♠ ♡

PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2024 / 2025

♢ ♣

TABLE DES MATIÈRES

PRÉPARATION ORAUX 2025
X

1 *X PSI 2024* Jules Campistron I

a. Soit $a, \lambda_1, \lambda_2, D_1, D_2$ des réels tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ et $D_1 \geqslant D_2$. Soit $A = \begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont λ_1, λ_2. Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$ et $\lambda_1 \geqslant D_1$.

b. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique dont les deux valeurs propres sont $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ et soit D_1, D_2 des réels tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$ et $D_1 \geqslant D_2$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que les matrices A et $\begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix}$ soient orthosemblables.

2 *X PSI 2024* Jules Campistron II

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = q > 0$.

a. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\psi :]-\alpha; \beta[\to]-\alpha; \beta[$ tels que $\forall x \in]-\alpha; \beta[,\ f(x) = -f(\psi(x))$.

b. Montrer que ψ est de classe C^1.

3 *X PSI 2024* Guilhem Thébault I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un ensemble non vide et une famille $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^I$ telle que $\forall i \in I,\ A_i^2 = I_n$ et $\forall (i,j) \in I^2,\ A_i A_j = A_j A_i$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille finie et donner une majoration de son cardinal.

4 *X PSI 2024* Guilhem Thébault II

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique et l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + \varphi y = 0$.

a. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ où $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$.

b. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de (E), alors $g : x \mapsto f(x + 2\pi)$ est aussi solution de (E).

c. Quelle est la nature de l'application $\psi : f \to g$?

d. Montrer que si un réel λ est valeur propre de l'endomorphisme ψ, alors λ est solution de l'équation polynomiale $(P)\ :\ x^2 - \big(y_1'(2\pi) + y_2(2\pi)\big)x + \big(y_1'(2\pi)y_2(2\pi) - y_2'(2\pi)y_1(2\pi)\big) = 0$.

5 *ENS Cachan PSI 2024* Jules Campistron

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω et des variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_{n-1}$ sur Ω et indépendantes deux à deux, d'espérance nulle et de variance 1. Soit Z une variable aléatoire réelle sur Ω telle que $Z(\Omega) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ avec $m \geqslant 3$ et les réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ distincts deux à deux.

On pose, pour $i \in [\![1; n-1]\!]$, $x_i = \big(X_i(\omega_1), \cdots, X_i(\omega_n)\big)$, $x_n = (1, \cdots, 1)$ et $z = \big(Z(\omega_1), \cdots, Z(\omega_n)\big)$.

a. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{n} < z, x_n >$.

b. Montrer que $\exists(\beta_1, \cdots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{(0, \cdots, 0)\},\ \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\beta_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\alpha_k\beta_k = 0$.

c. En déduire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que $Q(Z)(\Omega) \neq \{0\},\ \mathbb{E}(Q(Z)) = \mathbb{E}(Q(Z)Z) = 0$.

d. Montrer que $\forall i \in [\![1; n-1]\!],\ < x_i, x_i >= n$ et que $\forall (i,j) \in [\![1; n-1]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow < x_i, x_j >= 0$.

e. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n-1} X_k^2 = n - 1$. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n-1} X_k^3 = 0$.

6 *ENS Cachan PSI 2024* Tristan Cheyrou

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$, on pose $[A, B] = AB - BA$. On note $S = \big\{[A, B] \mid (A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2\big\}$.
Soit $D = \mathrm{diag}(1, 2, \cdots, n)$ et Z l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la diagonale est nulle.

a. Montrer que si $M \in S$, alors $\mathrm{Tr}\ (M) = 0$.

b. Montrer que S est stable par multiplication par un scalaire.

c. Montrer que si $M \in S$ est semblable à $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $N \in S$.

d. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Tr}\ (M) = 0$, alors M est semblable à une matrice à diagonale nulle.

e. Montrer que $\Phi : Z \to Z$ définie par $\Phi(M) = [D, M]$ est un automorphisme de Z.

f. En déduire que $S = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\ (M) = 0\big\}$.

Soit e, f, h trois endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ tels que $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ et $[e, f] = h$. Soit x un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ.

g. Montrer que $e(x) = 0$ ou que $e(x)$ est un vecteur propre de h associé à une valeur propre μ que vous donnerez en fonction de λ.

h. Montrer que $A = \{k \in \mathbb{N} \mid e^k(x) \neq 0\}$ est un ensemble fini.

7 *ENS Cachan PSI 2024* Axel Corbière et Maxime Plottu

Une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unilpotente si $U - I_n$ est nilpotente.

On admet que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple (D, N) tel que $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente avec $DN = ND$ (décomposition de DUNFORD).

a. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unilpotente, montrer que 1 est l'unique valeur propre de U.

b. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unilpotente, exprimer U^{-1} en fonction de $N = U - I_n$.

c. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le couple (D, N) de DUNFORD vérifie $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et le couple (D, N) associé à A par la décomposition de DUNFORD.

d. Montrer que $D \in GL_n(\mathbb{C})$.

e. Montrer qu'il existe un unique couple (D', U') tel que D diagonalisable, U' unilpotente et $D'U' = U'D'$.

f. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8 *ENS Cachan PSI 2024* Armand Dépée et Adrien Saugnac

Soit $n \geqslant 1$ et $\rho > 0$. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On définit le diamètre $d(A)$ d'une partie bornée non vide $A \subset \mathbb{R}^n$ par $d(A) = \operatorname{Sup}\left\{||x-y|| \mid (x,y) \in A^2\right\}$.

Soit X un borné de $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}_+$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de parties bornées de $\mathbb{R}^n$:

- on dit que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un ρ-recouvrement de X si $X \subset \bigcup\limits_{k\geqslant 0} A_k$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ d(A_k) \leqslant \rho$.
- on pose $H_s^\rho(X) = \operatorname{Inf}\left(\left\{ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} d(A_k)^s \;\middle|\; (A_k)_{k\in\mathbb{N}}\ \rho\text{-recouvrement de } X\right\}\right)$.

a. Montrer que $H_s^\rho(X)$ est fini et que $\rho \mapsto H_s^\rho(X)$ est une fonction décroissante.

Indication : on pourra considérer des hyper-cubes.

On pose $H_s(X) = \operatorname{Sup}\left(\{H_s^\rho(X) \mid \rho > 0\}\right) = \lim\limits_{\rho\to 0^+} H_s^\rho(X) \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

b. Montrer que $s \mapsto H_s(X)$ est une fonction décroissante.

c. Calculer $H_0(X)$ et $H_s(X)$ si $s \geqslant n$.

d. Soit $v \in \mathbb{R}^n$, on note $X + v$ le translaté de X par le vecteur v. Comparer $H_s(X + v)$ et $H_s(X)$.

e. Soit $\lambda > 0$, on note λX l'homothétisé de X dans le rapport λ. Exprimer $H_s(\lambda X)$ en fonction de $H_s(X)$.

f. Pour deux parties U et V bornées de $\mathbb{R}^n$, comparer $H_s(U \cup V)$ et $H_s(U) + H_s(V)$.

g. Soit X et Y deux parties bornées de $\mathbb{R}^n$ telles que $\operatorname{Inf}\left(\left\{||x-y|| \mid (x,y) \in X \times Y\right\}\right) > 0$. Montrer la relation $H_s(X \cup Y) = H_s(X) + H_s(Y)$.

h. Si $s > 0$ et $H_s(X) > 0$, montrer que $H_u(X) = +\infty$ si $u < s$.

i. Si $s > 0$ et $H_s(X) > 0$, montrer que $H_t(X) = 0$ si $s < t$.

j. On pose $\delta(X) = \operatorname{Inf}\left(\{H_s(X) \mid s > 0\}\right)$. Calculer $\delta(X)$ pour X un segment, un carré, un cube.

9 *ENS Cachan PSI 2024* Thomas Favant

Soit un entier $n \geqslant 2$, on note $|.|_2$ la norme 2 sur l'espace vectoriel des vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $||M||_2 = \underset{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}}{\operatorname{Sup}} \dfrac{|MX|_2}{|X|_2}$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on définit le conditionnement $\kappa(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2$.

a. Rappeler la définition de $|.|_2$ et montrer que $||M||_2 = \underset{|X|_2=1}{\operatorname{Sup}} |MX|_2$.

b. Montrer que $M \mapsto ||M||_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $||M_1M_2||_2 \leqslant ||M_1||_2 ||M_2||_2$.

c. Montrer que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $|MX|_2 = ||M||_2 |X|_2$.

d. Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique définie positive.

e. On note σ_n (resp. σ_1) la plus grande (resp la plus petite) valeur propre de $A^T A$, montrer que $\kappa(A) = \sqrt{\dfrac{\sigma_n}{\sigma_1}}$.

f. On suppose dans cette question seulement que A est symétrique définie positive, et on note λ_n (resp. λ_1) sa plus grande (resp. sa plus petite) valeur propre. Calculer $||A||_2$ et en déduire $\kappa(A)$.

g. Montrer que $\kappa(A) = 1$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $Q \in O(n)$ tels que $A = \alpha Q$.

h. On suppose que $A = QR$ avec $Q \in O(n)$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\kappa(A) = \kappa(R)$.

i. Soit $(B, \overline{B}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $B \neq 0$ et $X, \overline{X}$ les solutions de $AX = B$ et $A\overline{X} = \overline{B}$. Majorer l'erreur relative $\dfrac{|X - \overline{X}|_2}{|X|_2}$ sur les solutions en fonction du conditionnement $\kappa(A)$ et de l'erreur relative $\dfrac{|B - \overline{B}|_2}{|B|_2}$ sur les entrées.

j. Illustrer avec une matrice A bien choisie le principe suivant : "une matrice mal conditionnée (telle que $\kappa(A)$ est grand) entraîne de grandes erreurs numériques".

10 *ENS Cachan/Rennes PSI 2024* Jonathan Filocco et Mathias Pisch

Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a. Calculer la loi de S_n, son espérance, sa variance.

b. Montrer que $\forall a > 0$, $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \dfrac{1}{na^2}$.

c. Soit X une variable aléatoire réelle ayant une espérance finie, montrer $\forall a > 0$, $\forall s < 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{sX})}{e^{sa}}$.

d. Monter que $\forall s > 0$, $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \left(\dfrac{\operatorname{ch}(s)}{e^{sa}}\right)^n$.

e. Montrer que $\forall s \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(s) \leqslant e^{\frac{s^2}{2}}$.

f. En déduire que $\forall a > 0$, $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{\frac{-na^2}{2}}$.

g. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x > 0$, $g(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ se prolonge par continuité en 0 et qu'elle est alors croissante sur $\mathbb{R}_+$.

11 *ENS Cachan PSI 2024* Tiago Genet

Soit $\big(E, (.|.)\big)$ un espace euclidien de dimension $d \geqslant 2$. Pour $u \in E$ unitaire et $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : x \mapsto x + a(x|u)u$.

a. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ f_a \circ f_b = f_{a+b+ba}$.

b. En déduire que $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$.

c. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{N},\ f_a^p = f_{(a+1)^p-1}$.

d. Montrer que f_a est inversible si et seulement si $a \neq -1$.

e. Montrer que f_a est autoadjoint pour tout réel a.

f. Montrer que f_a est une isométrie si et seulement si $a = 0$ ou $a = -2$.

Question supplémentaire :

- soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements disjoints, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

12 *ENS Cachan PSI 2024* Mathis Laruelle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que si B est diagonalisable, alors $\exp(B)$ l'est aussi.

b. Montrer qu'il existe $(B_1, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ avec B_1 diagonalisable, N nilpotente, $B = B_1 + N$ et $B_1 N = N B_1$.

c. Si $\exp(B)$ est diagonalisable, montrer que $\exp(N) - I_n$ est nilpotente, puis que B est diagonalisable.

Soit pour les trois prochaines questions $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable avec $\mu_1, \cdots, \mu_p$ ses valeurs propres distinctes. Soit des matrices $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

d. Déterminer un polynôme U tel que $\forall k \in [\![1; p]\!],\ P(\mu_k) = e^{\mu_k}$.

e. Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $Q(A) = PQ(D)P^{-1}$.

f. En déduire que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

On admet que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(M) \in GL_n(\mathbb{C})$ de sorte qu'on peut définir l'application exponentielle sur les matrices par $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$. Soit aussi la matrice $D = \mathrm{diag}(-1, -2, \cdots, -n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

g. Montrer que D est inversible.

h. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que e^{λ} es une valeur propre de $\exp(B)$.

i. Existe-t-il une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B) = D$?

j. Que dire de l'application $\exp$?

PRÉPARATION ORAUX 2025
CENTRALE MATHS 1

13 *Centrale Maths1 PSI 2024* Amélia Arangoits

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que F est stable par M si et seulement si $F^\perp$ est stable par M^T.

b. Trouver les sous-espaces stables par $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

14 *Centrale Maths1 PSI 2024* Yasmine Azzaoui

On définit, pour un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sa norme infinie $||(x, y)||_\infty = \mathrm{Max}(|x|, |y|)$.

On définit $B(O, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||(x, y)||_\infty < 1\}$ et $\overline{B(O, 1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||(x, y)||_\infty \leqslant 1\}$ les boules unité ouverte ou fermée pour cette norme infinie et $f : \overline{B(O, 1)} \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 1$.

Soit la surface $S = \left\{\left(x, y, f(x, y)\right) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B(O, 1)\right\}$ représentative de f.

a. Exprimer $B(O, 1)$ et $\overline{B(O, 1)}$ sous la forme d'un produit cartésien de parties de $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est C^1 sur $B(O, 1)$, calculer son gradient et déterminer les points critiques de f sur $B(O, 1)$.

c. En déduire les extrema de f sur $\overline{B(O, 1)}$.

d. Déterminer les points $(x, y) \in B(O, 1)$ où le plan tangent à S en $(x, y, f(x, y))$ est normal à $\vec{v} = (0, 1, -1)$.

15 *Centrale Maths1 PSI 2024* Edward Bauduin

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

a. Donner l'équation du plan tangent à $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ et } z = f(x, y)\right\}$ en $(a, b, c) \in S$.

b. Montrer que f admet un minimum local en un unique point $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ à déterminer.

c. Montrer que $K = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy \leqslant 3 \text{ et } x \geqslant \dfrac{1}{3} \text{ et } y \geqslant \dfrac{1}{3}\right\}$ est un fermée borné de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

d. En déduire que f admet en (x_0, y_0) un minimum absolu.

16 *Centrale Maths1 PSI 2024* Amjad Belmiloud

Soit les ensembles $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 8\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 8\}$. Soit les fonctions $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $\Phi(t) = \left(2\cos(t), \sqrt{2}\sin(t)\right)$ et $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} + x^2$.

a. Montrer que Φ réalise une bijection de classe C^1 de $[0; 2\pi[$ dans $\mathcal{E}$.

b. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur Δ.

c. Déterminer $\underset{\Delta}{\mathrm{Min}}(f)$. Montrer que le maximum de f sur Δ est atteint sur $\mathcal{E}$.

d. Trouver la valeur de $\underset{\Delta}{\mathrm{Max}}(f)$.

17 *Centrale Maths1 PSI 2024* Jules Campistron

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$.

Pour $f \in E$, on définit l'équation différentielle $(E_f)\ :\ y' - y + f(x) = 0$.

a. Montrer que E est un espace vectoriel.

b. Montrer que la fonction $g : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)dt$ est l'unique solution de (E_f) appartenant à E.

18 *Centrale Maths1 PSI 2024* Tristan Cheyrou

a. Donner le rayon de convergence R de $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$. Montrer : $\forall x \in]-R; R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T = \mathrm{Min}(\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\})$ si $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\} \neq \emptyset$ et $T = +\infty$ sinon.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_k = \frac{1+X_k}{2}$. Donner la loi de Y_k, puis celle de $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

c. En déduire la loi de S_n, son espérance et sa variance. Que représente S_n ?

On pose $p_0 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. On pose aussi $q_k = \mathbb{P}(T = 2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

d. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} p_n x^n$ est convergente pour $|x| < 1$. On pose alors $p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

e. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k$. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[,\ G_T(x) = \frac{p(x^2) - 1}{p(x^2)}$.

f. En déduire la loi de T et son espérance.

19 *Centrale Maths1 PSI 2024* Armand Coiffe

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire G de F dans E.

Soit $t \in]0; 1[$ et $\varphi_t : f \mapsto g$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - f(tx)$.

c. Montrer que φ_t est un endomorphisme injectif de F.

d. Soit $(f, g) \in F^2$ tel que $g = \varphi_t(f)$. Montrer que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$. Conclure.

e. Déterminer toutes les fonctions $f \in F$ telle que $f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x$.

20 *Centrale Maths1 PSI 2024* Axel Corbière

Soit E un espace euclidien dont on note $||\,.\,||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $(.|.)$ et f un endomorphisme de E. On dit que f est une contraction si $\forall x \in E,\ ||f(x)|| \leqslant ||x||$.

a. Si f est autoadjoint, montrer l'équivalence entre des deux assertions suivantes :

(i) f est une contraction.

(ii) $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ |\lambda| \leqslant 1$.

b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que si f est autoadjoint et $x \in E$, $||P(f)(x)|| \leqslant \left(\underset{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)}{\mathrm{Sup}} (|P(\lambda)|) \right) ||x||$.

21 *Centrale Maths1 PSI 2024* Mathéo Demongeot-Marais

Dans une marche aléatoire symétrique (autant de chance d'aller à gauche qu'à droite) sur $\mathbb{Z}$ démarrant en 0, on note X_n la variable aléatoire désignant l'abscisse du marcheur après le n-ième pas. On a donc $X_0 = 0$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $E_k =$ " le marcheur est revenu à l'origine au moins k fois au cours de la marche entière".

Soit B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le marcheur est revenu en 0 après le i-ième pas et 0 sinon.

a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X_n = 0)$.

b. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = 0)$.

c. Déterminer la loi de B_i et, pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\sum\limits_{i=0}^{p} B_i \geqslant k\Big)$.

d. Trouver un lien entre $\Big(\sum\limits_{i=0}^{p} B_i \geqslant k\Big)$ et E_k. En déduire que $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(E_k)$ diverge.

22 *Centrale Maths1 PSI 2024* Armand Dépée

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire de cet espace à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On note $A = \{X \text{ variable aléatoire de } \Omega \text{ dans } \mathbb{N} \mid G_X \text{ est définie sur } \mathbb{R}\}$.

a. Soit $X \in A$, montrer que X^p admet une espérance finie.

b. Soit $X \in A$, exprimer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de G_X.

On note $A_1 = \{X \in A \mid \mathbb{E}(X) = 1,\ \mathbb{E}(X^2) = 2,\ \mathbb{E}(X^3) = 5\}$.

c. Montrer que l'ensemble $\{\mathbb{P}(X = 0) \mid X \in A_1\}$ admet un minimum et le déterminer.

Question supplémentaire :

- Donner le théorème spectral dans sa version matricielle et étudier la validité de sa réciproque.

23 *Centrale Maths1 PSI 2024* Olivier Farje

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, on suppose que P n'admet pas de racine complexe.

On définit alors la fonction I sur $\mathbb{R}_+$ par $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.

a. Montrer que I est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que I est constante sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer l'existence de $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi]$, $\left|\dfrac{1}{P(re^{i\theta})}\right| \leqslant k$.

d. Conclure.

Questions supplémentaires :

- soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : t \mapsto f(t^2, 2^t)$. Calculer la dérivée de g.

24 *Centrale Maths1 PSI 2024* Thomas Favant

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $2\lambda > -1$. On définit $g_\lambda : \mathbb{R}\times]0; \pi[\to \mathbb{R}$ par $g_\lambda(x, \theta) = e^{-ix\cos(\theta)} \sin^{2\lambda}(\theta)$.

a. Montrer que la fonction $\theta \mapsto g_\lambda(x, \theta)$ est intégrable sur $]0; \pi[$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} g_\lambda(x, \theta) d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos(\theta)) \sin^{2\lambda}(\theta) d\theta$.

c. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''_\lambda(x) = f_{\lambda+1}(x) - f_\lambda(x)$.

25 *Centrale Maths1 PSI 2024* Jonathan Filocco

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1(a) = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}(a) = u_n(a)^2 + \dfrac{1}{n+1}$.

a. Montrer que si la suite $(u_n(a))_{n\geqslant 1}$ admet une limite, celle-ci ne peut valoir que 0, 1 ou $+\infty$.

Pour $L = 0, 1$ ou ∞, on note $E_L = \left\{a > 0 \mid u_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L\right\}$.

b. Montrer que E_L sont des intervalles de $\mathbb{R}$ si $L = 0, 1$ ou ∞.

c. Montrer que $[1; +\infty[\subset E_\infty$ et montrer que E_∞ est un ouvert.

Question supplémentaire :

- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

26 *Centrale Maths1 PSI 2024* Émile Gauvrit

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $a_n = \dfrac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha + k)}$ et $v_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{\alpha}{k}\right)\right) - \alpha \ln(n)$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n-1})$ converge.

c. En déduire l'existence de $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

d. Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ pour $x = \pm R$.

27 *Centrale Maths1 PSI 2024* Lucie Girard

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. On note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

a. Montrer la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, c'est-à-dire l'existence du réel S.

b. Quel est le domaine de définition D de la fonction $I : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1}$?

c. Donner une expression simple de $I(x)$ pour certains x et en déduire la valeur de S.

d. Calcul de $\int_0^1 I(x)dx$ de deux manières différentes.

28 *Centrale Maths1 PSI 2024* Valentine Girard

Soit E l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^2$ converge.

Pour deux suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on pose $< a, b >= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

a. Montrer que E muni de $< ., . >$ est un espace préhilbertien réel.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose $u_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on prend $u_{-1} = 0$ par convention. On dit que X vérifie la propriété $(*)$ si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
- X admet un moment d'ordre 2,
- $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(u_n - u_{n-1})^2}{u_n}$ converge (on note $S(X)$ sa somme).

b. Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, montrer que X vérifie $(*)$.

c. Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, calculer $S(X)\,\mathbb{V}(X)$.

29 *Centrale Maths1 PSI 2024* Lou Goiffon et Tom Sanchez

Soit $H = [-1;1] \times [0;1]$, $O =]-1;1[\times]0;1[$ et $f : H \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{y - yx^2}\,(x - xy)$.

a. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur H.

b. Trouver les extrema de f sur O.

c. Calculer la valeur du maximum global de f sur H.

30 *Centrale Maths1 PSI 2024* Nathan Jung

Soit E un espace euclidien de dimension $p \geqslant 1$ dont on note $(\,.\,|\,.\,)$ le produit scalaire et $||\,.\,||$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E dont on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p$ les valeurs propres. On note enfin $S = \{x \in E \mid ||x|| = 1\}$ la sphère unité de E.

a. Montrer que $x \mapsto (u(x)|x)$ admet un minimum sur S.

b. Montrer que $\lambda_1 = \underset{x\in S}{\mathrm{Min}}\big((u(x)|x)\big)$.

c. Montrer que $\lambda_2 = \underset{F\in\mathcal{E}_2}{\mathrm{Min}}\left(\underset{x\in S\cap F}{\mathrm{Max}}\big((u(x)|x)\big)\right)$ où $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des plans vectoriels de E.

31 *Centrale Maths1 PSI 2024* Mathis Laruelle

On définit la fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

On pose maintenant $\Phi(x) = xf(x)f(x-1)$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Phi(x+1) = \Phi(x)$.

c. Montrer que $x \mapsto \dfrac{\Phi(x)}{x}$ est décroissante.

d. Montrer que Φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

32 *Centrale Maths1 PSI 2024* Guillaume Leduc

Soit E un espace euclidien pour un produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, v un vecteur non nul de E et $f : E \to E$ définie par $\forall x \in E,\ f(x) = x - \lambda(x|v)v$.

a. f est-il un endomorphisme autoadjoint de E ?

b. Pour quelles valeurs de λ l'endomorphisme f est-il une isométrie vectorielle ?

c. On suppose que f est une isométrie vectorielle, déterminer les éléments caractéristiques de f.

33 *Centrale Maths1 PSI 2024* Martin Mayot

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 1$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = (x^2+y^2)^x$.

a. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

c. Trouver les points critiques de f.

d. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

34 *Centrale Maths1 PSI 2024* Antoine Métayer

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

On définit aussi $f :]-1;0[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t}\,dt$.

a. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

b. Montrer que f est bien définie et que $\forall x \in]-1;0[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n.n!}$.

35 *Centrale Maths1 PSI 2024* Romane Mioque et Maxime Plottu

a. Montrer que si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que M et $2M$ sont semblables.

b. Que vaut $\mathrm{Sp}(M)$? Qu'en déduire sur M ?

c. Trouver un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle telle que M et $2M$ sont semblables.

d. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $\mathrm{rang}\,(M) = 1$, montrer que M est semblable à $E_{2,3}$.

En déduire que M est semblable à $2M$.

e. (question rajoutée) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, montrer que M est semblable à $2M$.

36 *Centrale Maths1 PSI 2024* Mathias Pisch

a. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$.

b. Montrer que F est définie et développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner son développement.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})\,dt\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

d. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})\,dt$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de F en $+\infty$.

37 *Centrale Maths1 PSI 2024* Clément Reiner

Soit $\mathbb{U}' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \mid |z| = 1\}$ et $h : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par $h(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ dans lui-même.

b. Montrer que h induit une bijection de $\mathbb{U}'$ dans $i\,\mathbb{R}$.

c. Former une représentation de $\mathbb{U}'$ dans le plan complexe.

d. Pour $\theta \in]-\pi;\pi[$, représenter dans le plan complexe le point d'affixe $h(e^{i\theta})$.

On note O' l'ensemble des matrices orthogonales de $O(2)$ dont -1 n'est pas valeur propre et on définit $H : O' \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $H(M) = (I_2 - M)(I_2 + M)^{-1}$.

e. Justifier que H est bien définie et donner le spectre de $h(M)$ si $M \in O'$.

f. Montrer que H réalise une bijection entre O' et les matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

38 *Centrale Maths1 PSI 2024* Eva Rojo

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1+\sin(2\pi n x)}{1+n^2x^2}$.

a. Tracer le graphe de la fonction f_5.

b. Que dire quant à la convergence simple ou uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

c. Que dire quant à la convergence simple ou uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

Questions supplémentaires :

- Donner la définition de $f^{-1}(A)$ avec $f : E \to F$ et $A \subset F$.
- Est-ce que $f : x \mapsto \int_0^1 \cos(xt)\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$?

39 *Centrale Maths1 PSI 2024* Adrien Saugnac

Soit $E = \mathbb{K}[X]$, $u : P \in E \to P(X+1)$ et $v = u - \mathrm{id}_E$.

a. Montrer que v est un endomorphisme de E et que $\forall P \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ v^n(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$.

b. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p+1,\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p = 0$.

c. Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n$?

40 *Centrale Maths1 PSI 2024* Arya Tabrizi

a. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ ou $z = 0$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.

Soit $(z, z_0) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Re}\,(z) > \mathrm{Re}\,(z_0)$, une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} e^{-z_0t}f(t)\mathrm{d}t$ converge. On définit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_0^{x} e^{-z_0t}f(t)\mathrm{d}t$.

d. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle y est bornée.

e. Montrer que $t \mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

f. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)\mathrm{d}t$ converge et qu'on a $\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)\mathrm{d}t = (z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)\mathrm{d}t$.

Questions supplémentaires :

- rappeler la formule de Taylor reste intégral.
- rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange.

41 *Centrale Maths1 PSI 2024* Guilhem Thébault

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \cdots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité) : ces matrices sont dites à diagonale propre.

On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit à diagonale propre.

b. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n$.

c. Trouver $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.

d. Montrer que si un sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $F \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, alors $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

42 <u>*Centrale Maths1 PSI 2024*</u> Antoine Vergnenègre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que les coefficients diagonaux de M sont impairs et tous les autres pairs.

a. Montrer que $\det(M)$ est impair. En déduire rang (M).

Soit $P_1, \cdots, P_k$ des parties distinctes de $[\![1;n]\!]$ et, pour $j \in [\![1;k]\!]$, le vecteur colonne $X_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X_j^T = (x_{1,j} \ \cdots \ x_{n,j})$ avec $x_{i,j} = 1$ si $i \in P_j$ et $x_{i,j} = 0$ sinon.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\{0,1\})$ dont les colonnes sont, dans l'ordre, $X_1, \cdots, X_k$.

b. Montrer que X et $X^T X$ ont même rang.

c. Calculer les coefficients de $X^T X$ en fonction des parties $P_1, \cdots, P_k$.

PRÉPARATION ORAUX 2025
MINES

43 *Mines PSI 2024* Amélia Arangoits I

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \geqslant 1,\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{n}{x_n}$.

a. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ x_n \geqslant n$. En déduire que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

c. Montrer qu'il existe un réel c tel que $x_n \underset{+\infty}{=} n + c + o(1)$.

d. Montrer que $c = 0$.

44 *Mines PSI 2024* Amélia Arangoits II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P(X+n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k P(X-k)$.

45 *Mines PSI 2024* Yasmine Azzaoui I

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2^n}$.

46 *Mines PSI 2024* Yasmine Azzaoui II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

b. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.

c. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = M$.

47 *Mines PSI 2024* Yasmine Azzaoui III

Sur 1000 électeurs, 700 votent pour A et 300 pour B.

Quelle est la probabilité pour que A soit toujours en tête lors du dépouillement ?

48 *Mines PSI 2024* Edward Bauduin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \left(\dbinom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Par exemple, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On appelle permutation de $[\![1;n]\!]$ une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ et on note d_n le nombre de dérangements de $[\![1;n]\!]$, un dérangement étant une permutation de $[\![1;n]\!]$ sans point fixe. On prend par convention $d_0 = 1$. On note p_n la probabilité d'obtenir un dérangement si on prend une permutation au hasard.

a. Déterminer l'inverse de A_n. Indication : montrer que A_n est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, d'un endomorphisme bien choisi.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} d_k$.

c. Trouver une relation entre A_n^T, $(0 \ \cdots \ 0 \ n!)^T$ et $(d_0 \ d_1 \ \cdots \ d_n)^T$.

d. En déduire que $d_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

e. Déterminer p_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

49 *Mines PSI 2024* Edward Bauduin II

a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

b. Que dire du rayon de convergence du développement de la question précédente ?

50 *Mines PSI 2024* Jules Campistron I

Soit $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ et $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(M) =< MX, X >$.

a. Déterminer $\Phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

b. Déterminer $\Phi(O_n(\mathbb{R}))$.

51 *Mines PSI 2024* Jules Campistron II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |\ln(t)|^x dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D.

c. Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

52 *Mines PSI 2024* Tristan Cheyrou I

Soit deux réels $q \in]0;1[$ et $a \in \mathbb{R}_+$ et deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que l'on ait $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = aq^{i+j}$.

a. Exprimer a en fonction de $p = 1 - q$.

b. Déterminer les lois marginales de X et Y. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

c. Trouver $Cov(X, Y)$.

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de $U = Max(X, Y)$ sachant $X + Y = 2n + 1$.

53 *Mines PSI 2024* Tristan Cheyrou II

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n}$.

a. Justifier que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à déterminer.

c. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

d. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (I_n - \ell)$.

54 *Mines PSI 2024* Armand Coiffe I

Dans une urne, il y a b boules blanches, 1 boule rouge et $n - b - 1$ boules noires.

On tire une boule avec remise dans cette urne jusqu'à tirer la boule rouge à l'instant T.

On note X le nombre de boules blanches tirées pendant ce processus.

a. Pour $r \in \mathbb{N}$, donner le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant r} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

b. Déterminer la loi de T.

c. Que vaut $\mathbb{P}_{(T=k)}(X = i)$ pour $(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

d. Déterminer la loi de X.

55 *Mines PSI 2024* Armand Coiffe et Adrien Saugnac II

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Montrer que $A = \left\{f(m) - f(n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

56 *Mines PSI 2024* Axel Corbière I

On appelle involution d'un ensemble E toute application $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $[\![1;n]\!]$ et $I_n = \mathrm{card}\,(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{I_n}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

On définit $\varphi :]-1;1[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{I_n}{n!}x^n$.

c. Montrer que $\forall x \in]-1;1[,\ \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.

d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

57 *Mines PSI 2024* Axel Corbière II

On considère une pièce qui fait pile avec une probabilité $p \in]0;1[$ et qu'on lance indéfiniment. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de face obtenus pour faire deux fois pile.

a. Donner la loi de X.

b. Montrer que X admet une espérance finie et la calculer.

Si $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on en pioche une. On note Y le numéro de la boule piochée.

c. Donner la loi de Y.

d. Calculer l'espérance et la variance de Y.

58 *Mines PSI 2024* Armand Dépée I

On définit la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Pour un entier $n \geqslant 2$, on note $A_n = (f_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Exprimer A_2, A_3, A_4.

b. Pour $n \geqslant 2$, quelle est la multiplicité de 0 pour A_n.

c. Montrer qu'il existe deux valeurs propres de A_n non nulles α_n et β_n, telles que $\alpha_n < 0 < \beta_n$.

d. Quelle est la nature de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$? Et de $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$?

59 *Mines PSI 2024* Armand Dépée II

Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.

60 *Mines PSI 2024* Olivier Farje I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $\exp_p(A) = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{A^k}{k!}$.

a. Soit E un espace normé de dimension finie et F un sous-espace de E. Montrer que F est un fermé de E.

b. Montrer que la suite $\left(\exp_p(A)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers une limite notée $\exp(A)$.

c. Montrer que $\exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A] = \mathrm{Vect}(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$.

61 *Mines PSI 2024* Olivier Farje II

Soit $p \in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de BERNOULLI de paramètre p. On pose $A = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \sum_{k\geqslant 1} \frac{X_k(\omega)}{k} \text{ converge}\right\}$. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

62 *Mines PSI 2024* Thomas Favant I

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$ et $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(u) = v$ où $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a. Montrer que φ est un automorphisme de E.

b. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

63 *Mines PSI 2024* Thomas Favant II

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que chaque X_n suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda_n \geqslant 0$ et $S : \Omega \to [0;+\infty]$ définie par $S(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)$. Déterminer la loi de S. Indication : commencer par calculer $\mathbb{P}(S = 0)$.

64 *Mines PSI 2024* Jonathan Filocco I

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$.

a. Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$ converge. On pose $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$.

c. Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

d. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

e. Effectuer une intégration par parties pour améliorer la majoration de la question précédente.

f. Est-ce que f est intégrable sur $]0;+\infty[$?

g. Calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ en fonction de J.

65 *Mines PSI 2024* Jonathan Filocco II

Une urne contient au début une bille blanche et une bille rouge. On répète indéfiniment des tirages selon le mode suivant : on tire une bille, et on remet dans l'urne deux billes de la couleur obtenue.

a. Quelle est la probabilité qu'on n'obtienne que des boules rouges lors des n premiers tirages ?

b. Quelle est la probabilité qu'on obtienne indéfiniment seulement des boules rouges ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au 42-ième tirage ?

d. Est-ce que le résultat du **b.** change si on remet trois billes de la couleur obtenue ou lieu de deux ?

e. Est-ce que le résultat de la question **b.** change si on remet k billes de la couleur obtenue ou lieu de deux au k-ième tirage ?

66 *Mines PSI 2024* Tiago Genet et Lou Goiffon I

Soit $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$.

a. Vérifier que $P(2) = P'(2) = 0$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\text{Tr}\,(M) = 0$.

67 *Mines PSI 2024* Tiago Genet II

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x>0,\ f_0(x)=x$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x>0,\ f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{2}\Big(f_n(x)+\dfrac{x}{f_n(x)}\Big)$.

Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

68 *Mines PSI 2024* Lucie Girard I

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ et $I_n=\displaystyle\int_0^n\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^{n-1}\ln(t)dt$.

a. Montrer la convergence de la suite $\big(H_n-\ln(n)\big)_{n\geqslant 1}$. On note γ sa limite.

b. Établir la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$. On note $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$.

c. Prouver l'existence de I_n et trouver un lien simple entre I_n et H_n.

d. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et trouver un lien entre γ et I.

69 *Mines PSI 2024* Lucie Girard II

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E.

a. Montrer que $F\subset(F^\perp)^\perp$.

On prend, pour les deux prochaines questions, $E=\mathbb{R}[X]$ et $F=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid P(1)=P'(1)=0\}$.

b. Déterminer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$ si on munit E du produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$ défini par $(P|Q)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

c. Déterminer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$ si on munit E du produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$ défini par $(P|Q)=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

d. Donner une condition suffisante pour que $F=(F^\perp)^\perp$.

e. La condition suffisante de la question précédente est-elle nécessaire ?

Question supplémentaire :

- si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E, est-ce que F est un ouvert ou un fermé ?

70 *Mines PSI 2024* Valentine Girard I

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on considère un carré quadrillé avec $(n+1)^2$ cases numérotées $(x,y)\in[\![0;n]\!]^2$. On cherche à aller de la case $(0,0)$ à la case (n,n) avec pour seuls déplacement autorisés les mouvements $(0,1)$ et $(1,0)$ (vers la droite ou vers en haut).

a. Déterminer le nombre c_n de chemins possibles (avec ces contraintes) pour aller de $(0,0)$ à (n,n).

On note d_n le nombre de chemins qui vont de $(0,0)$ à (n,n) (avec ces contraintes) mais en restant toujours au-dessus (au sens large) de la diagonale $x=y$. Par convention, on pose $d_0=1$. En cas de convergence, pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}d_nx^n$.

b. Calculer d_1, d_2, d_3.

c. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ d_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}d_kd_{n-k}$.

d. Justifier que $0\leqslant d_n\leqslant\dbinom{2n}{n}$. Minorer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}d_nx^n$.

e. Donner une relation entre $xf(x)^2$ et $f(x)$ pour $x\in]-R;R[$.

f. En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. Que vaut R ?

g. Donner une expression de d_n en fonction de n.

h. Si tous les chemins allant de $(0,0)$ à (n,n) sont équiprobables, quelle est la probabilité p_n qu'un chemin reste au-dessus de la diagonale ?

71 *Mines PSI 2024* Valentine Girard II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^T M M^T = I_n$.

72 *Mines PSI 2023* Valentine Girard III

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

73 *Mines PSI 2024* Lou Goiffon II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas d'existence, on note $f(x) = e^{-2x^2} \displaystyle\int_0^x e^{2t^2}\,dt$.

a. Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

b. Expliciter le développement en série entière de f.

c. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

74 *Mines PSI 2024* Nathan Jung I

Soit $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)\,d\theta$.

a. Montrer que la fonction I est bien définie sur D.

b. Donner une expression simplifiée de $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. En déduire la valeur de $I(x)$ pour $x \in D$.

75 *Mines PSI 2024* Nathan Jung II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

b. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que $E_A = \{X \in \mathbb{C}^n \mid AX = \lambda X\}$ est un espace vectoriel (quel intérêt ?).

76 *Mines PSI 2024* Mathis Laruelle I

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0\}$ et p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F.

a. Trouver une base orthonormale de F et la compléter en une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer les matrices de p et s dans la base $\mathcal{B}'$.

c. Déterminer les matrices de p et s dans la base $\mathcal{B}$.

77 *Mines PSI 2024* Mathis Laruelle II

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kt}\sin(xe^t)\,dt$.

a. La fonction F_k est-elle définie sur $\mathbb{R}$? Est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

b. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E_k)\ :\ xy' - ky = \sin(x)$ pour $k \geqslant 2$.

c. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E_1)\ :\ xy' - y = \sin(x)$.

78 *Mines PSI 2024* Guillaume Leduc I

On considère deux urnes contenant chacune r boules rouges et b boules bleues. À chaque tirage, on tire sans remise une boule dans chaque urne. On note X le nombre de tirages lors desquels les boules tirées dans les deux urnes sont de couleurs différentes.

a. Déterminer la loi de X.

b. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

79 *Mines PSI 2024* Guillaume Leduc II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 - M + M^T = I_n$.

a. Montrer que M est symétrique.

b. (question rajoutée) Que représente f canoniquement associé à M dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ canonique ?

80 *Mines PSI 2024* Manech Leroux I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}(xt)e^{-t}dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur D.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

d. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

81 *Mines PSI 2024* Manech Leroux II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $\varphi_A : M \mapsto AMA^T$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ_A soit une isométrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique.

82 *Mines PSI 2024* Martin Mayot I

On définit $A_0 = (1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0 \end{pmatrix}$.

a. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la taille de la matrice A_n.

b. Calculer le rang de A_n.

c. Donner les valeurs propres de A_n. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

83 *Mines PSI 2024* Martin Mayot II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\displaystyle\lim_{||x||\to+\infty} \frac{f(x)}{||x||} = +\infty$.

a. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer que l'application $x \mapsto \nabla f(x)$ est surjective.

84 *Mines PSI 2024* Antoine Métayer I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $< P, Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Si $A \neq 0 \in E$, on définit l'application f_A qui à un polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de P par A.

a. Montrer que $< ., . >$ définit un produit scalaire sur E.

b. Montrer que f_A est un endomorphisme de E.

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_A soit un projecteur orthogonal.

d. Trouver tous les polynômes A tel que f_A est un projecteur orthogonal si $n = 3$.

85 *Mines PSI 2024* Antoine Métayer II

Soit $s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N(s) = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s}\right) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$ et, en cas d'existence, $\zeta(s) = \lim_{N\to+\infty} S_N(s)$.

a. Montrer que $\zeta(s)$ est bien définie si $\operatorname{Re}(s) > 1$.

b. Montrer que $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} = \int_1^{N+1} \frac{1}{\lfloor t \rfloor^s} dt$.

c. Si $\operatorname{Re}(s) > 0$, après avoir justifié l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^s} - \frac{1}{\lfloor t \rfloor^s}\right) dt$, montrer que $\zeta(s)$ existe et qu'on a $\zeta(s) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lfloor t \rfloor^s} - \frac{1}{t^s}\right) dt + \frac{1}{s-1}$.

86 *Mines PSI 2024* Jasmine Meyer I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$. On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$?

c. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d. Donner un équivalent simple de $S(x)$ quand x tend vers 0. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

e. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

f. Y-a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$?

87 *Mines PSI 2024* Jasmine Meyer II

Soit E un espace euclidien, $||\,.\,||$ la norme euclidienne associée et p un projecteur de E.
Montrer que p est orthogonal si et seulement si p est 1-lipschitzien.

88 *Mines PSI 2024* Bilal Mrani I

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$ avec $p \in]0;1[$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$, $S_k = X_1 + \cdots + X_{2k}$. On note $p(k) = \mathbb{P}(S_k = 0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

a. Déterminer l'expression de $p(k)$ et en donner un équivalent quand k tend vers $+\infty$.

b. On suppose dans cette question $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que le nombre de retour à l'origine (le nombre d'indices n tels que $S_n = 0$) est presque sûrement fini. Indication : on pourra commencer par traduire mathématiquement le fait qu'il existe une infinité de retour à l'origine.

89 *Mines PSI 2024* Bilal Mrani II

Soit E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qu'on munit de la norme infinie classique. Pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on note P_T l'ensemble des fonctions T-périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note aussi P l'ensemble des fonctions périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que pour toute fonction $f \in P$, on a $f \in E$.

b. P_T et P sont-ils ouverts ?

c. P_T et P sont-ils fermés ?

90 *Mines PSI 2024* Mathias Pisch I

Soit la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a. Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle y est strictement positive et de classe C^2.

b. Prouver que Γ et $\ln \circ \Gamma$ sont convexes sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Établir, pour $x > 0$, que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

d. Trouver une relation entre $\displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ et $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

e. En déduire que $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

91 *Mines PSI 2024* Mathias Pisch II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et $||\,.\,||$ une norme sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a. Calculer χ_A. Indication : on pourra commencer par l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$.

b. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} ||A^n||z^n$.

92 *Mines PSI 2024* Clément Reiner I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}^2(xt)dt$ et l'équation différentielle $(E)\ :\ xy' + y = \mathrm{Arctan}^2(x)$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur de $f(0)$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{\mathrm{Arctan}^2(x)}{x}$.

d. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

e. Trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

93 *Mines PSI 2024* Clément Reiner II

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on pose $E = \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

a. Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \ \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.

b. Déterminer le déterminant et la trace de $f_{a,b}$ en fonction de a et b.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable.

94 *Mines PSI 2024* Adrien Saugnac I

Soit E un ensemble non vide et p une application de E dans E. On suppose que p est idempotente, c'est-à-dire que $p \circ p = p$.

a. Montrer que si p est injective, on a $p = \mathrm{id}_E$.

b. Montrer que si p est surjective, on a $p = \mathrm{id}_E$.

c. Si $\mathrm{card}(E) = 2$, trouver une application idempotente de E dans E qui ne soit pas id_E.

d. Trouver 3 applications idempotentes de E si $\mathrm{card}(E) = 2$.

e. Trouver 10 applications idempotentes de E si $\mathrm{card}(E) = 3$.

f. Prouver que si $p : E \to E$, on a p idempotente si et seulement si $(\forall x \in p(E),\ p(x) = x)$.

g. Dénombrer les applications idempotentes de E dans E si $\mathrm{card}(E) = n$.

95 *Mines PSI 2024* Arya Tabrizi I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,i} = i$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.
On note P_n le polynôme caractéristique de A_n.
a. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = (X-n)P_n - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

b. Montrer que, $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ (-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$.
c. En déduire que A_n admet n valeurs propres réelles distinctes.

96 *Mines PSI 2024* Arya Tabrizi II

Dans une urne, il y a une boule blanche et une boule noire indiscernables au toucher. On prend une boule :
- si elle est blanche, on arrête.
- si elle est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule blanche.

On note Y le rang du tirage d'une boule blanche en convenant que $Y = 0$ si on n'obtient jamais de boule blanche. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

97 *Mines PSI 2024* Guilhem Thébault I

Soit $N \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$.
a. Identifier un endomorphisme f de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$.
b. En déduire que A est diagonalisable et donner ses éléments propres.

98 *Mines PSI 2024* Guilhem Thébault II

Soit $r \in]0;1[$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, on pose alors $x(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n r^n$.
Montrer que l'application x ainsi construite est injective.

99 *Mines PSI 2024* Antoine Vergnenègre I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(U,V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $UV = VU$ et V nilpotente.
a. Montrer que $\det(I_n + M) = 1$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente.
b. Montrer que $\det(U+V) = \det(U)$ si U est inversible.
c. Montrer que $\det(U+V) = \det(U)$. Indication : montrer que $\mathrm{Ker}(U)$ est stable par V.

100 *Mines PSI 2024* Antoine Vergnenègre II

a. Soit $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1, convexe et décroissante, montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} ty'(t) = 0$.

b. Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fois dérivable telle que $y'' = qy$. Montrer l'équivalence suivante : $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0 \iff \int_0^{+\infty} tq(t)\mathrm{d}t$ diverge.

PRÉPARATION ORAUX 2025
CCINP

101 *CCINP PSI 2024* Amélia Arangoits I

Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S selon les valeurs de a.

Dans la suite de l'exercice, on impose $|a| < 1$.

b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$ pour $x > 0$.

d. Trouver un équivalent de S en 0.

e. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

f. Trouver un équivalent de S en $+\infty$.

102 *CCINP PSI 2024* Amélia Arangoits II

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

a. Donner au moins une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension fini.

b. Donner les valeurs propres de A.

c. La matrice A est-elle diagonalisable ?

d. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

103 *CCINP PSI 2024* Mattéo Aumaitre I

Soit $p \in]0;1[$, $q = 1-p$ et $r \in \mathbb{N}$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $p_n = q^r p^n \binom{n+r-1}{r-1}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = p_n$.

a. Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$ (vous donnerez le rayon de convergence).

b. En déduire celui de $\frac{1}{(1-x)^r}$.

c. Vérifier que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilité.

d. Déterminer la fonction génératrice de X.

e. Calculer l'espérance et la variance de X.

104 *CCINP PSI 2024* Yasmine Azzaoui I

a. Montrer que f définie par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x}$.

c. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = e^{-x}\ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.

d. Calculer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

105 *CCINP PSI 2024* Yasmine Azzaoui II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A et A^T commutent.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T)$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

c. En déduire qu'il existe $r \in [\![0;n]\!]$ et $P \in O(n)$ tels que $A = PBP^T$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $U \in GL_r(\mathbb{R})$.

106 *CCINP PSI 2024* Edward Bauduin et Jasmine Meyer I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Trouver la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Pour $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.

d. En déduire un développement de f en somme de séries de fonctions.

e. Trouver ce développement d'une autre manière.

107 *CCINP PSI 2024* Edward Bauduin II

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant $(1)\ :\ M^3 - 4M = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$.

a. Montrer que les valeurs propres de M sont des racines de $P = X^3 - 4X$.

b. En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant (1).

108 *CCINP PSI 2024* Amjad Belmiloud I

a. Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$. On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

b. Calculer χ_C en fonction de χ_A. En déduire $\mathrm{Sp}(C)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(A)$.

c. On suppose $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta = \gamma$. Calculer χ_B en fonction de χ_A, puis $\mathrm{Sp}(B)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(A)$.

d. Montrer que si $X \in \mathrm{Ker}\,(A)$, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B)$. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(B)) \geqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$.

e. Diagonaliser B pour $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 3$.

109 *CCINP PSI 2024* Amjad Belmiloud II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin\left(nx\,e^{-nx^2}\right)$.

a. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.

b. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a;1]$ avec $a \in]0;1[$.

c. En considérant $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[-1;1]$?

110 *CCINP PSI 2024* Mathéo Demongeot-Marais I

On considère une urne de $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. On réalise des tirages avec remise.

On note X_n le premier rang tel qu'une autre boule que la première soit tirée.

a. Montrer que X_n est une variable aléatoire discrète et déterminer la loi de X_n.

b. Montrer que X_n admet une espérance et la calculer.

c. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$. Interpréter.

Soit Y_n le premier rang tel que toutes les boules de l'urne aient été tirées au moins une fois.

d. Déterminer la loi de Y_2.

e. Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i < j$, déterminer $\mathbb{P}_{(X_3=i)}(Y_3 = j)$. En déduire la loi de Y_3.

111 *CCINP PSI 2024* Mathéo Demongeot-Marais II

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur orthogonal de E tel que $\operatorname{rang}(p) = r$.

a. Montrer que $\forall x \in E,\ (p(x)|p(x)) = (x|p(x))$.

b. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} ||p(v_i)||^2 = r$.

112 *CCINP PSI 2024* Olivier Farje I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$. Soit la fonction S définie par $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

e. Déterminer $S(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

f. Trouver un équivalent de $S'(x)$ quand x tend vers 0^+.

113 *CCINP PSI 2024* Olivier Farje II

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Résoudre (S) : $\begin{cases} x'' = & -x + y \\ y'' = & -x + 2y - z \\ z'' = & -3x + y + 2z \end{cases}$.

114 *CCINP PSI 2024* Émile Gauvrit I

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et les deux systèmes différentiels associés $(S_1)\ : \begin{cases} x' = & -2x + 4y + z \\ y' = & -x + 3y + z \\ z' = & -4x + 4y + 3z \end{cases}$

et $(S_2)\ : \begin{cases} x'' = & -2x + 4y + z \\ y'' = & -x + 3y + z \\ z'' = & -4x + 4y + 3z \end{cases}$. On définit la fonction $X : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. En posant $Y = P^{-1}X$ pour une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ bien choisie, déterminer un système différentiel (S_1') tel que X solution de (S_1) sur $\mathbb{R} \Longleftrightarrow Y$ solution de (S_1') sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire une expression des solutions de (S_1) sur $\mathbb{R}$.

d. Résoudre (S_2).

e. Les solutions réelles et bornées de (S_2) forment-elles un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Si oui, déterminer la dimension de cet espace.

115 *CCINP PSI 2024* Émile Gauvrit II

Soit $\lambda > 0$ et une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

b. Montrer que $\forall a > 0,\ \forall t \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.

c. En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

116 *CCINP PSI 2024* Lucie Girard I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Soit la fonction S définie par $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S.

b. Montrer que S est continue sur D.

c. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ sur D ?

d. Calculer $S'(x)$ pour x convenable.

e. En déduire une expression simple de $S(x)$ pour $x \in D$.

117 *CCINP PSI 2024* Lucie Girard II

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E,\ ||u(x)|| \leqslant ||x||$.

Soit $x \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.

a. Justifier l'existence d'un vecteur $y \in E$ tel que $u(y) = x + y$.

b. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(y)$ en fonction de n, x et y.

c. Que peut-on en déduire sur x ?

d. Que peut-on dire de $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ dans E ?

118 *CCINP PSI 2024* Clément Lacoste I

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$.

a. Trouver une expression de a_n en fonction de n.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant 4^n$.

c. En déduire une inégalité concernant le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

d. Montrer que pour des x convenables, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 1}$.

e. Donner une autre expression de a_n et la valeur de R.

119 *CCINP PSI 2024* Clément Lacoste II

a. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\exists! U_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)U_n(t)dt$.

c. Déterminer U_2.

120 *CCINP PSI 2024* Martin Mayot I

Soit $n \geqslant 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

a. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et U et V des matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P(U)$ et $P(V)$ sont semblables.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer M^k.

c. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, donner une expression de $P(M)$ en fonction de A, $P(A)$ et $P'(A)$.

d. Montrer que si M est diagonalisable, alors A l'est aussi.

e. Étudier la réciproque si A est inversible.

f. Montrer que si M est diagonalisable et A n'est pas inversible, alors $A = 0$.

121 *CCINP PSI 2024* Martin Mayot II

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a. Étudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^3$. Indication : considérer $u_{n+1} - u_n$.

c. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge. Indication : considérer $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

d. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$ grâce au théorème de Cesaro (question rajoutée). Indication : considérer $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$.

122 *CCINP PSI 2024* Jasmine Meyer II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

a. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de $P = X^3 - X^2 + X - 1$.

b. Calculer $\det(A)$.

c. Prouver que $\mathrm{Tr}\ (A) \in \mathbb{N}$.

123 *CCINP PSI 2024* Romane Mioque I

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.

a. La matrice $M^T M$ est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que $\mathrm{Sp}(M^T M) \subset \{-2, 2\}$.

c. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M^T M)$, alors $\lambda \geqslant 0$. En déduire $\mathrm{Sp}(M^T M)$.

d. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} M$ est orthogonale.

e. Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.

124 *CCINP PSI 2024* Romane Mioque II

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$.

a. Trouver des réels a, b, c, tels que $\forall t \notin \{-1, 0, 1\}$, $\dfrac{1}{t(t^2 - 1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1} + \dfrac{c}{t-1}$.

a. Résoudre (E) sur les intervalles où elle peut être mise sous forme normalisée.

b. Résoudre (E) sur $]-1; 1[$, puis sur $\mathbb{R}$.

125 *CCINP PSI 2024* Tom Sanchez I

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1; N]\!]$. On considère une urne avec $N - r$ boules blanches et r boules noires. On tire une boule successivement et sans remise dans cette urne, on note X_N le numéro du tirage lors duquel on retire la dernière boule noire.

a. Donner la loi de X_N et l'espérance de X_N dans les cas particuliers $r = 1$ et $r = N$.

On suppose dorénavant que $1 < r < N$.

b. Pour $k \in [\![1; N]\!]$, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X_N = k)$.

c. En déduire $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N et r.

126 *CCINP PSI 2024* Tom Sanchez II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AU = UB$ et $U \neq 0$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P(A) = 0$, alors $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P.

b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)U = UP(B)$.

c. En déduire A et B possèdent une valeur propre commune.

d. Montrer que si deux matrices C, D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont une valeur propre commune, il existe une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $CM = MD$.

PRÉPARATION ORAUX 2025
MINES - TÉLÉCOM

127 *Mines-Télécom PSI 2024* Mattéo Aumaitre I

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. On pose $S = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ et $\lambda < \mu$ ses deux valeurs propres.

a. Calculer λ et μ en fonction de X et Y.

b. Quelle est la probabilité pour que S soit inversible ?

c. Quelle est la probabilité pour que S soit définie positive ?

128 *Mines-Télécom PSI 2024* Mattéo Aumaitre II

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne non nul et la suite de vecteurs colonnes $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N},\ Y_k = \dfrac{S^k X}{||S^k X||}$.

Montrer que la suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur propre de S.

129 *Mines-Télécom PSI 2024* Mathéo Demongeot-Marais I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 x + n}$. Soit aussi f définie par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer qu'il existe un réel a tel que $\forall x > 0,\ \left| f(x) - \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{a}{x^2}$.

d. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

e. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

130 *Mines-Télécom PSI 2024* Mathéo Demongeot-Marais II

Soit E un espace de dimension n et p un projecteur de E. On pose $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ p = -p \circ f\}$.

a. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

b. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par f.

c. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que l'application induite par f sur $\mathrm{Im}(p)$ est l'application nulle.

d. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

131 *Mines-Télécom PSI 2024* Émile Gauvrit I

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ dans lequel on considère $F = \{(x,y,z,t) \in E \mid x+y-z-t = x-y+z-t = 0\}$.

a. Déterminer la matrice A dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F.

b. Que constate-t-on sur cette matrice ? Était-ce prévisible ?

132 *Mines-Télécom PSI 2024* Émile Gauvrit II

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Sur quelle domaine peut-on prolonger f ? f est-elle continue, dérivable, de classe C^1 ? De classe C^∞ ?

133 *Mines-Télécom PSI 2024* Clément Lacoste I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

b. Justifier que f est solution d'une équation différentielle du second degré (E) qu'on déterminera.

c. Conclure.

134 *Mines-Télécom PSI 2024* Clément Lacoste II

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

a. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$, montrer que les vecteurs propres de A sont aussi des vecteurs propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

c. Donner toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

135 *Mines-Télécom PSI 2024* Romane Mioque I

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ f(e_i) = e_i + u$.

a. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c. Déterminer la valeur de $\det(f)$ et $\mathrm{Tr}\,(f)$.

136 *Mines-Télécom PSI 2024* Romane Mioque II

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!(x+n)}$.

a. Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver des réels a et b tels que $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

137 *Mines-Télécom PSI 2024* Eva Rojo I

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. On note $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

a. Montrer que $\forall x \in]-R;R[,\ S(x) = x + S(x)^2$.

b. En déduire $S(x)$ pour $x \in]-R;R[$ et la valeur de R.

c. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$.

138 *Mines-Télécom PSI 2024* Eva Rojo II

On dispose d'un dé blanc non truqué et d'un dé noir pipé avec lequel la probabilité de faire 6 est $\frac{1}{3}$. Le joueur 1 prend un dé au choix et le lance, le joueur 2 lance l'autre dé. Celui qui a fait strictement plus que l'autre a gagné, et si le score est égal, le dé blanc gagne.
Quelle est la meilleure stratégie pour le joueur 1 ?

139 *Mines-Télécom PSI 2024* Tom Sanchez I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n)\ :\ x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ qu'on notera x_n.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

c. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$?