TD 24 : FONCTIONS VECTORIELLES

PSI 1 2024-2025 **jeudi 27 mars 2025**

24.1 **a.** La fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et $\varphi'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ donc φ est croissante sur $]0;e]$ et décroissante sur $[e;+\infty[$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0^+$ et il est clair que $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$ avec $\varphi(1) = 0$. Ainsi, le graphe de φ admet deux asymptotes, l'une verticale d'équation $x = 0$ (quand t tend vers 0^+) et l'autre horizontale d'équation $y = 0$ (quand t tend vers $+\infty$). Enfin, la fonction φ admet un maximum $x = e$ et on a $\underset{\mathbb{R}_+^*}{\mathrm{Max}}\, \varphi = \varphi(e) = \dfrac{1}{e}$.

Puisque $(x,y) \in S \iff (x < y \text{ et } x^y = y^x) \iff (x < y \text{ et } y\ln(x) = x\ln(y)) \iff (x < y \text{ et } \varphi(x) = \varphi(y))$, l'étude de φ menée précédemment montre que $(x,y) \in S \Longrightarrow 1 < x < e < y$.

b. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux. Comme $g(t) = \exp\left((t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)$, il est clair que $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = +\infty$ et on trouve $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = e$ car $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $(t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t+1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. De plus, $\forall t > 0,\ g'(t) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right)g(t) < 0$ car on a l'inégalité classique $\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x$. D'après le théorème de la bijection, $g : \mathbb{R}_+^* \to]e\,;+\infty[$ est une bijection strictement décroissante.

c. D'après les intervalles $g(\mathbb{R}_+^*) =]e;+\infty[$ et $f(\mathbb{R}_+^*) =]1;e[$ trouvé en **b.** ou admis par l'énoncé, on a l'inégalité $\forall t > 0,\ f(t) < g(t)$. De plus, on obtient l'égalité $\varphi(f(t)) = \varphi(g(t))$ avec le calcul suivant : $\varphi(g(t)) = \dfrac{\ln(g(t))}{g(t)} = \dfrac{(t+1)\ln\left(1+(1/t)\right)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}} = \dfrac{(t+1)\ln\left(1+(1/t)\right)}{\frac{t+1}{t}\times\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}} = \dfrac{t\ln\left(1+(1/t)\right)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}} = \dfrac{\ln(f(t))}{f(t)} = \varphi(f(t))$.

Par définition, $(f(t), g(t)) \in S$. Réciproquement, si $(x,y) \in S$, alors $x \in]1\,;e[$ donc, par bijectivité de f, $\exists! t > 0,\ x = f(t)$. Ensuite, $\varphi(x) = \varphi(y) = \varphi\big(g(t)\big) = \varphi(f(t))$ prouve que $y = g(t)$ car φ injective sur $]e\,;+\infty[$ et que $y \in]e;+\infty[$ d'après **a.**. Par double implication, on a $(x,y) \in S \iff (\exists t > 0,\ x = f(t),\ y = g(t))$.

d. Comme $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(t)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln(t) = 0$, il vient $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 1$ et, comme $g(t) = \left(1+\frac{1}{t}\right)f(t)$, on a aussi $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote (verticale) à S. De plus, on a les approximations $f\left(\frac{1}{u}\right) = \exp\left(\dfrac{\ln(1+u)}{u}\right) \underset{0}{=} \exp\left(1 - \frac{u}{2} + o(u)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(-\frac{u}{2} + o(u)\right) \underset{0}{=} e - \frac{eu}{2} + o(u)$ et $g\left(\frac{1}{u}\right) = (1+u)f\left(\frac{1}{u}\right) \underset{0}{=} (1+u)\left(-\frac{eu}{2} + o(u)\right) \underset{0}{=} e + \frac{eu}{2} + o(u)$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{g(t)-e}{f(t)-e} = -1$.

Conclusion : la demi-tangente à S en (e,e) est de pente -1.

24.2 **a.** Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a $x'(t) = 12t^2$, $y'(t) = 12t^3$ donc en notant $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ la fonction qui donne la trajectoire de la courbe Γ, on a $\overrightarrow{f}'(t) = 12t^2(1,t)$.

Le seul point stationnaire (là où la dérivée s'annule, donc la vitesse est nulle) est l'origine (pour $t = 0$), $\overrightarrow{f}''(0) = (0,0)$ et $\overrightarrow{f}'''(0) = (x'''(0), y'''(0)) = (24, 0)$ donc la demi-tangente en O est l'axe des abscisses $((0x))$.

Si $t \neq 0$, la tangente T_t à la courbe en $M(t) = (x(t), y(t))$ a pour équation $(x - x(t))y'(t) - (y - y(t))x'(t) = 0$ car un point $M = (x,y)$ du plan appartient à cette tangente si et seulement si $(\overrightarrow{M(t)M}, \overrightarrow{f}'(t))$ est liée, si et seulement si $\det(\overrightarrow{M(t)M}, \overrightarrow{f}'(t)) = \begin{vmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0$. Ainsi, la tangente T_t en $M(t) \in \Gamma$ a pour équation $12t^3(x - 4t^3) - 12t^2(y - 3t^4) = 0$ ce qui donne, en divisant par $12t^2 > 0$, $T_t\ :\ tx - y = t^4$.

b. Un point $M(x,y)$ appartient à l'orthoptique $\mathcal{L}$ si et seulement s'il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M \in T_{t_1} \cap T_{t_2}$

et $T_{t_1} \perp T_{t_2}$. Un vecteur directeur de T_t est $v_t = (1, t)$ donc $T_{t_1} \perp T_{t_2} \iff \big(v_{t_1} \big| v_{t_2}\big) = 0 \iff 1 + t_1 t_2 = 0$.

Ainsi $M \in \mathcal{L} \iff \exists t \neq 0,\ M \in T_t \perp T_{-1/t}$. On résout donc le système $tx - y - t^4 = -\dfrac{x}{t} - y - \dfrac{1}{t^4} = 0$ et cela donne $x = t^3 - t + \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^3} = x_1(t)$ et $y = -t^2 + 1 - \dfrac{1}{t^2} = y_1(t)$.

Réciproquement, si un point M a ces coordonnées $(x_1(t), y_1(t))$ pour $t \neq 0$, alors il appartient à $T_t \cap T_{-1/t}$ (en remontant les calculs) et on a donc $M \in \mathcal{L}$. Par conséquent, $\mathcal{L}$ est (par double inclusion) la courbe d'équation $\mathcal{L}\ :\ x = x_1(t) = t^3 - t + \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^3},\ y = y_1(t) = -t^2 + 1 - \dfrac{1}{t^2}$.

Les fonctions x_1 et y_1 sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, x_1 est impaire et y_1 est paire donc on obtient toute la courbe en restreignant t dans $\mathbb{R}_+^*$ et en faisant ensuite une symétrie orthogonale par rapport à (Oy).
De plus $x_1\left(\dfrac{1}{t}\right) = -x_1(t)$ et $y_1\left(\dfrac{1}{t}\right) = y_1(t)$, ce qui permet de ne faire l'étude que pour $t \in]0; 1]$ et la partie de la courbe relative à $t \in [1; +\infty[$ s'obtiendra (à nouveau) par la réflexion de droite (Oy).
On calcule : $\forall t \in]0; 1],\ x_1'(t) = \dfrac{(1+t^2)(3t^4 - 4t^2 + 3)}{t^4} > 0$ et $y_1'(t) = \dfrac{2(1-t^4)}{t^3} > 0$. Or $\lim\limits_{t \to 0^+} x_1(t) = -\infty$, $x_1(1) = 0$, $\lim\limits_{t \to 0^+} y_1(t) = -\infty$, $y_1(1) = -1$. De plus $x_1'(1) = 4$ et $y_1'(1) = 0$ donc on arrive horizontalement en $(-1, 0)$ (logique avec la symétrie par rapport à (Oy). Comme $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{y_1(t)}{x_1(t)} = -\infty$ puisque $\dfrac{y_1(t)}{x_1(t)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1/t^2}{1/t} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{t}$, on a une branche parabolique de direction (Oy) quand $t \to 0^+$; ce qui donne par symétrie par rapport à (Oy) une branche parabolique de direction (Ox) quand $t \to +\infty$.

24.3 **a.** Si $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I, alors pour tout $(a, b) \in I^2$, on a la formule de TAYLOR reste intégral donnée par $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. C'est un grand classique, on effectue une récurrence en initialisant à $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$ si f est de classe C^1 sur I. Ensuite, si $f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ avec f de classe C^{n+2} sur I (donc sur $\widetilde{[a; b]}$), on effectue une intégration par parties avec $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = -\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)}$, u et v sont de classe C^1 sur $\widetilde{[a; b]}$ d'où $f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \Big[-\dfrac{(b-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)}{(n+1).n!}\Big]_a^b - \dfrac{-1}{(n+1).n!}\displaystyle\int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$. Alors $f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \dfrac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} = f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n+1} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \displaystyle\int_a^b \dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$.
Par principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe C^{n+1} sur I, pour tout $(a, b) \in I^2$, on a $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$.

b. Si $x \in I$, on a $f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. Si $f^{(n+1)}$ est bornée sur I, on a donc $\left|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n!}\left|\displaystyle\int_a^x |x-t|^n dt\right| = \dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n!}\left|\displaystyle\int_a^x (x-t)^n dt\right| = \dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ car $|x-t|^n$ garde un signe constant sur l'intervalle $\widetilde{[a; x]}$ et que $\displaystyle\int_a^x (x-t)^n dt = \Big[-\dfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_a^x = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$.

c. En appliquant l'inégalité précédente pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$: $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_\infty h^2}{2}$ à l'ordre $n = 1$ entre $x+h$ et x. Par inégalité triangulaire, comme $|hf'(x)| = |hf'(x) - f(x+h) + f(x) + f(x+h) - f(x)|$, on a $|hf'(x)| \leqslant |hf'(x)-f(x+h)+f(x)|+|f(x+h)|+|f(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_\infty h^2}{2}+2||f||_\infty$ donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_\infty h}{2}+2\dfrac{||f||_\infty}{h}$.

Par conséquent, f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\forall h>0,\ ||f'||_\infty \leqslant \varphi(h) = \dfrac{||f''||_\infty h}{2}+2\dfrac{||f||_\infty}{h}$ donc $||f'||_\infty \leqslant \operatorname*{Inf}_{\mathbb{R}_+^*} \varphi$.

- si $||f||_\infty = 0$, alors $f=0$ donc $f'=0$ et $||f'||_\infty = 0$.
- si $||f''||_\infty = 0$, alors $f''=0$ donc f est affine et, pour que f soit bornée sur $\mathbb{R}$, il est nécessaire que f soit constante donc que $f'=0$ et on a encore $||f'||_\infty = 0$.
- si $||f||_\infty > 0$, $||f''||_\infty > 0$, comme $\varphi'(h) = \dfrac{||f''||_\infty}{2} - 2\dfrac{||f||_\infty}{h^2}$ donc φ est minimale en $h_0 = 2\sqrt{\dfrac{||f||_\infty}{||f''||_\infty}}$ et on a $\operatorname*{Inf}_{\mathbb{R}_+^*}(\varphi) = \varphi(h_0) = 2\sqrt{||f||_\infty ||f''||_\infty}$.

On en déduit, et ceci dans tous les cas, que $||f'||_\infty \leqslant 2\sqrt{||f||_\infty ||f''||_\infty}$.

On peut faire mieux : si $h>0$ et $x \in \mathbb{R}$, avec **b.** entre $x+h$ et x d'une part, et entre $x-h$ et x d'autre part, on a $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_\infty h^2}{2}$ et $|f(x-h)-f(x)+hf'(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_\infty h^2}{2}$. Comme $|2hf'(x)| = |hf'(x)-f(x+h)+f(x)+hf'(x)+f(x-h)-f(x)+f(x+h)-f(x-h)|$, par inégalité triangulaire, il vient $|hf'(x)| \leqslant |hf'(x)-f(x+h)+f(x)|+|hf'(x)+f(x-h)-f(x)|+|f(x+h)|+|f(x-h)| \leqslant ||f''||_\infty h^2+2||f||_\infty$ donc $|f'(x)| \leqslant ||f''||_\infty h+2\dfrac{||f||_\infty}{h}$. Par conséquent, f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\forall h>0,\ ||f'||_\infty \leqslant \psi(h) = ||f''||_\infty h+2\dfrac{||f||_\infty}{h}$ donc $||f'||_\infty \leqslant \operatorname*{Inf}_{\mathbb{R}_+^*} \psi$. Comme avant, en étudiant ψ dans les trois cas, on trouve que $||f'||_\infty \leqslant \sqrt{2||f||_\infty ||f''||_\infty}$.

d. On va construire g en trois étapes :

• Soit d'abord la fonction $f_1 : [0;2b] \to \mathbb{R}$ telle que $f_1(x) = f(x)$ si $x \in [0;b]$ et $f_1(x) = f(2b-x)$ si $x \in [b;2b]$. On a la continuité de f_1 en b, donc sur tout $[0;2b]$ car $\lim\limits_{x\to b^+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b) = f_1(b)$. Par théorème de prolongement C^1 appliqué deux fois en b à f_1' et f_1'', la fonction f_1 est de classe C^2 sur $[0;2b]$ avec $f_1(b) = f(b)$, $f_1'(b) = 0$ et $f_1''(b) = f''(b)$. Comme les valeurs de f_1, f_1', f_1'' sur $[b;2b]$ sont au signe près celles de f sur $[0;b]$ car $\forall x \in [b;2b]\ f_1(x) = f(2b-x)$, $f_1'(x) = -f'(2b-x)$ et $f_1''(x) = f''(2b-x)$, on a l'égalité des normes infinies : $\forall k \in \{0,1,2\},\ ||f_1^{(k)}||_{\infty,[0;2b]} = ||f^{(k)}||_{\infty,[0;b]}$.

• Soit ensuite la fonction $f_2 : [-2b;2b] \to \mathbb{R}$ telle que $f_2(x) = f_1(x)$ si $x \in [0;2b]$ et $f_2(x) = -f_1(-x)$ si $x \in [-2b;0]$. f_2 est continue en 0, donc sur tout $[-2b;2b]$ car $\lim\limits_{x\to 0^-} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = f_1(0) = 0 = f_2(0)$. Par théorème de prolongement C^1 appliqué deux fois en 0 à f_2' et f_2'', la fonction f_2 est de classe C^2 sur $[-2b;2b]$ avec $f_2(0)=0$, $f_2'(0) = f'(0)$ et $f_2''(0) = 0$. Comme les valeurs de f_2, f_2', f_2'' sur $[-2b;0]$ sont au signe près celles de f_1 sur $[0;2b]$ car $\forall x \in [-2b;0]\ f_2(x) = -f_1(-x)$, $f_2'(x) = f_1'(-x)$ et $f_2''(x) = -f_1''(-x)$, on a à nouveau des égalités de normes infinies : $\forall k \in \{0,1,2\},\ ||f_2^{(k)}||_{\infty,[-2b;2b]} = ||f_1^{(k)}||_{\infty,[0;2b]} = ||f^{(k)}||_{\infty,[0;b]}$.

• Soit enfin $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $4b$-périodique égale à f_2 sur l'intervalle $[-2b;2b]$. On a continuité de g en $\pm 2b$, donc sur tout $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to\pm(2b)^-} g(x) = \lim\limits_{x\to\pm(2b)^+} g(x) = f_2(\pm 2b) = f(2b) = 0$. Par théorème de prolongement C^1 appliqué deux fois en $\pm 2b$ à g' et g'', la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (par $4b$-périodicité) avec $g(\pm 2b) = 0$, $g'(\pm 2b) = -f'(0)$ et $g''(\pm 2b) = 0$. Comme les valeurs de g, g', g'' sur $\mathbb{R}$ sont exactement celles de f_2 sur $[-2b;2b]$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, si $y \in [-2b;2b]$ est tel que $x \equiv y\ [4b]$, $g(x) = f_2(y)$, $g'(x) = f_2'(y)$ et $g''(x) = f_2''(y)$, on a $\forall k \in \{0,1,2\},\ ||g^{(k)}||_{\infty,\mathbb{R}} = ||f_2^{(k)}||_{\infty,[-2b;2b]} = ||f_1^{(k)}||_{\infty,[0;b]} = ||f^{(k)}||_{\infty,[0;b]}$.

e. On a $0 < a < b$ car $\cot\!an(a) > 0$. f est continue en a car $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \sin(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. De plus, $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = \cos(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f''(x) = -\sin(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f''(x)$ donc on conclut que f est de classe C^2 sur $[0; b]$ par le théorème de prolongement C^1 appliqué à f, f' au voisinage de a. Il est clair que $f(0) = \sin(0) = 0$, $f''(0) = -\sin(0) = 0$ et $f'(b) = \cos(a) - 2(b-a)\sin(a) = 0$ car $b = a + \dfrac{\cos(a)}{2\sin(a)}$.

24.4 **a.** • Si n est impair, $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$ donc $\det(A) = 0$. Comme A n'est pas inversible, il existe un vecteur non nul X_0 dans $\mathrm{Ker}(A)$. Si on pose $X : t \mapsto X_0$, alors X est constante et, comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = 0 = AX(t) = AX_0 = 0$, $X = X_0$ est solution constante non nulle de (S) sur $\mathbb{R}$.

• Pour suivre l'indication de l'énoncé, changeons de base. Comme $X_0 \neq 0$, en posant $e_n = X_0$, on peut compléter (e_n) en une base orthogonale $(e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. En écrivant $X : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t) e_k$, alors $X' = AX \iff \left(\forall k \in [\![1; n]\!],\ x_k'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}(t) x_j(t)\right)$. Or $AX \in \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A) \perp \mathrm{Im}\,(A)$; en effet, si $AV = 0$ et $W = AZ \in \mathrm{Im}\,(A)$, alors $(V|W) = (V|AZ) = V^T(AZ) = (A^TV)^TZ = (-AV)^TZ = -(AV|Z) = 0$. Ainsi, comme $X'(t) = AX(t) \in \mathrm{Im}(A)$ n'a pas de composante selon le vecteur $e_n \in \mathrm{Ker}(A)$, on en déduit que $x_n'(t) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle : x_n est constante sur $\mathbb{R}$. Mais plus simplement :

• Si X est une solution de (S), alors $((X|X_0))' = (X'|X_0) + (X|X_0') = (AX|X_0) = X^TA^TX_0 = -X^TAX_0 = 0$ car $X_0 \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $(X|X_0) = \lambda = \lambda \dfrac{(X_0|X_0)}{||X_0||^2} \iff \left(X(t) - \dfrac{\lambda}{||X_0||^2} X_0 \middle| X_0\right) = 0$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in H_\lambda$ où H_λ est l'hyperplan affine $\dfrac{\lambda}{||X_0||^2} X_0 + (\mathrm{Vect}(X_0))^\perp$.

• Mais plus généralement (si A est seulement non inversible et pas forcément antisymétrique) :
Comme A n'est pas inversible, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant 1$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,(A)) \leqslant n-1$ par la formule du rang. Soit donc H un hyperplan qui contient $\mathrm{Im}\,(A)$ (il y en a une infinité si $\mathrm{rang}\,(A) \leqslant n-2$). Soit un vecteur non nul N normal à H. Soit X une solution de (S) sur $\mathbb{R}$si $\varepsilon = \dfrac{f'(x_0)}{2} > 0$, $\exists \beta > 0$, $\forall x \in]x_0 - \beta; x_0 + \beta[$, $\left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \dfrac{f'(x_0)}{2} \iff 0 < \dfrac{f'(x_0)}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{3f'(x_0)}{2}$, considérons l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = (X(t)|N) = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k x_k(t)$ (avec des notations évidentes). On dérive φ car X est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on obtient $\varphi'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k x_k'(t) = (X'(t)|N) = (AX(t)|N) = 0$ car $AX(t) \in \mathrm{Im}\,(A)$ et $N \in \mathrm{Im}\,(A)^\perp$. Ainsi, φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $(X(t)|N) = \lambda$ ce qui revient à $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} n_k x_k(t) = \lambda$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ appartient à l'hyperplan affine d'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} n_k x_k = \lambda$.

b. Soit X et Y des solutions de (E), on définit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\psi(t) = X(t)^TY(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t) y_k(t)$. On dérive car X et Y sont dérivables et on obtient $\psi'(t) = (X'(t))^TY(t) + X(t)^TY'(t) = X(t)^TA^TY(t) + X(t)^TAY(t) = 0$ car $A^T + A = 0$. Ainsi, ψ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Soit X une solution de (S), alors $X^TX = ||X||^2$ est constante d'après ce qui précède en prenant $Y = X$. Ainsi, X est de norme constante donc bornée.