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} \geqslant \frac{a}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}$, la fonction continue f admet un minimum absolu sur le "triangle" T par le théorème des bornes atteintes. Si (x,y) est sur la frontière de T, on a $x = \sqrt{m}$ ou $y = \sqrt{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$ ou $xy = \frac{a}{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$. Ainsi, le minimum de f sur T est atteint à l'intérieur de T donc en un point critique, donc forcément en (x_0,y_0). Ainsi, $\underset{T}{\text{Min}}(f) = f(x_0,y_0) = m$.

Par conséquent, pour $(x,y) \in \Omega$, soit $(x,y) \in T$ et on a vu que $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0) = \underset{T}{\text{Min}}(f)$, soit $(x,y) \notin T$ et, comme avant, $x > \sqrt{m}$ ou $y > \sqrt{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$ ou $xy > \frac{a}{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$. On a donc $m = f(x_0,y_0) = \underset{\Omega}{\text{Min}}(f)$ et f admet en (x_0,y_0) un minimum absolu.