



PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2024 / 2025



EXERCICES PAR THÈME

- 1 : intégrales et analyse (10 exercices : 1-10)page 4
- 2 : algèbre linéaire et générale (6 exercices : 11-16)page 6
- 3 : séries numériques, séries de fonctions, séries entières (24 exercices : 17-40) page 8
- 4 : espaces vectoriels normés (8 exercices : 41-48) page 14
- 5 : réduction des endomorphismes (22 exercices : 49-70) page 16
- 6 : théorèmes de domination (9 exercices : 71-79) page 22
- 7 : espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens (24 exercices : 80-103) page 24
- 8 : probabilités et variables aléatoires (23 exercices : 104-126).....page 30
- 9 : équations différentielles et calcul différentiel (13 exercices : 127-139) page 36

EXERCICES PAR CONCOURS

- 1 : X (4 exercices)
numéros 1, 11, 80, 127
- 2 : ENS Cachan / Rennes (8 exercices)
numéros 41, 49-51, 81-82, 104-105
- 3 : Centrale Maths 1 (30 exercices)
numéros 2-4, 12-13, 17-18, 42-43, 52-53, 71-72, 83-88, 106-109, 128-132
- 4 : Mines (58 exercices)
numéros 5-9, 14-15, 21-29, 44-47, 54-62, 73-78, 89-97, 110-120, 133-135
- 5 : CCINP (26 exercices)
numéros 10, 30-35, 48, 63-68, 79, 98-101, 121-124, 136-138
- 6 : Mines-Télécom (13 exercices)
numéros 16, 36-40, 69-70, 102-103, 125-126, 139

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 1

INTÉGRALE ET ANALYSE

1 Comme f est de classe C^1 sur \mathbb{R} , f' est continue sur \mathbb{R} donc en particulier en 0. En prenant $\varepsilon = \eta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]-\eta, \eta[$, $|f'(x) - f'(0)| < \varepsilon = \eta \implies f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]-\eta; \eta[$. Posons $m = \min(-f(-\eta), f(\eta)) > 0$. Si, par exemple, $m = f(\eta)$ (l'autre cas est similaire), par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel qu'on note $-\alpha \in [-\eta; 0[$ (avec $0 < \alpha < \eta$) tel que $f(-\alpha) = -m$ car f réalise une bijection entre $[-\eta; 0]$ et $[f(-\eta); 0]$ qui contient $-m$ (faire un dessin).

En posant $\beta = \eta > 0$, on a donc $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $m > 0$ tels que f réalise une bijection strictement croissante entre $]-\alpha; \beta[$ et $]-m; m[$. Notons encore f cette restriction de la fonction initiale et posons $\psi = f^{-1} \circ (-f)$. On le peut car $-f$ réalise une bijection strictement décroissante de $]-\alpha; \beta[$ dans $]-m; -(-m)[=]-m; m[$ et que f^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $]-m; m[$ dans $]-\alpha; \beta[$. Par conséquent, par composition, ψ réalise une bijection strictement décroissante de $]-\alpha; \beta[$ dans $]-\alpha; \beta[$ et on a $\forall x \in]-\alpha; \beta[$, $\psi(x) = f^{-1} \circ (-f(x))$ donc $f(\psi(x)) = -f(x)$ et on a bien $f(x) = -f(\psi(x))$.

b. Comme $\forall x \in]-\alpha; \beta[$, $f'(x) > 0$, la fonction bijective $f^{-1} :]-\alpha; \beta[\rightarrow]-\alpha; \beta[$ est aussi de classe C^1 et ψ est donc de classe C^1 par composition. De plus, $\forall x \in]-\alpha; \beta[$, $\psi'(x) = -f'(x) \times \frac{1}{f'(f^{-1}(-f(x)))}$.

Enfin, ψ est involutive car $\forall x \in]-\alpha; \beta[$, $\psi^2(x) = f^{-1} \circ (-f(f^{-1} \circ (-f(x)))) = f^{-1} \circ (-(-f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$.

2 a. L'ensemble E est inclus dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et il est non vide car la fonction nulle, qui est continue sur \mathbb{R}_+ , vérifie $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$. De plus, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$, il existe par définition des réels positifs α et β tels que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $x^\beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Supposons par exemple que $\alpha \leq \beta$, comme la fonction $x \mapsto x^{\alpha-\beta}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ car $\alpha - \beta \leq 0$, on a $x^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda x^\alpha f(x) + \mu x^{\alpha-\beta} x^\beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\lambda f + \mu g \in E$ car cette fonction est continue sur \mathbb{R}_+ . Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ donc est lui-même un espace vectoriel.

b. D'abord, pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $h : t \mapsto e^{-t}f(t)$ est continue sur $[x; +\infty[$. Par définition de E , il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $h(t) = t^{-\alpha} e^{-t} t^\alpha f(t) = o(t^{-\alpha} e^{-t}) = o(e^{-t})$. Par comparaison à une intégrale de référence, h est intégrable sur $[x; +\infty[$ donc g est bien définie sur \mathbb{R}_+ . Par CHASLES, pour $x \in \mathbb{R}_+$, il vient $g(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt - e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt$. Comme h est continue sur \mathbb{R}_+ , par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $H : x \mapsto \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ est de classe C^1 sur l'intervalle \mathbb{R}_+ et $H(x) = h(x)$. Ainsi, par opérations, g est de classe C^1 et g est solution de (E_f) sur \mathbb{R}_+ car, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt - e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt - e^x e^{-x}f(x) = g(x) - f(x)$.

Comme les solutions réelles de l'équation homogène $(E_{f,0}) : y' - y = 0$ sur \mathbb{R}_+ sont toutes les fonctions $z_\lambda : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, par théorème de structure, les solutions réelles de (E_f) sur \mathbb{R}_+ sont toutes les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \left(\lambda + \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt\right)e^x$. On a $y_0 = g$, vérifions que $g \in E$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|x^\alpha g(x)| = \left| x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right| \leq x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} |t^\alpha f(t)| dt$ par inégalité triangulaire.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall t \geq A$, $|t^\alpha f(t)| \leq \varepsilon$. Ainsi, dès que

$x \geq A$, on a $|x^\alpha g(x)| \leq \varepsilon x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} dt \leq \varepsilon x^\alpha e^x x^{-\alpha} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt$ car $\forall t \geq x$, $t^{-\alpha} \leq x^{-\alpha}$ car $\alpha \geq 0$.

Comme $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_x^{+\infty} = e^{-x}$, on a donc $\forall x \geq A$, $|x^\alpha g(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi, $x^\alpha g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $g \in E$.

Or $x \mapsto e^x$ n'appartient pas à E car $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$, $x^\alpha e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc y_λ n'appartient à E que si $\lambda = 0$ et on

peut donc conclure que $g : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) appartenant à E .

Pour terminer, on peut établir que $E = F = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0\}$. En effet :

(C) Soit $f \in E$, il existe $\alpha \geq 0$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x) = x^{-\alpha} (x^\alpha f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $x \mapsto x^{-\alpha}$ est

bornée au voisinage de $+\infty$ car $\alpha \geq 0$. Comme f est continue sur \mathbb{R}_+ , on a bien $f \in F$.

(D) Soit $f \in F$, alors $f(x) = x^0 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f \in E$ car f est continue sur \mathbb{R}_+ .

La définition de E est donc un peu bizarre mais c'est pour vous faire travailler sur les majorations d'intégrales.

3 ↓

4 a. Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $f_z : t \mapsto e^{-zt}$ pour tout l'exercice. Traitons quatre cas :

- Si $z = 0$, la fonction f_z est constante et vaut 1 donc f_z admet une limite finie $\ell = 1$ en $+\infty$.
- Si $\operatorname{Re}(z) > 0$, comme $|f_z(t)| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_z(t)| = 0$ donc f_z admet une limite finie $\ell = 0$ en $+\infty$.
- Si $\operatorname{Re}(z) < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_z(t)| = +\infty$ car $|f_z(t)| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$ donc f_z n'admet pas de limite finie en $+\infty$.
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) \neq 0$, supposons que f_z admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$, par caractérisation séquentielle de la limite, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_z\left(\frac{n\pi}{|\operatorname{Im}(z)|}\right) = \ell$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{|\operatorname{Im}(z)|} = +\infty$, ce qui s'écrit aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\pm i n \pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = \ell$, et c'est absurde.

Ainsi, $t \mapsto e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$ ou $z = 0$.

b. Comme $|f_z(t)| = |e^{-\operatorname{Re}(z)t - i \operatorname{Im}(z)t}| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$, qu'on sait, pour $a \in \mathbb{R}$, que $\int_0^{+\infty} e^{at} dt$ converge si et seulement si $a < 0$ d'après le cours, et que f_z est continue sur \mathbb{R}_+ , la fonction f_z est intégrable sur \mathbb{R}_+ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$, la fonction $g_z : t \mapsto e^{-zt}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

- Si $z = 0$, g_z est constante et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty} g_0(t) dt = \int_0^{+\infty} 1 dt$ diverge.
- Si $z \neq 0$, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x e^{-zt} dt = \left[-\frac{e^{-zt}}{z} \right]_0^x = \frac{1 - e^{-zx}}{z}$. Ainsi, avec la question a., comme $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_0^x e^{-zt} dt$ admet une limite finie en $+\infty$ par définition, $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

d. Comme $h : t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$ est continue sur l'intervalle \mathbb{R}_+ , par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ car c'est la primitive de h qui s'annule en 0. Comme $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ converge par hypothèse, la fonction F admet une limite finie en $+\infty$ par définition. Comme F est continue sur \mathbb{R}_+ et admet une limite finie $I = \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ en $+\infty$, il est classique que F est bornée sur \mathbb{R}_+ .

En effet, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq A, |F(x) - I| \leq \varepsilon = 1$ ce qui montre que $|F(x)| = |(F(x) - I) + I| \leq |F(x) - I| + |I| \leq |I| + 1$. Comme F est continue sur le segment $[0; A]$, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [0; A], |F(x)| \leq M$. Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+, |F(x)| \leq \text{Max}(|I| + 1, M)$ et F est bien bornée sur \mathbb{R}_+ .

e. La fonction $a_z : t \mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $|a_z(t)| = |e^{-(z-z_0)t}F(t)| \underset{+\infty}{=} O(|e^{-(z-z_0)t}|)$ d'après la question précédente donc, d'après la question **b.** et par comparaison car $\text{Re}(z - z_0) > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |a_z(t)| dt$ converge donc a_z est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

f. Comme $z \neq z_0$, en posant $u : t \mapsto -\frac{e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0}$ et $v = F$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ d'après **d.** et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ d'après **d.** car F est bornée sur \mathbb{R}_+ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(z-z_0)t} = 0$ puisque $\text{Re}(z - z_0) > 0$. Par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0} \times (e^{-z_0 t} f'(t)) dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ ont même nature. Or $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après **e.** et $\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0} \times (e^{-z_0 t} f'(t)) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-zt} f'(t)}{z - z_0} dt$ converge et on a la relation $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-zt} f'(t)}{z - z_0} dt = 0 - \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ car $F(0) = 0$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$.

Questions supplémentaires :

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$, $f : \widetilde{[a; b]} \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} de classe C^{n+1} avec $n \in \mathbb{N}$, on a la formule de TAYLOR reste intégral, $f(b) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

- Avec ces conditions, on note $M_{n+1} = \text{Max}_{x \in \widetilde{[a; b]}} |f^{(n+1)}(x)|$ (qui existe car $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment

$\widetilde{[a; b]}$) et on a l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE $\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1}|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

⑤ La fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$ est continue sur $[1; +\infty[$. De plus, $\text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^3)$

et, en intégrant ce développement limité, on a $\text{Arcsin}(y) = y + \frac{y^3}{6} + o(y^4)$ car $\text{Arcsin}(0) = 0$. Ainsi, on obtient

$f(x) = \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ce qui montre que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^3}$. Par comparaison aux intégrales de

RIEMANN, on en déduit que la fonction f est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Méthode 1 : dans $I = \int_1^{+\infty} \left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) dx$, on pose $u : x \mapsto x$ et $v = f$ qui sont de classe C^1 sur $]1; +\infty[$

et, comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} u(x)v(x) = f(1) = \frac{\pi}{2} - 1$ par continuité de Arcsin en 1 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ car $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^2}$,

on obtient la relation $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} xf'(x) dx = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} x \left(\frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \right) \right) dx$ ce qui se simplifie

en $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx$. On pose ensuite $x = \frac{1}{\sin(u)} = \varphi(u)$ avec φ bijection strictement

décroissante de classe C^1 de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans $]1; +\infty[$ et $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_{\pi/2}^0 \sin(u) \left(\frac{\cos(u)-1}{\cos(u)} \right) \left(-\frac{\cos(u)}{\sin^2(u)} \right) du$.

Ainsi, $I = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(u)}{\sin(u)} du = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2(u/2)}{2 \sin(u/2) \cos(u/2)} du = 1 - \frac{\pi}{2} + \left[-2 \ln(\cos(u/2)) \right]_0^{\pi/2}$
 et enfin $I = 1 + \ln(2) - \frac{\pi}{2} \sim 0,12$.

Méthode 2 : dans $I = \int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) dx$, on pose $\theta = \operatorname{Arcsin}(1/x)$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{\sin(\theta)} = \varphi(\theta)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $]0; \frac{\pi}{2}]$ dans $[1; +\infty[$. Par changement de variable, il vient $I = \int_{\pi/2}^0 (\theta - \sin(\theta)) \left(-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) d\theta$. Les deux fonctions $a : \theta \mapsto \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}$ et $b : \theta \mapsto \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ne sont pas intégrables en 0^+ car $a(\theta) \sim b(\theta) \sim \frac{1}{\theta}$. Par contre, on peut écrire $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta - \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \right)$ car, pour $\varepsilon \in]0; \frac{\pi}{2}]$, les deux fonctions a et b sont continues sur le segment $[\varepsilon; \frac{\pi}{2}]$. Or $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = [\ln(\sin(\theta))]_{\varepsilon}^{\pi/2} = -\ln(\sin(\varepsilon))$ et, en posant les fonctions $u : \theta \mapsto \theta$ et $v : \theta \mapsto -\frac{1}{\sin(\theta)}$ qui sont de classe C^1 sur $[\varepsilon; \frac{\pi}{2}]$, par intégration par parties, $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta = \left[-\frac{\theta}{\sin(\theta)} \right]_{\varepsilon}^{\pi/2} + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} + \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]_{\varepsilon}^{\pi/2}$ ce qui donne $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} - \ln \left(\tan \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$. Alors, en regroupant les termes, on parvient à $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta - \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} - \ln \left(\frac{\tan(\varepsilon/2)}{\sin(\varepsilon)} \right)$. Comme $\sin(\varepsilon) \sim \varepsilon$ et $\tan \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \sim \frac{\varepsilon}{2}$, en passant à la limite quand ε tend vers 0^+ , on a $I = 1 + \ln(2) - \frac{\pi}{2} \sim 0,12$.

- 6** a. La fonction $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* donc sur $[x; +\infty[$ pour $x > 0$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où g est intégrable sur $[x; +\infty[$ ce qui montre que f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* . Comme, pour $x > 0$, on a $f(x) = \int_1^{+\infty} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$ et que $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ est la primitive de g qui s'annule en 1 par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x > 0$, $f'(x) = -g(x) = -\frac{\sin(x)}{x^2}$.
- b. La fonction $h : u \mapsto \frac{\sin(u)}{u}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$ car $\sin(u) \sim u$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge. Posons les fonctions $a : u \mapsto -\cos(u)$ et $b : u \mapsto \frac{1}{u}$ qui sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et vérifient $\lim_{u \rightarrow +\infty} a(u)b(u) = 0$ donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_1^{+\infty} a'b = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ et $\int_1^{+\infty} ab' = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2} du$ sont de même nature. Or la seconde est absolument convergente car $d : u \mapsto \frac{\cos(u)}{u^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et $d(u) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{u^2}\right)$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge (mais pas absolument) et on pose $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.
- c. Pour $x > 0$, $f(x) = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = -\int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^1 \frac{\sin(t) - t}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$. La fonction $h : t \mapsto \frac{\sin(t) - 1}{t^2}$ est continue sur $[0; 1]$ en la prolongeant par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$ car $\sin(t) - t \sim -\frac{t^3}{6}$ donc $h(t) \sim -\frac{t}{6}$. Comme h est négative sur $[0; 1]$ par concavité de \sin sur $[0; 1]$, on a $\forall x \in]0; 1]$, $\left| \int_x^1 h(t) dt \right| = -\int_x^1 h(t) dt \leq \int_x^1 \|h\|_{\infty, [0; 1]} dt = \|h\|_{\infty, [0; 1]}$ car h est continue sur le segment

$[0; 1]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes. Par conséquent, $f(x) = -\ln(x) + O(1)$ qui montre, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, que $f(x) = -\ln(x) + o(\ln(x))$ donc que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

d. Pour $x > 0$, par inégalité triangulaire, il vient $|f(x)| = \left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ donc $|f(x)| \leq \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}$ et on a bien $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

e. Dans l'expression de $f(x)$, on pose $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et vérifient $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc $f(x) = \int_x^{+\infty} u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ par intégration par parties d'où $f(x) = \frac{-\cos(x)}{x^2} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt$. Or, comme avant, $\left| \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2x^2}$ donc, puisque $\frac{-\cos(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, par somme, on obtient $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

f. f est continue sur \mathbb{R}_+^* puisqu'elle y est de classe C^1 , $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f est intégrable en 0^+ et en $+\infty$ donc f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

g. Dans l'expression de $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$, on pose $u : x \mapsto x$ et $v = f$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* d'après **a.** et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$ d'après **c.** et **e.** et par croissances comparées car $u(x)v(x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$ et $u(x)v(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi, par intégration par parties, comme on sait d'après **f.** que ces intégrales convergent, $I = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x) dx = 0 - \int_0^{+\infty} u(x)v'(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = J$.

En supposant pouvoir intervertir les intégrales double avec le théorème de FUBINI, on trouve (mais sans preuve) $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right) dx = \iint_{0 < x < t} g(t) dt dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t g(t) dx \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = J$. Il se trouve que cette intégrale, dite de DIRICHLET, a pour valeur $\frac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire !

7 ↑

8 Petit rappel ou pas : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x^z = e^{(a+ib) \ln(x)} = e^{a \ln(x)} e^{ib \ln(x)} = x^a (\cos(b \ln(x)) + i \sin(b \ln(x)))$. Ainsi, $|x^z| = x^a = x^{\operatorname{Re}(z)} > 0$.

a. Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left| \frac{1}{k^s} \right| = \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}}$ et la série de RIEMANN $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}}$ converge d'après le cours donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ converge absolument donc elle converge, ce qui assure que la suite des sommes

partielles $\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} \right)_{N \geq 1}$ converge. De plus, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{N^{1-s}}{1-s} \right| = \frac{N^{1-\operatorname{Re}(s)}}{|1-s|} = \frac{1}{|1-s| N^{\operatorname{Re}(s)-1}}$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{|1-s| N^{\operatorname{Re}(s)-1}} = 0$ car $\operatorname{Re}(s) > 1$. Par différence de suites convergentes, la suite $(S_N(s))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge, ce qui assure l'existence de $\zeta(s)$ (la fonction de RIEMANN définie dans le cours si $s > 1$ est réel).

b. Avec $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, la fonction $g_s : t \mapsto \frac{1}{[t]^s}$ est continue par morceaux sur le segment $[1; N+1]$ donc $\int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt$ existe. Avec la relation de CHASLES, et comme g_s est constante sur l'intervalle $[k; k+1[$ et vaut $\frac{1}{k^s}$ pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on a $\int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{[t]^s} dt = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{k^s} dt = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}$.

c. On suppose $a = \operatorname{Re}(s) > 0$ et on pose $b = \operatorname{Im}(s)$, la fonction $h_s : t \mapsto \frac{1}{t^s} - \frac{1}{[t]^s}$ est continue

par morceaux sur $[1; +\infty[$ puisqu'elle l'est sur tout segment inclus dans $[1; +\infty[$. Pour $t \in [1; +\infty[$, il vient $h_s(t) = \frac{1}{t^{a+ib}} - \frac{1}{[t]^{a+ib}} = \frac{[t]^{a+ib} - t^{a+ib}}{t^{a+ib} [t]^{a+ib}}$ donc $|h_s(t)| = \frac{|[t]^a e^{ib \ln([t])} - t^a e^{ib \ln(t)}|}{t^a [t]^a}$ qu'on

peut écrire $|h_s(t)| = \frac{|[t]^a e^{ib \ln(\frac{[t]}{t})} - t^a|}{t^a [t]^a} = \frac{|(\frac{[t]}{t})^a e^{ib \ln(\frac{[t]}{t})} - 1|}{[t]^a}$. De plus, par définition de la partie entière, pour un réel $t > 1$, on a $0 < t - 1 < [t] \leq t$ donc $[t] \underset{+\infty}{\sim} t$ d'où $[t]^a \underset{+\infty}{\sim} t^a$ et, en posant $\{t\} = t - [t] \in [0; 1[$ la partie fractionnaire de t , on a $\frac{[t]}{t} = \frac{t - \{t\}}{t} = 1 - y \underset{+\infty}{\sim} 1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$

en notant $y = \frac{\{t\}}{t} \in [0; \frac{1}{t}[$ et $|h_s(t)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|(\frac{[t]}{t})^a e^{ib \ln(\frac{[t]}{t})} - 1|}{t^a} = \frac{|(1-y)^a e^{ib \ln(1-y)} - 1|}{t^a}$ et on arrive à $|h_s(t)| \underset{+\infty}{=} \frac{|(1-ay + o(y))e^{ib(-y+o(y))} - 1|}{t^a} \underset{+\infty}{=} \frac{|(1-ay + o(y))(1-iby + o(y)) - 1|}{t^a} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{a+1}}\right)$. Alors,

par critère de RIEMANN, h_s est intégrable sur $[1; +\infty[$ car $a + 1 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^s} - \frac{1}{[t]^s}\right) dt$ existe.

Si s était un réel différent de 1, on aurait directement $\frac{N^{1-s} - 1}{1-s} = \int_1^N t^{-s} dt = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^N$. Vérifions que cette relation est vraie même si s est complexe. Pour $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $f_z : t \mapsto t^z = t^\alpha e^{i\beta \ln(t)}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* par opérations et $\forall t > 0$, $f'_z(t) = \alpha t^{\alpha-1} e^{i\beta \ln(t)} + t^\alpha \left(\frac{i\beta}{t}\right) e^{i\beta \ln(t)} = \frac{\alpha + i\beta}{t} t^\alpha e^{i\beta \ln(t)}$ donc $f'_z(t) = z f_{z-1}(t)$ donc, par le théorème fondamental de l'intégration, en prenant $z = 1 - s \in \mathbb{C}^*$, on obtient $\int_1^N t^{-s} dt = \int_1^N f_{z-1} dt = \left[\frac{f_z(t)}{z}\right]_1^N = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^N = \frac{N^{1-s} - 1}{1-s}$.

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(s) = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}\right) - \frac{N^{1-s}}{1-s} = \int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt - \int_1^N t^{-s} dt - \frac{1}{1-s}$ qui s'écrit aussi, par linéarité de l'intégrale et CHASLES, $S_N(s) = \int_N^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt + \int_1^N \left(\frac{1}{[t]^s} - \frac{1}{t^s}\right) dt - \frac{1}{1-s}$.

Comme $\left|\int_N^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt\right| = \left|\int_N^{N+1} \frac{1}{N^s} dt\right| = \left|\frac{1}{N^s}\right| = \frac{1}{N^{\operatorname{Re}(s)}}$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_N^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt = 0$ car $\operatorname{Re}(s) > 0$ et, avec la convergence précédente, $(S_N(s))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge donc $\zeta(s)$ existe et, comme $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(s)$, on obtient la relation $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[t]^s} - \frac{1}{t^s}\right) dt$.

9 ↓

10 a. La fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , $g(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ et l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Ainsi, par comparaison, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge pour tout $x > 0$ ce qui montre que f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* . De plus, par CHASLES, $\forall x > 0$, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$. En posant $G : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$, la fonction G est la primitive de g qui s'annule en 1 par le théorème fondamental de l'intégration car g est continue sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* . Ainsi, comme $f = G(1) - G$, par opérations, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x > 0$, $f'(x) = -G'(x) = -g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

b. Méthode 1 : pour $x > 0$, comme $\forall t \geq x$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ donc $\frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$ car $e^{-t} > 0$, par croissance de l'intégrale, on a $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x} [-e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{e^{-x}}{x} - f(x)$. D'après a., la fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+^*

et $\forall x > 0$, $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x} = -\frac{e^{-x}}{x^2} < 0$ donc g est décroissante sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* . Comme

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ en tant que reste d'une intégrale convergente, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ donc g reste positive sur \mathbb{R}_+^* ce qui montre que $\forall x > 0$, $f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

c. Pour $x > 0$, on pose $u : t \mapsto e^{-t}$ et $v : t \mapsto \ln(t)$. Comme les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient, par intégration par parties, la relation

$$f(x) = \int_x^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} u'(t)v(t)dt = e^{-x} \ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t)dt.$$

d. La fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^* . D'après **b.**, $f(x) = o(e^{-x})$ donc, comme en **a.**, f est intégrable en $+\infty$. Soit $h : t \mapsto e^{-t} \ln(t)$, la fonction h est continue sur \mathbb{R}_+^* et $h(t) = o(e^{-t/2})$ par croissances

comparées donc h est intégrable en $+\infty$. De plus, $h(t) \underset{0}{\sim} \ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et l'intégrale de RIEMANN $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge donc, par comparaison, h est intégrable en 0^+ . Par conséquent, h est intégrable sur \mathbb{R}_+^* donc,

$\forall x > 0$, $\left| \int_x^{+\infty} h(t)dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |h(t)|dt \leq \int_0^{+\infty} |h(t)|dt$ ce qui montre que $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t)dt$ est bornée sur \mathbb{R}_+^* . On en déduit avec **c.** que $f(x) = e^{-x} \ln(x) + O(1) = e^{-x} \ln(x) + o(e^{-x} \ln(x))$ qui s'écrit aussi

$f(x) \underset{0}{\sim} e^{-x} \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est donc intégrable en 0^+ . Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v = f$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = 0$ car $u(x)v(x) = xf(x) \underset{0}{\sim} x \ln(x)$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ car $0 \leq u(x)v(x) = xf(x) \leq e^{-x}$ avec la question **b.** et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ (encadrement). Ainsi, par intégration par parties, on obtient la valeur

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

Avec FUBINI (HP), $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{e^{-t}}{t} dx \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 2

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

11 Méthode 1 : On va montrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que \mathcal{F} vérifiant ces conditions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est toujours finie et que son cardinal est inférieur à 2^n .

Initialisation : si $n = 1$, les seules matrices $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = I_1$ sont $A = (1)$ et $A = (-1)$. Alors, \mathcal{F} comporte donc 1 ou 2 éléments, en prenant $\mathcal{F} = \{(1)\}$, $\mathcal{F} = \{(-1)\}$ ou $\mathcal{F} = \{(1), (-1)\}$ et on a $\text{card}(\mathcal{F}) \leq 2$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille \mathcal{F} contenant des matrices de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et vérifiant les hypothèses de l'énoncé est finie et de cardinal inférieur à 2^k . On prend maintenant une famille non vide $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}))^I$ telle que $\forall i \in I, A_i^2 = I_{n+1}$ et $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$:

- Si $\mathcal{F} = (I_{n+1})$ ou $\mathcal{F} = (-I_{n+1})$ ou $\mathcal{F} = (I_{n+1}, -I_{n+1})$, alors \mathcal{F} est finie et $\text{card}(\mathcal{F}) \leq 2 \leq 2^{n+1}$.
- Si $\mathcal{F} \neq (I_{n+1})$ et $\mathcal{F} \neq (-I_{n+1})$ et $\mathcal{F} \neq (I_{n+1}, -I_{n+1})$ (ou dans l'autre ordre bien sûr), il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $A_{i_0} \neq \pm I_{n+1}$. Comme A_{i_0} est une symétrie, on a $\mathbb{C}^{n+1} = E_1(A_{i_0}) \oplus E_{-1}(A_{i_0})$ avec $1 \leq p = \dim(E_1(A_{i_0})) \leq n - 1$ et $1 \leq q = \dim(E_{-1}(A_{i_0})) \leq n - 1$ car $A_{i_0} \neq \pm I_{n+1}$. Pour tout $i \in I, A_i A_{i_0} = A_{i_0} A_i$ donc les sous-espaces propres $E_1(A_{i_0})$ et $E_{-1}(A_{i_0})$ de la symétrie A_{i_0} sont stables par A_i . Soit une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q)$ de \mathbb{C}^{n+1} adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^{n+1} = E_1(A_{i_0}) \oplus E_{-1}(A_{i_0})$. Notons P la matrice de passage entre la base canonique de \mathbb{C}^{n+1} et la base \mathcal{B} . Les stabilités de $E_1(A_{i_0})$ et $E_{-1}(A_{i_0})$ par tous les A_i se traduisent par le fait que $\forall i \in I, D_i = P^{-1} A_i P = \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix}$ car $D_i = P^{-1} A_i P$ est la matrice de l'endomorphisme α_i de \mathbb{C}^{n+1} canoniquement associé à A_i dans la base \mathcal{B} . Comme $A_i^2 = I_{n+1}$, on a $D_i^2 = I_{n+1}$ donc $B_i^2 = I_p$ et $C_i^2 = I_q$. Or $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$ se traduit par $\forall (i, j) \in I^2, D_i D_j = D_j D_i$ donc $\forall (i, j) \in I^2, B_i B_j = B_j B_i$ et $\forall (i, j) \in I^2, C_i C_j = C_j C_i$.

Ainsi, $\mathcal{F}_p = (B_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{C}))^I$ est une famille telle que $\forall i \in I, B_i^2 = I_p$ et $\forall (i, j) \in I^2, B_i B_j = B_j B_i$ et $\mathcal{F}_q = (C_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_q(\mathbb{C}))^I$ est une famille telle que $\forall i \in I, C_i^2 = I_q$ et $\forall (i, j) \in I^2, C_i C_j = C_j C_i$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\text{card}(\mathcal{F}_p) \leq 2^p$ et $\text{card}(\mathcal{F}_q) \leq 2^q$. Comme les matrices de \mathcal{F} sont des images de couples $(B, C) \in \mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_q$ par l'application $(B, C) \mapsto P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} P^{-1}$ qui est injective, on a $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \text{card}(\mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_q) = \text{card}(\mathcal{F}_p) \times \text{card}(\mathcal{F}_q) \leq 2^p \times 2^q = 2^{n+1}$.

Par récurrence forte, on a établi que si une famille $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^I$ vérifie $\forall i \in I, A_i^2 = I_n$ et $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$, alors cette famille est finie et $\text{card}(\mathcal{F}) \leq 2^n$.

Méthode 2 : montrons par récurrence sur le nombre p de matrices d'une famille de matrices de même taille $n \in \mathbb{N}^*$ (quelconque) que si une famille $\mathcal{F} = (A_i)_{1 \leq i \leq p}$ de p matrices ne contient que des matrices diagonalisables qui commutent deux à deux, alors il existe une base de \mathbb{K}^n (et donc $P \in GL_n(\mathbb{K})$) formée de vecteurs propres de toutes ces matrices (telle que $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, P^{-1} A_i P$ est diagonale).

Initialisation : si $p = 1$, il n'y a qu'une matrice $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans la famille $\mathcal{F} = (A_1)$ et l'existence de

$P \in GL_n(\mathbb{K})$ provient de l'hypothèse que A est diagonalisable.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille de p matrices de même taille n (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$) qui sont diagonalisables et qui commutent deux à deux se codiagonalisent. Soit $\mathcal{F} = (A_1, \dots, A_{p+1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{p+1}$ telle que A_1, \dots, A_{p+1} sont diagonalisables et commutent deux à deux. Comme A_{p+1} est diagonalisable, $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A_{p+1} . Comme A_1, \dots, A_p commutent avec A_{p+1} , les sous-espaces propres de A_{p+1} sont stables par A_1, \dots, A_p et les endomorphismes induits par A_1, \dots, A_p sur $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ (pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$) sont diagonalisables car A_1, \dots, A_p le sont.

Par hypothèse de récurrence, comme les endomorphismes induits par A_1, \dots, A_p dans $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ sont tous diagonalisables et commutent deux à deux, il existe une base \mathcal{B}_i de $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ qui est une base de vecteurs propres communs à tous ces endomorphismes induits.

Posons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \dots \amalg \mathcal{B}_r$, alors \mathcal{B} est une base de \mathbb{K}^n car $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ et les vecteurs de \mathcal{B} sont des vecteurs propres de A_1, \dots, A_p par construction et de A_{p+1} car ce sont des vecteurs non nuls d'un $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$. Par principe de récurrence, on a bien établi la propriété énoncée plus haut.

Dans notre cas, pour $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^I$ telle que $\forall i \in I, A_i^2 = I_n$ et $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$ les A_i sont diagonalisables car $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est scindé à racines simples et annulateur des A_i . Le résultat prouvé ci-dessus montre que si on prend une famille finie $J \subset I$, les matrices A_j de la famille $\mathcal{F}' = (A_j)_{j \in J}$ codiagonalisent, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall j \in J, P^{-1} A_j P = D_j$ diagonale. Mais les D_j contiennent seulement des ± 1 sur la diagonale car $\text{Sp}(A_j) \subset \{-1, 1\}$. Il y a donc au plus 2^n matrices D_j possibles donc, par injectivité de l'application $M \mapsto P M P^{-1}$, il y a au plus 2^n matrices A_j dans la famille \mathcal{F}' . On vient donc de montrer que si $J \subset I$ est fini, alors $\text{card}(J) \leq 2^n$. Ainsi, I est fini et $\text{card}(I) \leq 2^n$.

12 a. Il est classique qu'une application lipschitzienne est continue (même uniformément pour les ex-MPSI). Pour le prouver ici, soit $f \in E$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$ donc, par encadrement $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ce qui montre la continuité de f en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. f est donc continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $E \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

De plus, $E \neq \emptyset$ car la fonction nulle est bien continue et 0-lipschitzienne donc $0 \in E$.

Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe $(k, k') \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ et $|g(x) - g(y)| \leq k'|x - y|$. La fonction $\lambda f + g$ est d'abord continue sur \mathbb{R} par linéarité de la continuité et, par inégalité triangulaire, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(y)| = |\lambda f(x) - \lambda f(y) + g(x) - g(y)| \leq |\lambda|k|x - y| + k'|x - y|$ donc $\lambda f + g$ est aussi lipschitzienne associée à la constante $|\lambda|k + k'$. E est donc stable par combinaison linéaire. Tout ce qui précède fait de E un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc E est lui-même un espace vectoriel.

b. Définissons $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(f) = f(0)$. Il est clair que φ est une forme linéaire sur E , et comme $F = \text{Ker}(\varphi)$ par définition, F est un sous-espace vectoriel de E , donc un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et enfin F est lui-même un espace vectoriel. On pouvait le faire de manière plus classique.

Comme φ est non nulle car $\cos \in E$ et $\varphi(\cos) = 1$ par exemple, F est un hyperplan de E donc on attend une droite comme supplémentaire de F . Posons $G = \text{Vect}(1)$ le sous-espace vectoriel des fonctions constantes. Si

$f \in F \cap G$, alors f est constante et nulle en 0 donc nulle sur \mathbb{R} et $F \cap G = \{0\}$ donc F et G sont déjà en somme directe. De plus, pour $f \in E$, on peut écrire $f = f - f(0) + f(0)$ ($f(0)$ signifie ici la fonction constante valant toujours $f(0)$) et la fonction $g = f - f(0) \in F$ est toujours lipschitzienne (même constante que celle de f) et elle s'annule en 0 et $h = f(0) \in G$ de sorte que $E = F + G$. Ainsi, G est un supplémentaire de F .

c. Soit $f \in F$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. L'application g de l'énoncé est bien définie sur \mathbb{R} en fonction de f et la linéarité de φ_t est claire. De plus, g est kt -lipschitzienne car $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y) - f(tx) + f(ty)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(tx) - f(ty)| \leq k|x - y| + k|tx - ty|$ donc $|g(x) - g(y)| \leq (1 + t)k|x - y|$. Comme $g(0) = f(0) - f(0) = 0$, il vient $g = \varphi_t(f) \in F$ donc φ_t est bien un endomorphisme de F .

Si $f \in \text{Ker}(\varphi_t)$, on a $\varphi_t(f) = 0$ donc, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\varphi_t(f)(x) = 0$ d'où $f(x) = f(tx) = f(t^2x) = \dots$ ce qui donne par une récurrence simple : $\forall k \in \mathbb{N}, f(t^k x) = f(x)$. Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} t^k x = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t^k x) = f(0) = 0 = f(x)$ (suite constante). Ainsi $\text{Ker}(\varphi_t) = \{0\}$ et φ_t est injective de F dans F .

d. Par télescopage, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} g(t^k x) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(t^k x) - f(t^{k+1} x)) = f(x) - f(t^n x)$. À nouveau, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t^n x) = f(0) = 0$, on obtient $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$.

Réciproquement, soit $g \in F$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que g est k -lipschitzienne, la série $\sum_{n \geq 0} g(t^n x)$ est absolument convergente car $|g(t^n x)| \leq kt^n|x|$ et que la série géométrique $\sum_{n \geq 0} kt^n$ converge car $0 < t < 1$. Ainsi,

la fonction $f : x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} g(t^n x)$ est bien définie, elle vérifie clairement $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - f(tx)$ par télescopage et car $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(t^n x) = g(0) = 0$. De plus, on a $f(0) = 0$ car $g(0) = 0$ et, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il vient $|f(x) - f(y)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} g(t^n x) - \sum_{n=0}^{+\infty} g(t^n y) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |g(t^n x) - g(t^n y)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} kt^n|x - y| = \frac{k}{1-t}|x - y|$ donc $f \in F$ car f est $\frac{k}{1-t}$ -lipschitzienne et $g = \varphi_t(f)$. On en déduit que φ_t est aussi surjective de F dans F .

Par conséquent, φ_t est un automorphisme de F .

e. Si $f \in F$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_t^2(f)(x) = \varphi_t(x) - \varphi_t(tx) = f(x) - f(tx) - (f(tx) - f(t(tx))) = f(x) - 2f(tx) + f(t^2x)$ donc l'équation de l'énoncé se traduit par $\varphi_t^2(f) = \text{id}_{\mathbb{R}} = h$. Or $h \in F$ et, d'après la question **d.** et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_t^{-1}(h)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(t^n x) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n x = \frac{x}{1-t}$ donc $\varphi_t^{-1}(h) = \frac{1}{1-t}h$. Comme φ_t est bijective, on a l'équivalence $\varphi_t^2(f) = h \iff f = \varphi^{-2}(h) = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(h)) = \frac{h}{(1-t)^2}$. Il existe une unique fonction dans F qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x$ et c'est la fonction $f = \frac{\text{id}_{\mathbb{R}}}{(1-t)^2} : x \mapsto \frac{x}{(1-t)^2}$.

13 ↓

14 ↓

15 a. Par le binôme de NEWTON, $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, (X + 1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$. Ainsi, A_n est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme $f_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f_n(P) = P(X + 1)$ (clairement linéaire et allant de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$). Si on définit $g_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ par $g_n(P) = P(X - 1)$,

alors $f_n \circ g_n = g_n \circ f_n = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $g_n = f_n^{-1}$. Par conséquent,

$$A_n^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(g_n) \text{ et, comme } \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, (X-1)^j = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i, A_n^{-1} = B_n = \left((-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n l'ensemble de toutes les permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$. On sait que $\text{card}(S_n) = n!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_n selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{n,i}$

l'ensemble des permutations de S_n qui ont exactement i points fixes. Alors $S_n = \bigsqcup_{i=0}^n S_{n,i}$ (réunion disjointe)

avec $S_{n,n-1} = \emptyset$ car si une permutation de S_n a au moins $n-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait n points fixes. On a donc $\text{card}(S_n) = n! = \sum_{i=0}^n \text{card}(S_{n,i})$. Pour dénombrer $S_{n,i}$, on choisit les i

points fixes parmi les éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ce qui fait $\binom{n}{i}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $n-i$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de d_{n-i} par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{n,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange").

On obtient donc $\text{card}(S_{n,i}) = \binom{n}{i} d_{n-i}$. Par conséquent, on a $n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} d_{n-i}$ et le changement d'indice

$$k = n - i \text{ donne bien le résultat attendu, à savoir } n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k \text{ car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

c. Les relations trouvées à la question précédente s'écrivent matriciellement $A_n^T \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$.

d. Comme A_n est inversible et que $(A_n^T)^{-1} = (A_n^{-1})^T = B_n^T$, on a donc $\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = B_n^T \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$. On en

déduit donc, en regardant la dernière ligne de ce produit, que $d_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j! = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}$ et le

changement d'indice $k = n - j$ permet d'écrire $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

e. Comme la loi sur S_n est la loi uniforme par hypothèse ("au hasard"), on a $p_n = \frac{\text{card}(S_{n,0})}{\text{card}(S_n)} = \frac{d_n}{n!}$ donc

$$p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \text{ Avec le développement en série entière de } \exp, \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \sim 0,36.$$

16 a. L'ensemble \mathcal{F} est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ par construction. De plus, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{F}$. Enfin,

si $(f, g) \in \mathcal{F}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda f + g) \circ p = \lambda f \circ p + g \circ p = -\lambda p \circ f - p \circ g = -p \circ (\lambda f + g)$ donc, comme $\lambda f + g \in \mathcal{L}(E)$, on a $\lambda f + g \in \mathcal{F}$. Ainsi, \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ donc est un espace vectoriel.

b. • Soit $x \in \text{Im}(p)$, alors $p(x) = x$ donc $f(x) = f \circ p(x) = -p(f(x)) \in \text{Im}(p)$: $\text{Im}(p)$ est stable par f .

• Soit $x \in \text{Ker}(p)$, $p(f(x)) = -f \circ p(x) = -f(p(x)) = -f(0_E) = 0_E$ donc $f(x) \in \text{Ker}(p)$: $\text{Ker}(p)$ est stable par f .

c. Pour $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \text{Im}(p)$, on a $f(x) = f(p(x)) = -p(f(x)) = -f(x)$ car $f(x) \in \text{Im}(p)$ donc $f(x)$ est un vecteur invariant par p puisque $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = E_1(p)$. on en déduit que $2f(x) = 0_E$ donc que $f(x) = 0_E$. Ainsi, l'application induite par f sur $\text{Im}(p)$ est l'application nulle de $\text{Im}(p)$.

d. Soit $r = \text{rang}(p)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \amalg \mathcal{B}'' = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ avec $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_r)$ une base de $\text{Im}(p)$ et $\mathcal{B}'' = (v_{r+1}, \dots, v_n)$ une base de $\text{Ker}(p)$.

On sait que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, d'après ce qui précède, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ si $f \in \mathcal{F}$ avec

$\mathcal{K} = \text{Mat}_{\mathcal{B}''}(f|_{\text{Ker}(\mathfrak{p})})$ car $\text{Im}(\mathfrak{p})$ et $\text{Ker}(\mathfrak{p})$ sont stables par f et que f induit sur $\text{Im}(\mathfrak{p})$ l'application nulle. L'application $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(f) = \mathcal{K}$ est bien définie, elle est linéaire. Soit $f \in \mathcal{F}$ tel que $\varphi(f) = 0$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ donc $f = 0$ et φ est injective. Pour $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, si f est l'unique endomorphisme de \mathbb{E} tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{K} \end{pmatrix}$, on a $\mathcal{A}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = \mathcal{P}\mathcal{A}$ donc $\mathcal{A}\mathcal{P} = -\mathcal{P}\mathcal{A}$ et $f \circ \mathfrak{p} = -\mathfrak{p} \circ f$ d'où $f \in \mathcal{F}$. Par construction, on a $\varphi(f) = \mathcal{K}$ donc φ est surjective. Ainsi, φ est un isomorphisme qui conserve donc les dimensions, ce qui assure que $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})) = (n-r)^2 = (\dim(\text{Ker}(\mathfrak{p}))^2$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 3

SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

17 ↓

18 ↓

19 a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}^* par opérations et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \sim t$. Ainsi, f est continue sur \mathbb{R} donc en particulier sur \mathbb{R}_+ . De plus, en posant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$. Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t) dt$, c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$. Or cette dernière intégrale converge absolument par comparaison aux intégrales de RIEMANN, donc elle converge, car $g : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et que $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge aussi.

b. On vient de voir que la fonction f est continue sur \mathbb{R} ce qui montre, par le théorème fondamental de l'intégration, que F est bien définie sur \mathbb{R} en tant que primitive de f qui s'annule en 0. De plus, on sait que $\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^*, f(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ et cette formule marche aussi pour $t = 0$ car $1 = \frac{(-1)^0 t^{2 \cdot 0}}{(2 \cdot 0 + 1)!}$. Comme le rayon de convergence de $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ vaut $R = +\infty$, on peut intégrer terme à terme sur $[0; x]$ qui est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ pour avoir $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} \right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \exp(-xe^{-it})$ est continue sur le segment $J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale $I(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt$ existe. On sait que $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ donc, en prenant $z = -xe^{-it}$, on obtient $\forall t \in J, \exp(-xe^{-it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $h_n : t \mapsto \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$.

Comme $\forall t \in J, |h_n(t)| = \frac{|x|^n}{n!}$, on a $\|h_n\|_{\infty, J} = \frac{|x|^n}{n!}$ et la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} h_n$ converge normalement vers h sur le segment J . Comme toutes les h_n et h sont continues

sur J , le théorème d'intégration terme à terme sur segment montre que $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!} dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons l'intégrale $L_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!} dt$. On a le cas particulier $L_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $L_n = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \int_0^{\pi/2} e^{-int} dt = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi/2} = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \times \frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}$.

Comme on sait que $\operatorname{Re}(I(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(L_n)$ et que $\operatorname{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = 0$ si $n \geq 2$ est pair et que l'on a $\operatorname{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{-i(2k+1)\pi/2} - 1}{-i(2k+1)}\right) = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ si $n = 2k+1 \geq 1$ est impair, il ne reste dans la formule ci-dessus que $\operatorname{Re}(I(x)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$.

d. Par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|I(x)| = \left| \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})| dt$. Or $\exp(-xe^{-it}) = e^{-x \cos(t)} e^{ix \sin(t)}$ donc $|\exp(-xe^{-it})| = e^{-x \cos(t)}$.

Méthode 1 : la fonction \cos est concave sur J car $\cos'' = -\cos \leq 0$ sur J donc $\forall t \in J$, $\cos(t) \geq 1 - \frac{2t}{\pi}$. Ainsi, $e^{-x \cos(t)} \leq e^{-x e^{2xt/\pi}}$ donc $\forall x > 0$, $\int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})| dt \leq e^{-x} \int_0^{\pi/2} e^{2xt/\pi} dt$. On en déduit donc que $|I(x)| \leq e^{-x} \left[\frac{\pi}{2x} e^{2xt/\pi} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi e^{-x} (e^x - 1)}{2x} = \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x} = 0$, par encadrement, on obtient la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt = 0$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \exp(-xe^{-it})$ de sorte que $I(x) = \int_0^{\pi/2} g(x, t) dt$.

(H₁) pour tout $t \in J$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, t) = 0 = a(t)$ car $\cos(t) > 0$.

(H₂) pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $h_x : t \mapsto g(x, t)$ et a sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(H₃) pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $|g(x, t)| \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

D'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \int_0^{\pi/2} a(t) dt = 0$.

D'après les questions précédentes, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(I(x)) = \frac{\pi}{2} - F(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 0$, on a aussi

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(I(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - F(x)\right) = 0$. Ceci assure l'existence d'une limite finie de F en $+\infty$ et sa valeur

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$ qu'on note $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de DIRICHLET).

20 ↓

21 ↑

22 Posons $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+3)2^n}{(n+1)(n+2)2^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \ell = \frac{1}{2}$ donc,

d'après le cours et la règle de D'ALEMBERT, $R = \frac{1}{\ell} = 2$.

Posons, pour $x \in]-2; 2[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$ (série géométrique).

On peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire $] - 2; 2[$, pour avoir $\forall x \in] - 2; 2[$, $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{(2-x)^2}$ puis $g''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2^{n+2}} = \frac{4}{(2-x)^3}$.

En prenant $x = 1$ dans cette dernière relation, on a directement $g''(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+2}} = 4$ donc

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = 4 \times 2^2 = 16$.

23 a. Analyse : supposons que la fonction paire $f = \frac{1}{\cos}$ est développable en série entière au voisinage de 0,

il existe donc un réel $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall x \in]-r; r[$, $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ (par parité). Comme le rayon R de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifie $R \geq r > 0$ par l'existence de $f(x)$ pour $x \in]-r; r[$, et par produit de CAUCHY car le rayon de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ vaut $+\infty$, on a $\forall x \in]-r; r[$, $\cos(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = 1$ donc $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = 0$ par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ce qui donne $a_n = -\sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$.

Synthèse : il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$. Calculons les premiers termes de cette suite : on a $a_1 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{24} = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$ et $a_3 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{24} + \frac{a_0}{720} = \frac{5}{48} - \frac{1}{48} + \frac{1}{720} = \frac{61}{720}$. Il semble que l'on ait $|a_n| \leq 1$.

• Initialisation : on vient de montrer que $\forall n \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, on a $|a_n| \leq 1$.

• Hérité : soit $n \geq 4$, supposons que $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $|a_k| \leq 1$. Alors, $|a_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \right|$ donc $|a_n| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|a_{n-k}|}{(2k)!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)!} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} = \text{ch}(1) - 1 \sim 0,54 \leq 1$.

Par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 1$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$, qui est donc supérieur, d'après le cours, à celui de $\sum_{n \geq 0} x^{2n}$ qui vaut 1. Ainsi,

$R \geq 1$ et on peut définir $g :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in]-1; 1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$. Par produit de CAUCHY, comme avant, $\forall x \in]-1; 1[$, $g(x) \cos(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \right) x^{2n} = 1$ donc $g(x) = \frac{1}{\cos(x)} = f(x)$ et $f = \frac{1}{\cos}$ est donc développable en série entière, au moins sur $] -1; 1[$.

b. Si on avait $R > \frac{\pi}{2}$, avec le même calcul que précédemment, on aurait $\forall x \in]-R; R[$, $f(x) \times \cos(x) = 1$. Mais comme $x = \frac{\pi}{2} \in]-R; R[$, on aurait $f(x) \cos(x) = 0 = 1$. NON. Ou alors on pourrait dire que f est continue sur $] -R; R[$, notamment en $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui contredit l'expression $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Toujours est-il que $R \leq \frac{\pi}{2}$. En fait, $R = \frac{\pi}{2}$ mais c'est une autre histoire.

24 ↑

25 ↑

26 ↓

27 ↓

28 a. • Pour $x = 0$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n(0)$ converge et $S(0) = 0$.

• Si $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

Par conséquent, la fonction somme S est bien définie sur \mathbb{R} . De plus, comme toutes les fonctions u_n sont impaires, on en déduit (par convergence simple) que S est aussi impaire.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est dérivable sur \mathbb{R} et, après calculs, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'_n(x) = \frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2}$ donc u_n est décroissante sur $] -\infty; n]$ et $[n; +\infty[$ et croissante sur $[-n; n]$. Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_n(x) = 0$, le tableau de variations de u_n montre que $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = |u_n(-n)| = u_n(n) = \frac{1}{2n}$. Ainsi, la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$ diverge et il n'y a pas convergence normale de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur \mathbb{R} .

c. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H₁) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur \mathbb{R} pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(H₂) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} d'après a..

(H₃) Soit $a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a; a]$, $|u'_n(x)| = \frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2} \leq \frac{n^2 + x^2}{(x^2 + n^2)^2} = \frac{1}{(x^2 + n^2)} \leq \frac{1}{n^2}$ par inégalité triangulaire donc $\|u'_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \|u'_n\|_{\infty, [-a; a]}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN donc $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R} .

Par le théorème évoqué ci-dessus, S est de classe C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2}$.

d. Comme $S(0) = 0$ et $S'(0) = \frac{\pi^2}{6}$ d'après la question précédente, puisque S est de classe C^1 sur \mathbb{R} , on a $S(x) = S(0) + xS'(0) + o(x)$ par le théorème de TAYLOR-YOUNG. On a donc $S(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi^2 x}{6}$.

Pour être plus précis, pour $x \in \mathbb{R}$, $\left| S(x) - \frac{\pi^2 x}{6} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2 + n^2} - \frac{x}{n^2} \right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^3}{n^2(x^2 + n^2)} \right|$ donc on a $|S(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^3}{n^2(x^2 + n^2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^3}{n^4} = \zeta(4)|x|^3 = \frac{\pi^4}{90}|x|^3$ ce qui prouve que $S(x) = \frac{\pi^2 x}{6} + O(x^3)$ ce qui montre que $S(x) = \frac{\pi^2 x}{6} + o(x)$ et, à nouveau, $S(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi^2 x}{6}$.

e. On effectue une comparaison série/intégrale, en posant, pour $x > 0$ fixé, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2}$. φ_x est continue et décroissante sur \mathbb{R}_+ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(k) = u_k(x) \leq \int_{k-1}^k \varphi_x(t) dt$. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ (tout converge) et $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$ donc $\left[\text{Arctan} \left(\frac{t}{x} \right) \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2} = \left[\text{Arctan} \left(\frac{t}{x} \right) \right]_0^{+\infty}$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \frac{\pi}{2}$.

f. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si on avait convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur \mathbb{R} , d'après le théorème de la double limite, on aurait $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \frac{\pi}{2}$ d'après la question précédente, on n'a pas convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u_n$ vers f sur \mathbb{R} (ni sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$ pour la même raison).

29 Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, $u_n r^n = O(r^n)$ et $\sum_{n \geq 0} r^n$ converge (série géométrique) car $|r| < 1$ donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} u_n r^n$ converge absolument donc converge. Ainsi, l'application x est bien définie.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \neq v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, notons $p = \text{Min} \left(\left\{ n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq v_n \right\} \right)$, cet entier existe car la partie $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq v_n \right\}$ de \mathbb{N} est non vide puisque $u \neq v$ donc, par propriété fondamentale des entiers, A admet un minimum.

Prenons par exemple $u_p = -1$ et $v_p = 1$ (l'autre cas est analogue et on le traite par symétrie), alors $x(v) - x(u) = r^p - (-r^p) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} (v_n - u_n)r^n$. Posons $y = \sum_{n=p+1}^{+\infty} (v_n - u_n)r^n$ de sorte que $x(v) - x(u) = 2r^p + y$.

Par convergence absolue des séries, $\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} (v_n - u_n)r^n \right| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} |v_n - u_n|r^n \leq 2 \sum_{n=p+1}^{+\infty} r^n = \frac{2r^{p+1}}{1-r}$ par inégalité triangulaire d'où $x(v) - x(u) - 2r^p \geq -\frac{2r^{p+1}}{1-r}$ qui devient $x(v) - x(u) \geq 2r^p - \frac{2r^{p+1}}{1-r} = \frac{2r^p(1-2r)}{1-r} > 0$.

Par conséquent, $x(u) \neq x(v)$ dès que $u \neq v$, ce qui est la définition de l'injectivité de x .

On peut constater que x n'est pas forcément injective dès que $r \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right[$, par exemple pour $r = \frac{1}{2}$, car puisque $1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(1/2)}{1-(1/2)}$, on a $x(1, -1, \dots, -1, \dots) = x(-1, 1, \dots, 1, \dots)$.

30 ↑

31 ↑

32 ↑

33 ↑

34 a. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et l'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$. Ainsi, d'après le cours, il existe deux constantes A et B telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = A + B \cdot 2^n$. Comme $a_0 = A + B = 1$ et $a_1 = 3 = A + 2B$, on trouve sans peine $A = -1$ et $B = 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n+1} - 1$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = a_n = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1} \leq 2^{2n} = 4^n$ car $n+1 \leq 2n$. Comme on a aussi $a_0 = 1 \leq 4^0 = 1$, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 4^n$.

c. D'après le cours, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum_{n \geq 0} 4^n x^n$ qui vaut $\frac{1}{4}$ car $(4^n x^n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq \frac{1}{4}$. Par conséquent $R \geq \frac{1}{4}$. Comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} 2^{n+1}$ et que le rayon de $\sum_{n \geq 0} 2^{n+1} x^n$ vaut $\frac{1}{2}$ pour les mêmes raisons, on peut conclure tout de suite que $R = \frac{1}{2}$.

d. Pour $x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2})x^n = 0$ par hypothèse donc, comme les trois séries convergent, $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 0$. Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour des x convenables, ce qui donne $(S(x) - a_1 x - a_0) - 3(xS(x) - a_0 x) + 2x^2 S(x) = 0$ ou encore $S(x) - 3x - 1 - 3xS(x) + 3x + 2x^2 S(x) = 0$ et on a la relation $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$ comme attendu.

e. Méthode 1 : comme $P = 2X^2 - 3X + 1 = (2X-1)(X-1)$, la fraction rationnelle $F = \frac{1}{P}$ se décompose en éléments simples sous la forme $F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{2X-1} = \frac{a(2X-1) + b(X-1)}{(2X-1)(X-1)}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie donc le système linéaire $(2a+b=0 = a+b+1) \iff (a=1, b=-2)$. Ainsi, $\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $S(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$ donc $S(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et on a bien $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2^{n+1} - 1)x^n$. Par unicité des coefficients du développement en série entière d'une fonction, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n+1} - 1$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} 2^{n+1}$ et on

conclut, comme on l'a déjà fait, que $R = \frac{1}{2}$.

Méthode 2 : comme $P = 2X^2 - 3X + 1 = (2X - 1)(X - 1)$, on a $\forall x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, $S(x) = \frac{1}{1 - 2x} \times \frac{1}{1 - x}$ donc, par produit de CAUCHY, $S(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) x^n$. Par unicité des coefficients du développement en série entière d'une fonction, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$ et on conclut à nouveau que $R = \frac{1}{2}$.

35 a. Comme l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ est stable par la fonction \sin car $\sin \left(]0; \frac{\pi}{2}[\right) =]0; \frac{\pi}{2}[$ et que $u_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$. Par stricte concavité de la fonction \sin sur

$u_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin(x) < x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \sin(u_n) = u_{n+1} < u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \in [0; u_0]$. Or \sin est aussi continue donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $\sin(u_n) = u_{n+1}$, on a $\sin(\ell) = \ell$ donc $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, par dualité suite-série, la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge. De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \underset{+}{\sim} -\frac{1}{6}u_n^3 < 0$. Par conséquent, par comparaison de séries de termes de signe constant, $\sum_{n \geq 0} u_n^3$ converge.

c. Comme la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge car elle tend vers $-\infty$ d'après a., par dualité suite-série à nouveau, la série $\sum_{n \geq 0} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge. Or, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \underset{+}{=} \ln \left(\frac{u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\left(\frac{u_n^3}{6}\right)}{u_n} \right)$ ce qui donne $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{+}{=} \ln \left(1 - \frac{u_n^2}{6} \right) \underset{+}{\sim} -\frac{1}{6}u_n^2 < 0$. Par comparaison encore, la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ diverge.

d. En élevant au carré, $\sin(u_n) \underset{+}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$, on a $\sin(u_n)^2 \underset{+}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) \right)^2$ qui se réduit en $\sin(u_n)^2 \underset{+}{=} u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^2 \underset{+}{=} u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2) \right) \underset{+}{=} u_n^2 - \frac{u_n^4}{6} + o(u_n^4)$. Par conséquent, $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\sin(u_n)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2} \left(\frac{u_n^2}{\sin(u_n)^2} - 1 \right) \underset{+}{=} \frac{1}{u_n^2} \left(\frac{u_n^2}{u_n^2 - \frac{u_n^4}{6} + o(u_n^4)} - 1 \right)$ donc, en simplifiant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \frac{1}{3}$ car $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{+}{=} \frac{1}{u_n^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)} - 1 \right) \underset{+}{=} \frac{1}{u_n^2} \left(1 + \frac{u_n^2}{3} - 1 + o(u_n^2) \right) \underset{+}{\sim} \frac{1}{3}$ avec

le développement limité $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$. Par le théorème de CESARO, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{3}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3}$ après télescopage d'où $u_n^2 \underset{+}{\sim} \frac{3}{n}$ et $u_n = \sqrt{u_n^2} \underset{+}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Bien sûr, ceci rend plus facile les questions précédentes car on a alors $u_n^3 \underset{+}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $u_n^2 \underset{+}{\sim} \frac{3}{n}$.

36 ↑

37 ↑

38 ↑

39 ↑

40 ↑

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 4

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

41 ↓

42 ↓

43 ↓

44 On va d'abord montrer que pour $A \subset \mathbb{R}$, (A dense dans \mathbb{R}) $\iff (\forall [\alpha; \beta], \alpha < \beta \implies (\exists a \in A, a \in [\alpha; \beta]))$.

(\implies) Si A est dense, $\bar{A} = \mathbb{R}$ donc tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A . Soit $[\alpha; \beta]$ avec $\alpha < \beta$, en posant par exemple $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$. En prenant $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - x_0| \leq \varepsilon \iff a_n \in [\alpha; \beta]$. Ainsi, $a_{n_0} \in A \cap [\alpha; \beta]$.

(\impliedby) Supposons que $A \cap [\alpha; \beta] \neq \emptyset$ dès que $\alpha < \beta$. Soit un réel x_0 et $n \in \mathbb{N}$, prenons $\alpha_n = x_0 - \frac{1}{2^n}$ et $\beta_n = x_0 + \frac{1}{2^n} > \alpha_n$, alors il existe $a_n \in [\alpha_n; \beta_n] \cap A$ et l'encadrement $-\frac{1}{2^n} \leq x_0 - a_n \leq \frac{1}{2^n}$ montre que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x_0 . Ainsi, $\bar{A} = \mathbb{R}$ et A est dense dans \mathbb{R} .

On a montré par double inclusion que (A dense dans \mathbb{R}) $\iff (\forall [\alpha; \beta], \alpha < \beta \implies (\exists a \in A, a \in [\alpha; \beta]))$.

Montrons que $A = \{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} . Soit un segment $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R}$ non réduit à un point. On cherche un élément de A dans $[\alpha; \beta]$. Traitons plusieurs cas :

$\alpha \leq 0 \leq \beta$ Prenons $n = m = 0$, alors $0 = f(0) - f(0) \in A \in [\alpha; \beta]$.

$0 < \alpha < \beta$ Posons $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq M, |f'(x)| \leq \varepsilon$.

Posons $n = \lfloor M \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ et $m = \text{Min}(\{k \geq n \mid f(k) \geq f(n) + \alpha\})$. Cet entier m existe bien par propriété fondamentale de \mathbb{N} car la partie $X = \{k \geq n \mid f(k) \geq f(n) + \alpha\} \subset \mathbb{N}$ est non vide puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrons que $f(m) - f(n) \in [\alpha; \beta]$:

- Comme $m \in X$, on a $f(m) \geq f(n) + \alpha$ donc $f(m) - f(n) \geq \alpha$.
- On ne peut pas avoir $m = n$ car on aurait $f(m) - f(n) = 0$ contredisant $f(m) - f(n) \geq \alpha > 0$. Ainsi, $m > n$ donc $m - 1 \geq n$ et, par minimalité de m , $m - 1 \notin X$ donc $f(m - 1) < f(n) + \alpha$. D'après le théorème des accroissements finis, comme f est dérivable sur $[m - 1; m]$, il existe un réel $c \in]m - 1; m[$ tel que $f(m) - f(m - 1) = f'(c)(m - (m - 1)) = f'(c)$. Or $c > m - 1 \geq n$ donc $|f'(c)| \leq \varepsilon$ et $f(m) = f(m - 1) + f'(c) < f(n) + \alpha + \varepsilon = f(n) + \beta$ d'où $f(m) - f(n) \leq \beta$.

Le réel $f(m) - f(n)$ appartient donc à $[\alpha; \beta]$ et aussi à A par construction car $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

$\alpha < \beta < 0$ D'après le cas précédent, comme $0 < -\beta < \alpha$, $A \cap [-\beta; -\alpha] \neq \emptyset$ donc il existe $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(m) - f(n) \in [-\beta; -\alpha]$ et $f(n) - f(m) = -(f(m) - f(n)) \in A \cap [\alpha; \beta]$.

Ainsi, $A = \{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} car $A \cap [\alpha; \beta]$ est non vide dès que $\alpha < \beta$.

45 ↓

46 ↓

47 a. Dans le calcul de $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 3 \\ 5 & X-2 & -1 \\ -5 & 1 & X+6 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de GAUSS $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ pour

$$\text{avoir } \chi_A = \begin{vmatrix} X+2 & -1 & 3 \\ X+2 & X-2 & -1 \\ X+2 & 1 & X+6 \end{vmatrix} = (X+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & 1 & X+6 \end{vmatrix} \text{ par linéarité du déterminant par rapport}$$

à la première colonne. On effectue ensuite $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et on trouve l'expression

$$\chi_A = (X+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & X-1 & -4 \\ 0 & 2 & X+3 \end{vmatrix} = (X+2) \begin{vmatrix} X-1 & -4 \\ 2 & X+3 \end{vmatrix} = (X+2)((X-1)(X+3) + 8) = (X+2)(X^2 + 2X + 5)$$

après avoir développé par rapport à la première colonne.

b. Comme $\chi_A = (X+2)((X+1)^2 + 4) = (X+2)(X+1+2i)(X+1-2i)$, on a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-2, -1-2i, -1+2i\}$ et A est diagonalisable car χ_A est scindé à racines simples sur \mathbb{C} . Il existe donc une matrice inversible $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$

telle $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$. Il est alors classique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et,

comme $|-1 \pm 2i| = \sqrt{5} > 2 = |-2|$, on a $\|D^n\|_{\infty} = (\sqrt{5})^n$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, posons le réel positif $\|M\|_0 = \|P^{-1}MP\|_{\infty}$. Comme $\|\cdot\|_{\infty}$ est une norme d'après le cours :

Séparation : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|M\|_0 = 0$, alors $\|P^{-1}MP\|_{\infty} = 0$ donc $P^{-1}MP = 0$ d'où $M = 0$.

Homogénéité : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda M\|_0 = \|P^{-1}(\lambda M)P\|_{\infty} = |\lambda| \|P^{-1}MP\|_{\infty} = |\lambda| \|M\|_0$.

Inégalité triangulaire : soit $(M, M') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|M+M'\|_0 = \|P^{-1}(M+M')P\|_{\infty} = \|P^{-1}MP + P^{-1}M'P\|_{\infty}$ donc $\|M+M'\|_0 \leq \|P^{-1}MP\|_{\infty} + \|P^{-1}M'P\|_{\infty} = \|M\|_0 + \|M'\|_0$.

Ainsi, l'application $M \mapsto \|M\|_0$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque toutes les normes sont équivalentes sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\alpha \|M\|_0 \leq \|M\| \leq \beta \|M\|_0$.

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \|A^n\|_0 \leq \|A^n\| \leq \beta \|A^n\|_0$ et, d'après le cours, en notant R (resp. R_0) le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \|A^n\| z^n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} \|A^n\|_0 z^n$), on a $R_0 \geq R \geq R_0$ car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Comme le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \|A^n\|_0 z^n = \sum_{n \geq 0} \|D^n\|_{\infty} z^n = \sum_{n \geq 0} (\sqrt{5}z)^n$ vaut clairement $R_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ car $((\sqrt{5}|z|)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

48 a. Comme $x \in \text{Im}(u - \text{id}_E)$, il existe $y \in E$ tel que $x = (u - \text{id}_E)(y) = u(y) - y$ ce qui s'écrit $u(y) = x + y$.

b. Comme $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$, on a $u(x) = x$. Ainsi, par une récurrence facile, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = x$. Soit $n \in \mathbb{N}$, en composant l'égalité $u(y) = x + y$ par u^k pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $u^{k+1}(y) = u^k(x) + u^k(y)$ donc $u^{k+1}(y) - u^k(y) = u^k(x) = x$. Ainsi, par télescopage, on a $\sum_{k=0}^{n-1} (u^{k+1}(y) - u^k(y)) = u^n(y) - y = nx$ donc $u^n(y) = nx + y$ (et même pour $n = 0$ car $u^0(y) = \text{id}_E(y) = y = 0 \cdot x + y$).

c. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x = \frac{u^n(y) - y}{n}$. Or $\|u(y)\| \leq \|y\|$ et, là encore par une récurrence simple, on montre que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \|u^m(y)\| \leq \|y\|, \text{ ce qui montre que } 0 \leq \|x\| \leq \frac{\|u^n(y)\| + \|y\|}{n} \leq \frac{2\|y\|}{n} \text{ par inégalité triangulaire}$$

donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\|y\|}{n} = 0$, en passant à la limite, $\|x\| = 0$ donc $x = 0_E$.

d. On vient de voir avec **c.** que $\text{Im}(u - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ sont en somme directe mais, avec la formule du rang, $\dim(\text{Im}(u - \text{id}_E)) + \dim(\text{Ker}(u - \text{id}_E)) = \dim(E)$. Ainsi, on a $\text{Im}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \text{id}_E) = E$ et les sous-espaces $\text{Im}(u - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 5

RÉDUCTION

49 ↓

50 ↓

51 ↓

52 ↓

53 ↓

54 a. Comme χ_A est unitaire par construction et scindé sur \mathbb{C} par D'ALEMBERT-GAUSS, si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les

valeurs propres distinctes de A , on peut écrire $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_{\alpha_i}(A)}$ d'où $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^r (B - \alpha_i I_n)^{m_{\alpha_i}(A)}$.

Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe multiplicatif, on a $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, B - \alpha_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$.

On peut aussi le justifier par le déterminant (qui est une fonction multiplicative), en écrivant que l'on a

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \det(\chi_A(B)) \neq 0 \iff \prod_{i=1}^r (\det(B - \alpha_i I_n))^{m_{\alpha_i}(A)} \neq 0 \iff \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \det(B - \alpha_i I_n) \neq 0.$$

Or $B - \alpha_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ car $\det(B - \alpha_i I_n) = (-1)^n \chi_B(\alpha_i) \neq 0$ puisque α_i étant une valeur propre de A , elle ne peut pas être une valeur propre de B car on a supposé $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$. On a donc bien $\chi_A(B)$ inversible.

b. Par hypothèse, $AX = XB$. Alors $A^2X = A(AX) = A(XB) = (AX)B = XB^2$. Par une récurrence facile, on

montre que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k X = X B^k$. Si $P = \sum_{k=0}^d \alpha_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = \sum_{k=0}^d \alpha_k A^k X = \sum_{k=0}^d \alpha_k X B^k = X P(B)$.

En prenant $P = \chi_A$, on obtient donc $\chi_A(A)X = X \chi_A(B)$ ce qui donne, avec CAYLEY-HAMILTON, $X \chi_A(B) = 0$.

Or on a vu en b. que $\chi_A(B)$ est inversible. Il ne reste donc plus que $X = 0$.

c. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(X) = AX - XB$. Comme φ est visiblement linéaire, φ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, donc φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective. Soit $X \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $AX = XB$ et, avec la question précédente, $X = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ce qui montre que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La bijectivité de φ permet de conclure que, comme attendu, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = \varphi(X) = M$.

55 ↓

56 a. $P(2) = 2^5 - 4 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = 32 - 64 + 16 + 32 - 16 = 0$ et, comme $P' = 5X^4 - 16X^3 + 6X^2 + 16X - 8$, on

a aussi $P'(2) = 5 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 8 = 80 - 128 + 24 + 32 - 8 = 0$. Ainsi, 2 est racine au moins double de

P et 0 est clairement racine de P ce qui montre que $P = X(X-2)^2Q$ avec $\deg(Q) = 2$ d'où $Q = aX^2 + bX + c$.

En identifiant le terme en X^5 , on a $a = 1$, celui en X donne $c = -2$ et celui en X^2 permet d'avoir $b = 0$. Par

conséquent, $P = X(X-2)^2(X^2 - 2) = X(X-2)^2(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

b. Analyse : si $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$, comme P est annulateur de M , on sait

d'après le cours que $\text{Sp}(M) \subset \{0, 2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Puisque $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$, χ_M est scindé sur \mathbb{R} donc, d'après le cours, $\text{Tr}(M) = m_0(M) \cdot 0 + m_2(M) \cdot 2 + m_{\sqrt{2}}(M) \cdot \sqrt{2} + m_{-\sqrt{2}}(M) \cdot (-\sqrt{2}) = 2a + (b - c)\sqrt{2}$ en notant $a = m_2(M) \in \mathbb{N}$, $b = m_{\sqrt{2}}(M) \in \mathbb{N}$ et $c = m_{-\sqrt{2}}(M) \in \mathbb{N}$. Comme $\text{Tr}(M) = 0$, on a $2a + (b - c)\sqrt{2} = 0$. Si on avait $a \neq 0$, on aurait $\sqrt{2} = \frac{c-b}{a} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car on sait que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Ainsi, $a = 0$ donc $\text{Tr}(M) = (b - c)\sqrt{2}$ et $b = c$. Comme $m_2(M) = 0$, 2 n'est pas valeur propre de M donc $M - 2I_n$ est inversible et la relation $M(M^2 - 2I_n)(M - 2I_n)^2 = 0$ se résume à $M(M^2 - 2I_n) = 0$ en multipliant par $(M - 2I_n)^{-2}$ (tout commute). Le polynôme $R = X(X^2 - 2) = X^3 - 2X = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ est scindé à racines simples et annulateur de M qui est donc une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $m_0(M) + m_{\sqrt{2}}(M) + m_{-\sqrt{2}}(M) = n$, on a $m_0(M) = n - 2b$ et, en notant $D = \begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{b,n-2b} & \sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -\sqrt{2}I_b \end{pmatrix}$ (par blocs), il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ (P est la matrice de passage entre la base canonique de \mathbb{R}^n et une base de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de M (dans le bon ordre)).

Synthèse : si $n \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}$ tel que $2b \leq n$ et $M = P \begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{n-2b,b} & \sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -\sqrt{2}I_b \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$,

on a $M^3 = P \begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{n-2b,b} & \sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -\sqrt{2}I_b \end{pmatrix}^3 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{n-2b,b} & 2\sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -2\sqrt{2}I_b \end{pmatrix} P^{-1} = 2M$ donc

$R(M) = 0$ d'où $P(M) = (M - 2I_n)^2 R(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) = (\sqrt{2} - \sqrt{2})b = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$ sont donc toutes les matrices de la forme précédente, ça en fait beaucoup !

57 ↓

58 a. La construction par blocs montre qu'on multiplie par 2 la taille de la matrice à chaque étape, et comme la taille vaut 1 quand n vaut 0, par une récurrence simple, la taille de A_n vaut 2^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. La matrice $A_0 = (1)$ est de rang 1, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible donc de rang 2. Pour tout $n \geq 1$, si on effectue l'opération de GAUSS $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ (par blocs) pour le calcul du déterminant de A_{n+1} , on a $\det(A_{n+1}) = \begin{vmatrix} A_n & 0 \\ A_n & -A_n \end{vmatrix}$ donc $\det(A_{n+1}) = \det(A_n)\det(-A_n) = (-1)^{2^n} \det(A_n)^2 = \det(A_n)^2$. Par récurrence, on a donc $\det(A_0) = 1$, $\det(A_1) = -1$ et $\forall n \geq 2$, $\det(A_n) = 1 \neq 0$ donc A_n est inversible ce qui montre que son rang vaut 2^n .

c. Par une récurrence simple, on établit que toutes les matrices A_n sont réelles et symétriques donc, par le théorème spectral, A_n est diagonalisable. $\text{Sp}(A_0) = \{1\}$ et, comme $\chi_{A_1} = X^2 - X - 1$, $\text{Sp}(A_1) = \{\alpha, \beta\}$ avec $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ qui vérifient $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = -1$ (relations coefficients/racines).

Après calculs, on trouve $\chi_{A_2} = X^4 - X^3 - 4X^2 - X + 1 = (X + 1)^2 \left(X - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\text{Sp}(A_2) = \{-1, \alpha^2, \beta^2\}$. Comme $\alpha\beta = -1$, on a donc $\text{Sp}(A_2) = \{\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2\}$. La récurrence arrive :

Initialisation : on vient de voir que $\text{Sp}(A^n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i + j = n\}$ pour $n = 0, 1, 2$.

Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que $\text{Sp}(A^n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i + j = n\}$.

(C) Soit λ une valeur propre de A_{n+1} . On sait que $\lambda \neq 0$ d'après **b.** car A_n inversible. Il existe un vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ non nul (écrit pas blocs $2^n + 2^n$) tel que $A_{n+1}V = \lambda V$, ce qui équivaut à $A_n X + A_n Y = \lambda X$ (1) et $A_n X = \lambda Y$ (2). En reportant (2) multiplié à gauche par A_n dans (1) multiplié par λ , on obtient $\lambda A_n X + A_n^2 X - \lambda^2 X = 0 = \left(A_n - \frac{\lambda}{\alpha} I_{2^n}\right) \left(A_n - \frac{\lambda}{\beta} I_{2^n}\right) X$ (car $\alpha\beta = -1$ et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{-1} = -1$). Si on avait $X = 0$, on aurait aussi $Y = 0$ d'après (1) car $\lambda \neq 0$ et on aurait alors $V = 0$: NON ! Ainsi, $X \neq 0$ donc $\left(A_n - \frac{\lambda}{\alpha} I_{2^n}\right) \left(A_n - \frac{\lambda}{\beta} I_{2^n}\right)$ n'est pas inversible ce qui prouve que $A_n - \frac{\lambda}{\alpha} I_{2^n} \notin GL_{2^n}(\mathbb{R})$ ou $A_n - \frac{\lambda}{\beta} I_{2^n} \notin GL_{2^n}(\mathbb{R})$ (car $GL_{2^n}(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif). Par hypothèse de récurrence, on a donc $\frac{\lambda}{\alpha} \in Sp(A_n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i + j = n\}$ ou $\frac{\lambda}{\beta} \in Sp(A_n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i + j = n\}$. Dans les deux cas, que $\lambda = \alpha^{i+1} \beta^j$ ou $\lambda = \alpha^i \beta^{j+1}$ avec $i + j = n$, on a $(i+1) + j = n+1$ ou $i + (j+1) = n+1$ et on a bien $\lambda \in \{\alpha^{i'} \beta^{j'} \mid i' + j' = n+1\}$.

(D) Réciproquement, soit $\lambda \in \{\alpha^{i'} \beta^{j'} \mid i' + j' = n+1\}$. Considérons deux cas :

- Si $i' = 0, j' = n+1$ et $\lambda = \beta^{n+1}$. Comme $\beta^n \in Sp(A_n)$ par hypothèse de récurrence, soit un vecteur propre $X \in E_{\beta^n}(A_n)$ (donc $X \neq 0$), en posant $V = \begin{pmatrix} X \\ \frac{A_n X}{\beta^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \frac{X}{\beta} \end{pmatrix} \neq 0$, alors $A_{n+1}V = \begin{pmatrix} A_n X + \frac{A_n X}{\beta} \\ A_n X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta^n + \beta^{n-1})X \\ \beta^n X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{n+1}X \\ \beta^n X \end{pmatrix} = \beta^{n+1}V$ car $\beta^2 = \beta + 1$ donc $\lambda = \beta^{n+1} \in Sp(A_{n+1})$ car V est un vecteur non nul tel que $A_{n+1} = \beta^{n+1}V$.

- Si $i' \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, on a $\lambda = \alpha^{i'} \beta^{j'}$. Comme $\alpha^{i'-1} \beta^{j'} \in Sp(A_n)$ par hypothèse de récurrence, soit un vecteur propre $X \in E_{\alpha^{i'-1} \beta^{j'}}(A_n)$ (donc $X \neq 0$), en posant $V = \begin{pmatrix} X \\ \frac{A_n X}{\alpha^{i'} \beta^{j'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \frac{X}{\alpha} \end{pmatrix} \neq 0$, alors $A_{n+1}V = \begin{pmatrix} A_n X + \frac{A_n X}{\alpha} \\ A_n X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha^{i'-1} \beta^{j'} + \alpha^{i'-2} \beta^{j'})X \\ \alpha^{i'-1} \beta^{j'} X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{i'} \beta^{j'} X \\ \alpha^{i'-1} \beta^{j'} X \end{pmatrix} = \alpha^{i'} \beta^{j'} V$ car $\alpha^2 = \alpha + 1$ donc $\lambda = \alpha^{i'} \beta^{j'} \in Sp(A_{n+1})$ car V est un vecteur non nul tel que $A_{n+1} = \alpha^{i'} \beta^{j'} V$.

Dans les deux cas, $\lambda \in Sp(A_{n+1})$ et, par double inclusion, on a bien $Sp(A_{n+1}) = \{\alpha^{i'} \beta^{j'} \mid i' + j' = n+1\}$.

Par principe de récurrence, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}, Sp(A_n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i + j = n\}$.

59 a. Posons $F = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ et vérifions que $E = F$.

(C) : soit $f \in E$, alors $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = f(\operatorname{Re}(z).1 + \operatorname{Im}(z).i) = \operatorname{Re}(z)f(1) + \operatorname{Im}(z)f(i)$ car f est \mathbb{R} -linéaire et que $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \in \mathbb{R}^2$ et $(1, i) \in \mathbb{C}^2$. Avec les formules d'EULER, $f(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}f(1) + \frac{z - \bar{z}}{2i}f(i) = az + b\bar{z}$ avec $a = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(i)}{2i} \in \mathbb{C}$ et $b = \frac{f(1)}{2} - \frac{f(i)}{2i} \in \mathbb{C}$. Par conséquent, $f = f_{a,b}$ et $E \subset F$.

(D) : soit $f \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$. Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda z + \mu z') = a(\lambda z + \mu z') + b\overline{(\lambda z + \mu z')} = \lambda az + \mu az' + \lambda b\bar{z} + \mu b\bar{z}' = \lambda(az + b\bar{z}) + \mu(az' + b\bar{z}') = \lambda f(z) + \mu f(z')$ donc f est \mathbb{R} -linéaire et $f \in E$. Ainsi, $F \subset E$.

Par double inclusion, on a bien établi que $E = F = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$.

b. Soit $\mathcal{B} = (1, i)$ la base canonique du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , comme $f(1) = a + b$ et $f(i) = ai - bi$ donc $f(1) = (\operatorname{Re}(a) + \operatorname{Re}(b)).1 + (\operatorname{Im}(a) + \operatorname{Im}(b)).i$ et $f(i) = (-\operatorname{Im}(a) + \operatorname{Im}(b)).1 + (\operatorname{Re}(a) - \operatorname{Re}(b)).i$,
 $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{a,b}) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a) + \operatorname{Re}(b) & -\operatorname{Im}(a) + \operatorname{Im}(b) \\ \operatorname{Im}(a) + \operatorname{Im}(b) & \operatorname{Re}(a) - \operatorname{Re}(b) \end{pmatrix}$ d'où $\operatorname{Tr}(f_{a,b}) = 2\operatorname{Re}(a)$ et $\det(f_{a,b}) = |a|^2 - |b|^2$.

c. D'après la question précédente, $\chi_{f_{a,b}} = X^2 - \operatorname{Tr}(f_{a,b})X + \det(f_{a,b}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(a)X + |a|^2 - |b|^2$. Soit Δ le discriminant de $\chi_{f_{a,b}}$, comme $\Delta = 4\operatorname{Re}(a)^2 - 4(|a|^2 - |b|^2) = 4(|b|^2 - \operatorname{Im}(a)^2)$, on traite trois cas :

Si $|b| > |\operatorname{Im}(a)|$, $\Delta > 0$ donc $\chi_{f_{a,b}}$ admet deux racines simples réelles ce qui prouve que $f_{a,b}$ est diagonalisable sur \mathbb{C} considéré comme un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Si $|b| < |\operatorname{Im}(a)|$, $\Delta < 0$ donc $\chi_{f_{a,b}}$ admet deux racines simples complexes non réelles (et conjuguées) ce qui prouve que $f_{a,b}$ n'est diagonalisable sur \mathbb{C} considéré comme un \mathbb{R} -espace vectoriel car $\chi_{f_{a,b}}$ n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $|b| = |\operatorname{Im}(a)|$, $\Delta = 0$ et $\chi_{f_{a,b}} = (X - \operatorname{Re}(a))^2$ donc $\operatorname{Sp}(f_{a,b}) = \{\operatorname{Re}(a)\}$. Or, d'après le cours, $f_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $f_{a,b} - \operatorname{Re}(a)\operatorname{id}_{\mathbb{C}^2} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{a,b}) - \operatorname{Re}(a)I_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(b) & -\operatorname{Im}(a) + \operatorname{Im}(b) \\ \operatorname{Im}(a) + \operatorname{Im}(b) & -\operatorname{Re}(b) \end{pmatrix} = 0$. Cette condition impose $\operatorname{Re}(b) = \operatorname{Im}(a) = \operatorname{Im}(b)$, c'est-à-dire $b = 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $f_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $(|b| \neq |\operatorname{Im}(a)|$ ou $(b = 0$ et $a \in \mathbb{R}))$. Dans ce dernier cas, $f_{a,0}$ est l'homothétie de rapport a .

60 ↓

61 **a.** Méthode 1 : soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$ est la matrice A . Par définition, $f(1) = X$, $\forall k \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$, $f(X^k) = \frac{k}{N}X^{k-1} + \frac{N-k}{N}X^{k+1}$ et $f(X^N) = X^{N-1}$.

Pour $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{R}_N[X]$, par linéarité de f , on a $f(P) = a_0 f(1) + \left(\sum_{k=0}^N a_k f(X^k) \right) + a_N f(X^N)$ donc
 $f(P) = a_0 X + a_N X^{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left(\frac{k}{N} X^{k-1} + \frac{N-k}{N} X^{k+1} \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^N a_k X^{k+1} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} k a_k N X^{k+1}$
ce qui donne $f(P) = \frac{P'}{N} + XP - \frac{X^2 P}{N} = XP + \frac{1-X^2}{N} P'$.

Méthode 2 : $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se reconnaît aisément, c'est la matrice de l'endomorphisme

$f_1 : P \mapsto \frac{P'}{N}$ de l'espace $E = \mathbb{R}_N[X]$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^N)$ car $\forall k \geq 1$, $f_1(X^k) = \frac{k}{N}X^{k-1}$.

La matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}$ est obtenue à partir de A_1 en échangeant l'ordre des lignes et

des colonnes. Ceci signifie que $A_2 = PA_1P$ où P est la matrice qui contient des 1 sur la "seconde" diagonale et des 0 partout ailleurs : $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N+1}$ avec $p_{i,j} = 1$ si $i + j = N + 2$ et $p_{i,j} = 0$ sinon. Or P

est la matrice de l'endomorphisme g de E qui envoie X^k sur X^{N-k} et on constate que l'on a l'expression $g : P \mapsto X^N P\left(\frac{1}{X}\right)$. Ainsi, A_2 est la matrice dans la base canonique \mathcal{B} de E de $f_2 = g \circ f_1 \circ g$. Or, pour un polynôme $P \in E$, il vient $f_1 \circ g(P) = \frac{1}{N} \left(X^N P\left(\frac{1}{X}\right) \right)' = X^{N-1} P\left(\frac{1}{X}\right) - \frac{X^{N-2}}{N} P'\left(\frac{1}{X}\right)$, ce qui donne finalement $f_2(P) = g((f_1 \circ g)(P)) = X^N \left(X^{1-N} P(X) - \frac{X^{2-N}}{N} P'(X) \right) = X P(X) - \frac{X^2}{N} P'(X)$.

Au final, comme $A = A_1 + A_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $f = f_1 + f_2 : P \mapsto X P + \frac{1-X^2}{N} P'$.

b. Cherchons les éléments propres de f .

Analyse : soit un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et un polynôme $P \in E$ tels que $f(P) = \lambda P$, on a donc $(1-X^2)P' - N(\lambda-X)P = 0$.

La fonction polynomiale P est donc solution de l'équation différentielle (E) : $(1-t^2)y' = N(\lambda-t)y$. Or

$\frac{\lambda-t}{1-t^2} = \frac{\lambda+1}{2} \cdot \frac{1}{1+t} + \frac{\lambda-1}{2} \cdot \frac{1}{1-t}$. Ainsi les solutions de (E) (sur l'intervalle $] -1; 1[$ par exemple) sont les

$y : t \mapsto \alpha(1+t)^{\frac{N(\lambda+1)}{2}}(1-t)^{\frac{N(1-\lambda)}{2}}$ qui sont des fonctions polynomiales non nulles si $\alpha \neq 0$ et $\frac{N(\lambda+1)}{2} = k$

et $\frac{N(1-\lambda)}{2} = k'$ sont des entiers naturels avec $k+k' = N$. Ainsi, il existe $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$ tel que $\lambda = \frac{2k}{N} - 1$ est

valeur propre de A associé au vecteur propre $P_k = (1+X)^k(1-X)^{N-k} \in \mathbb{R}_N[X]$. A est bien diagonalisable.

Synthèse : pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, posons $\lambda_k = \frac{2k}{N} - 1$ et $P_k = (1+X)^k(1-X)^{N-k} \in \mathbb{R}_N[X]$, les calculs précédents montrent que $f(P_k) = \lambda_k P_k$ avec $P_k \neq 0$ donc λ_k est une valeur propre de f .

Conclusion : A est diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ admet $N+1$ valeurs propres distinctes, on peut même affirmer que tous les sous-espaces propres $E_{\lambda_k}(A)$ sont des droites et $E_{\lambda_k}(f) = \text{Vect}(P_k)$.

De plus, comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ donc χ_A est scindé sur \mathbb{R} , on a $\text{Tr}(A) = \sum_{k=0}^N \lambda_k$ donc

$\text{Tr}(A) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{2k}{N} - 1 \right) = \frac{2}{N} \times \frac{N(N+1)}{2} - (N+1) = 0$ (ce qu'on savait déjà car il n'y a que des 0 sur la

diagonale de A) et $\det(A) = \prod_{k=0}^N \left(\frac{2k}{N} - 1 \right)$ donc $\det(A) = 0$ si $N = 2p$ est pair car $\lambda_p = \frac{2p}{2p} - 1 = 0$ et

$\det(A) = \prod_{k=0}^N \left(\frac{2k}{2p+1} - 1 \right) = \prod_{k=0}^N \frac{2k-2p-1}{2p+1} = (-1)^{p+1} \prod_{i=0}^p \frac{2i+1}{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^p(2p+1)^{p+1}p!}$ (calcul classique en

faisant intervenir les termes pairs manquants) si $N = 2p+1$ est impair.

62 a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k X = \lambda^k X$. Pour $k = p$, on a donc $M^p X = 0 = \lambda^p X$ donc $\lambda^p = 0$ car $X \neq 0$ d'où $\lambda = 0$. Ainsi, la seule valeur propre de M est 0 et, comme χ_M est scindé dans \mathbb{C} par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, on a $\chi_M = X^n$.

Seul nous intéresse le fait que χ_M soit scindé dans \mathbb{C} , ce qui montre d'après le cours que M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure avec des 0 (seule valeur propre) sur la diagonale telles que $M = PTP^{-1}$. Alors $\det(I_n + M) = \det(I_n + PTP^{-1}) = \det(P(I_n + T)P^{-1}) = \det(I_n + T)$ car $I_n + T$ et $P(I_n + T)P^{-1}$ sont semblables. Comme $I_n + T$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, on a $\det(I_n + T) = 1 = \det(I_n + M)$.

On pouvait aussi dire que $-M$ est aussi nilpotente donc $\chi_{-M} = X^n$ et $\det(I_n + M) = \chi_{-M}(1) = 1^n = 1$.

b. Si U est inversible, on a $U + V = U(I_n + U^{-1}V)$ donc, par multiplicativité du déterminant, on obtient $\det(U + V) = \det(U)\det(I_n + U^{-1}V) = \det(U)\det(I_n + M)$ en posant $M = U^{-1}V$. Comme $UV = VU$, on a aussi $U^{-1}V = VU^{-1}$ en multipliant par U^{-1} à gauche et à droite donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = U^{-k}V^k$ par récurrence simple et, comme V est nilpotente, M est aussi nilpotente car $V^n = M^n = 0$ par le théorème de CAYLEY-HAMILTON puisque $\chi_V = \chi_M = X^n$. D'après **a.**, $\det(I_n + M) = 1$ donc $\det(U + V) = \det(U)$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(U, V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $UV = VU$ et V nilpotente. Traitons trois cas :

- Si U inversible : dans ce cas, d'après **b.**, $\det(U + V) = \det(U)$.
- Si $U = 0$: dans ce cas, $\det(U + V) = \det(V) = 0 = \det(U)$ car V est nilpotente donc non inversible.
- Si U n'est pas inversible et $U \neq 0$: on a $\det(U) = 0$. Comme U et V commutent par hypothèse, $\text{Ker}(U)$ est stable par V . Proposons deux approches :
 - Soit \mathcal{B}_1 une base de $\text{Ker}(U)$, $\text{Ker}(U) \neq \{0\}$ car U n'est pas inversible, $\dim(\text{Ker}(U)) = p \geq 1$. On complète \mathcal{B}_1 en une base \mathcal{B} de \mathbb{C}^n et, si on note u et v les endomorphismes de \mathbb{C}^n canoniquement associés à U et V , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix}$ car $\text{Ker}(U)$ est stable par v . $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $(B, E) \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$ avec $p \geq 1$ et $n - p = \text{rang}(U) \geq 1$. Comme v est nilpotent, C et E sont nilpotentes car $V^n = 0 = \begin{pmatrix} C^n & * \\ 0 & E^n \end{pmatrix}$ implique $C^n = 0$ et $E^n = 0$. Ainsi, $\det(C) = 0$ et, comme $U + V = \begin{pmatrix} C & A + D \\ 0 & B + E \end{pmatrix}$, $\det(U + V) = \det(C)\det(B + E) = 0 = \det(U)$.
 - Comme v est nilpotent, $w = v_{\text{Ker}(u)}$ (l'endomorphisme induit par v dans $\text{Ker}(u)$) est aussi nilpotent donc non inversible et il existe un vecteur $x \in \text{Ker}(u)$ tel que $w(x) = v(x) = 0$. Ainsi, $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$ donc $(u + v)(x) = 0$ et, comme $x \neq 0$, $u + v$ n'est pas inversible donc $\det(u + v) = \det(U + V) = 0 = \det(U) + \det(V)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $(U, V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ vérifie $UV = VU$ et V nilpotente, alors $\det(U + V) = \det(U)$.

63 ↑

64 ↑

65 ↑

66 ↑

- 67 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Une récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$. Ainsi, $(A^3 - A^2 + A - I_n)X = 0X = 0 = A^3 X - A^2 X + AX + X$ donc $(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1)X = 0$ et, comme $X \neq 0$, on a $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = P(\lambda) = 0$ et λ est bien une racine de P .
- b.** Comme $P = X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + i)(X - i)$, la question précédente montre que $\text{Sp}(A) \subset \{1, i, -i\}$. Comme P est scindé à racines simples sur \mathbb{C} et que P est annulateur de A , la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on sait qu'alors $\det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$. Posons $a = m_1(A)$, $b = m_i(A)$ et $c = m_{-i}(A)$. Comme $-i$ est le conjugué de i et que A est une matrice réelle, on sait d'après le cours que $b = c$. On a donc $\det(A) = 1^a i^b (-i)^c = 1$ car $i(-i) = 1$.

c. De même, comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda = a \times 1 + b \times (i) + b \times (-i)$

car $b = c$ donc $\text{Tr}(A) = a \in \mathbb{N}$.

68 ↑

69 ↑

70 ↑

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 6

THÉORÈMES DE DOMINATION

71 ↓

72 a. Pour $n \geq 1$, $a_n = \ln \left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n} \right) = \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ donc, avec l'hypothèse de l'énoncé,

$a_n = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et, par comparaison aux séries de RIEMANN, la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. Par dualité suite-série, la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ converge ce qui donne

l'existence d'un réel k tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^\alpha u_n) = k$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \lambda = e^k > 0 \text{ donc que } u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}.$$

b. Soit $x \in]-1; 0[$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1 - (1-t)^x}{t}$ est continue sur $]0; 1[$.

En 1⁻ Comme $x < 0$, $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)^x = +\infty$ donc $g_x(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{-x}}$ et, comme $-x < 1$, g_x est intégrable sur

$\left[\frac{1}{2}; 1\right[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

En 0⁺ On sait que $(1-t)^x = 1 - xt + o(t)$ donc $g_x(t) \underset{0}{=} \frac{xt + o(t)}{t} \underset{0}{=} x + o(1)$ donc g_x se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x$. Ainsi, g_x est intégrable sur $]0; \frac{1}{2}]$.

Par conséquent, g_x est intégrable sur $]0; 1[$ (même $[0; 1]$) donc f est bien définie sur $] - 1; 0[$.

Pour $t \in [0; 1[$, on a $(1-t)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} (-t)^n$ d'après le cours sur les séries entières donc

$$g_x(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} t^n \text{ pour } t \in]0; 1[, \text{ ce qui se simplifie en (relation vraie pour } t = 0$$

$$\text{car on a posé } g_x(0) = x) \quad g_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} t^{n-1}.$$

Posons donc, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $u_n : t \mapsto (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} t^{n-1}$.

(H₁) La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement vers g_x sur $]0; 1[$ (on vient de le voir).

(H₂) Les u_n sont continues et intégrables sur $[0; 1[$ si $n \in \mathbb{N}$ car elles sont polynomiales sur le segment $[0; 1]$.

(H₃) La fonction g_x est continue sur $[0; 1[$.

(H₄) Posons $I_n = \int_0^1 |u_n| = \frac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n!} \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^1 = \frac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n.n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On calcule } \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n-x)n.n!}{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n+1).(n+1)!} = \frac{n(n-x)}{(n+1)^2} = \left(1 - \frac{x}{n}\right) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2}$$

ce qui donne, par développements limités, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \underset{+\infty}{=} \left(1 - \frac{x}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ et il vient donc

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{x+2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ On en déduit d'après la question précédente qu'il existe } \lambda > 0 \text{ tel que}$$

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^{x+2}} \text{ donc, toujours par comparaison aux séries de RIEMANN, } \sum_{n \geq 1} I_n \text{ converge car } x+2 > 1.$$

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a l'intégrabilité de g_x (on le savait déjà) et surtout la relation

$$\int_0^1 g_x(t) dt = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n.$$

73 ↓

74 a. Pour $n \geq 2$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. La fonction f_n est continue sur \mathbb{R}_+ et $f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^n}$ donc f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison à une intégrale de RIEMANN car $n > 1$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ converge pour $n \geq 2$ et la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est bien définie.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H₁) La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in [0; 1[$, $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ si $x \in]1; +\infty[$.

(H₂) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

(H₃) Pour tout $n \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0; 1[$ et $\varphi(x) = f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$ si $x \in]1; +\infty[$ avec φ qui est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $\varphi(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$.

D'après le théorème évoqué, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 dx = 1 = \ell$.

c. Pour $n \geq 2$, $I_n - \ell = I_n - 1 = \int_0^1 (f_n(x) - 1) dx + \int_1^{+\infty} f_n(x) dx = -\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ avec la relation de CHASLES. On pose $x = u^{1/n} = \varphi_n(u)$ dans les deux intégrales car $u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0; 1[$ dans $]0; 1[$ mais aussi de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$, ce qui donne la relation $I_n - 1 = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{1/n} du}{1+u} + \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{u^{1/n} du}{u(1+u)}$ donc $n(I_n - 1) = \int_0^1 g_n(u) du + \int_1^{+\infty} h_n(u) du$ en posant $g_n(u) = \frac{u^{1/n}}{1+u}$ et $h_n(u) = \frac{u^{1/n}}{u(1+u)}$.

(H₁) $(g_n)_{n \geq 2}$ converge simplement sur $]0; 1[$ vers $g :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(u) = \frac{1}{1+u}$ et $(h_n)_{n \geq 2}$ converge simplement sur $]1; +\infty[$ vers $h :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \frac{1}{u(1+u)}$.

(H₂) Les fonctions g_n et g sont continues sur $]0; 1[$ et les h_n et h sont continues sur $]1; +\infty[$.

(H₃) Pour tout $n \geq 2$, $\forall u \in]0; 1[$, $|g_n(u)| \leq \alpha(u) = 1$ et $\forall u \in]1; +\infty[$, $|h_n(u)| \leq \beta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}(1+u)}$ avec α continue et intégrable sur $]0; 1[$ et β continue et intégrable sur $]1; +\infty[$ car $\beta(u) \sim_{+\infty} \frac{1}{u^{3/2}}$.

D'après le théorème de convergence dominée appliqué deux fois, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(u) du = \int_0^1 g(u) du = \ln(2)$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} h_n(u) du = \int_1^{+\infty} h(u) du = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du = \left[\ln \left(\frac{u}{1+u} \right) \right]_1^{+\infty} = \ln(2)$. Ainsi,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(I_n - 1) = -\ln(2) + \ln(2) = 0$ d'où $I_n - 1 = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ne donne pas d'équivalent de $I_n - 1$: damned !

Changeons de stratégie. Dans $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, on pose $x = \frac{1}{u} = \psi(u)$ avec ψ une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $]0; 1[$ dans $]1; +\infty[$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \int_1^0 \frac{1}{1+(1/u)^n} \left(-\frac{1}{u^2} \right) du = \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{1+u^n} du$.

Ainsi, pour $n \geq 2$, $I_n - 1 = \int_0^1 \frac{x^{n-2} - x^n}{1+x^n} dx$ et on pose $x = u^{1/n} = \varphi_n(u)$ car φ_n est une bijection

strictement croissante de classe C^1 de $]0; 1[$ dans $]0; 1[$ pour avoir $I_n - 1 = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{\frac{n-2}{n}} - u}{1+u} \times u^{(1/n)-1} du$ et

on obtient $I_n - 1 = -\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{-(1/n)}}{1+u} (u^{2/n} - 1) du$. Comme $\forall u \in]0; 1[$, $u^{2/n} - 1 = \exp\left(\frac{2 \ln(u)}{n}\right) - 1 \sim_{+\infty} \frac{2 \ln(u)}{n}$

car $e^t = 1 + t + o(t)$, on écrit plutôt $I_n - 1 = -\frac{2}{n^2} \int_0^1 \frac{u^{-(1/n)}}{1+u} \times \frac{u^{2/n} - 1}{2 \ln(u)} \times \ln(u) du$. Pour tout entier $n \geq 2$,

posons $h_n : u \mapsto \frac{u^{-(1/n)}}{1+u} \times \frac{u^{2/n} - 1}{2 \ln(u)} \times \ln(u)$:

(H₁) $(h_n)_{n \geq 2}$ converge simplement sur $]0; 1]$ vers la fonction $h :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \frac{\ln(u)}{1+u}$.

(H₂) Les fonctions h_n et h sont continues sur $]0; 1]$.

(H₃) Pour tout $n \geq 2$, $\forall u \in]0; 1]$, $|h_n(u)| \leq \theta(u)$ avec $\theta(u) = \frac{u^{-1/2} \ln(u)}{1+u}$ si $u \in]0; 1]$ car $n \geq 2$ et qu'il est classique que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^t - 1 \geq t$ donc $\forall u \in]0; 1]$, $\frac{u^{2/n} - 1}{2 \ln(u)} \leq 1$ en prenant $t = \frac{2 \ln(u)}{n} < 0$. De plus, θ est continue et intégrable sur $]0; 1]$ par comparaison à une intégrale de RIEMANN $\left(\frac{3}{4} < 1\right)$

car on a $\theta(u) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}} = o\left(\frac{1}{u^{3/4}}\right)$ par croissances comparées.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2} (1 - I_n) = \int_0^1 h(u) du = J$.

Or $\forall u \in]0; 1]$, $h(u) = \ln(u) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n \ln(u)$. Si $a_n : u \rightarrow (-1)^n u^n \ln(u)$ pour $n \in \mathbb{N}$:

(H₁) La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge simplement vers h sur $]0; 1]$ car $h(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(1) = 0$.

(H₂) Les fonctions a_n sont continues et intégrables sur $]0; 1]$ pour $n \in \mathbb{N}$ car elles se prolongent par continuité en 0 avec $a_n(0) = 0$ dès que $n \geq 1$ et $a_0(u) = \ln(u) = o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$ par croissances comparées.

(H₃) La fonction h est continue sur $]0; 1]$.

(H₄) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : u \mapsto \frac{u^{n+1}}{n+1}$ et $v : u \mapsto -\ln(u)$ sont de classe C^1 sur $]0; 1]$ et $\lim_{u \rightarrow 0} u_n(u)v(u) = 0$ par croissances comparées donc $J_n = \int_0^1 |a_n| = \int_0^1 u'_n(u)v(u) du = [u_n(u)v(u)]_0^1 - \int_0^1 u_n(u)v'(u) du$ donc $J_n = \int_0^1 \frac{u^n}{n+1} du = \frac{1}{(n+1)^2}$. La série de RIEMANN $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge car $2 > 1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $J = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n(u) du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$. En séparant termes d'indices pairs et impairs, $J = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)^2}$ et il vient $J = -\zeta(2) + \frac{\zeta(2)}{2} = -\frac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2} (I_n - 1) = -J = \frac{\pi^2}{12}$ donc $I_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n^2}$.

d. Par comparaison à une série de RIEMANN convergente car $2 > 1$, la série $\sum_{n \geq 2} (I_n - 1)$ converge.

75 ↓

76 La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0; 1[$. $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ car $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ donc f est intégrable sur $]0; \frac{1}{2}]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. De plus, f est intégrable sur $[\frac{1}{2}; 1[$ car $f(x) \underset{1-}{\sim} (x-1) \ln(1-x)$ car $\ln(x) \underset{1-}{\sim} x-1$ donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$ par croissances comparées. Comme on sait que $\forall x \in]0; 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, il vient, avec $f_n :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

définie par avec $f_n(x) = -\frac{x^{n-1} \ln(x)}{n}$, la relation $I = \int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx$.

Les fonctions f_n sont continues sur $]0; 1]$ et, comme $f_1(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0$ par croissances comparées donc que f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0; 1]$ en posant $f_n(0) = 0$ si $n \geq 2$, les fonctions f_n sont intégrables sur $]0; 1]$.

D'abord, en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(x)$, les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $]0; 1]$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $n \geq 1$ donc, par intégration par parties, on obtient la relation $\int_0^1 f_n = \left[-\frac{x^n \ln x}{n^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n^2} \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n^2} \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n^3}$ si $n \geq 1$.

Méthode 1 : par linéarité de l'intégrale, comme la fonction $f_1 : x \mapsto -\ln(x)$ est intégrable sur $]0; 1]$, et donc $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = f - f_1$ aussi d'après ce qui précède, on a $I = \int_0^1 f_1 + \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) dx$.

Pour $n \geq 2$, f_n est continue sur $[0; 1]$ en posant $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$. De plus, f_n est dérivable sur $]0; 1]$ et $\forall x \in]0; 1]$, $f'_n(x) = -\frac{1}{n} \left((n-1)x^{n-2} \ln(x) + x^{n-2} \right)$ donc, avec le tableau de variations de f_n , on trouve $\|f_n\|_{\infty, [0; 1]} = f_n\left(e^{-\frac{1}{(n-1)}}\right) = \frac{1}{en(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n^2}$. Ainsi, $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ par RIEMANN. Par convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ sur le segment $[0; 1]$, d'après le cours, $\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) - 1$. Comme $\int_0^1 f_1 = 1$, on obtient la valeur $I = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$.

Méthode 2 : utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

(H₁) La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0; 1[$ (on en vient).

(H₂) Les f_n sont continues et intégrables sur $]0; 1[$ (déjà vu).

(H₃) La fonction f est continue sur $]0; 1[$.

(H₄) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n^3}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^3}$ converge.

Par le fameux théorème, on conclut que f est intégrable sur $]0; 1[$ (on le savait déjà) et surtout la relation $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1,202$.

77 ↓

78 ↓

79 a. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \mapsto \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}$, la fonction f_x est continue sur \mathbb{R}_+^* et $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t}$. De plus, comme $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_x(t) = 1$ quelle que soit la valeur de x ce qui fait que f_x est toujours intégrable en 0^+ .

- Si $x \leq -1$, on a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_x(t) = +\infty$ et f_x n'est donc pas intégrable en $+\infty$.

- Si $x > -1$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f_x est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $x > -1$, et comme f_x est positive, $\int_0^{+\infty} f_x$ converge si et seulement si $x > -1$. Par conséquent, le domaine de définition D de f est $D =]-1; +\infty[$.

b. Méthode 1 : la fonction $g : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . La convexité de la fonction exponentielle montre que $\forall t > 0, e^t > t + 1$ donc $e^t - 1 > t$ et on a $\forall t > 0, g(t) \leq 1$. Par conséquent, par croissance de l'intégrale, comme $e^{-xt} > 0, \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Ainsi, puisque $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$:

(H₁) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, t) = 0 = h(t)$.

(H₂) $\forall x \in \mathbb{R}_+,$ la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et h l'est aussi.

(H₃) $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, |g(x, t)| \leq \frac{t}{e^t - 1} = f_0(t)$ et on a vu que f_0 est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} h(t) dt = 0$.

c. Pour $x > 0, x - 1 \in D$ donc $f(x - 1)$ et $f(x)$ existent et, par linéarité de l'intégrale, on a la relation $f(x - 1) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t(e^{-(x-1)t} - e^{-xt})}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} te^{-xt} dt$. On pose $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $f(x - 1) - f(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ donc $f(x - 1) - f(x) = \frac{1}{x} \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$.

d. Soit $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n (f(x + k - 1) - f(x + k)) = f(x) - f(x + n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x + k)^2}$ par télescopage donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + n) = 0$ d'après **b.** et que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x + k)^2}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN, on a $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x + k)^2}$.

e. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_x(t) = \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} = \frac{te^{-(x+1)t}}{1 - e^{-t}} = te^{-(x+1)t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n$ car $|e^{-t}| < 1$ (série géométrique).

Ainsi, $f_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$ avec $g_n(t) = te^{-(x+1+n)t}$.

(H₁) La série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers f_x (on vient de le voir).

(H₂) Les fonctions g_n sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* car elles se prolongent par continuité en 0 en posant $g_n(0) = 0$ et qu'on a $g_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

(H₃) La fonction f_x est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₄) Pour $n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ en posant $u : t \mapsto -\frac{e^{-(x+1+n)t}}{x+1+n}$ et $v : t \mapsto t$ qui sont C^1 sur \mathbb{R}_+^* avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées car $x+1+n > 0$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1+n)t}}{x+1+n} dt = \frac{1}{(x+1+n)^2}$ et la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt$ converge par comparaison car $\frac{1}{(x+1+n)^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on le savait déjà) et on a $\forall x > 0, f(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1+n)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$ en posant $k = n + 1$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 7

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

80 a. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral et il existe

donc une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Comme A et D sont semblables, on a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D) = D_1 + D_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = \det(D) = D_1 D_2 - a^2 = \lambda_1 \lambda_2$.

Méthode 1 : comme (E_1, E_2) est une base orthonormale de \mathbb{R}^2 euclidien canonique, on sait que $D_1 = (E_1 | AE_1)$ et $D_2 = (E_2 | AE_2)$. Soit (V_1, V_2) la base orthonormale de \mathbb{R}^2 telle que V_1 est la première colonne de $P \in O(2)$ et V_2 sa seconde. Les vecteurs colonnes V_1 et V_2 sont donc des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . On peut décomposer $E_1 = x_1 V_1 + x_2 V_2$ dans la base (V_1, V_2) , ce qui revient à poser $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P^{-1} E_1 = P^T E_1$, ce qui équivaut à $E_1 = PX$ (formule de changement de coordonnées). Ainsi, $D_1 = (E_1 | AE_1) = (x_1 V_1 + x_2 V_2 | A(x_1 V_1 + x_2 V_2)) = (x_1 V_1 + x_2 V_2 | \lambda_1 x_1 V_1 + \lambda_2 x_2 V_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$, ce qui donne $D_1 \leq \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) = \lambda_1$ car $\lambda_2 \leq \lambda_1$ et $x_2^2 \geq 0$ et que $x_1^2 + x_2^2 = 1$ car $\|E_1\|^2 = 1$. On pouvait aussi écrire $D_1 = (E_1 | AE_1) = E_1^T A E_1 = E_1^T P D P^T E_1 = X^T D X$ et effectuer directement le calcul matriciel.

On a donc $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, $\lambda_1 \geq D_1$ et $\lambda_2 = D_2 - (\lambda_1 - D_1) \leq D_2$.

Méthode 2 : en posant $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $PD = \begin{pmatrix} \alpha \lambda_1 & \beta \lambda_2 \\ \gamma \lambda_1 & \delta \lambda_2 \end{pmatrix}$ donc $PD P^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 & * \\ * & \lambda_1 \gamma^2 + \lambda_2 \delta^2 \end{pmatrix} = A$ et, en identifiant, $D_1 = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 \leq \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_1 \beta^2 = \lambda_1(\alpha^2 + \beta^2) = \lambda_1$ car $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ car $PP^T = I_2$. De même, $D_2 = \lambda_1 \gamma^2 + \lambda_2 \delta^2 \geq \lambda_2 \gamma^2 + \lambda_2 \delta^2 = \lambda_2$ car $\gamma^2 + \delta^2 = 1$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique telle que λ_1 et λ_2 soient ses deux valeurs propres réelles (pas forcément distinctes - grâce au théorème spectral) et $D_1 \geq D_2$ des réels tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, $\lambda_1 \geq D_1$, on va montrer qu'il existe un réel a tel que A soit orthosemblable à la matrice $\begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix}$.

Posons $m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{D_1 + D_2}{2}$ le milieu commun des segments $[\lambda_2; \lambda_1]$ et $[D_2; D_1]$ car $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, le réel $\alpha = D_1 - m \geq 0$ car $D_1 \geq D_2$ et $\beta = \lambda_1 - m \geq \alpha$ car $\lambda_1 \geq \lambda_2$ et $\lambda_1 \geq D_1$ (tracer $\lambda_2 \leq D_2 \leq D_1 \leq \lambda_1$). Alors, $D_1 D_2 - \lambda_1 \lambda_2 = (m + \alpha)(m - \alpha) - (m + \beta)(m - \beta) = m^2 - \alpha^2 - (m^2 - \beta^2) = \beta^2 - \alpha^2 \geq 0$. On peut donc poser $a = \sqrt{D_1 D_2 - \lambda_1 \lambda_2}$ de sorte que $D_1 D_2 - a^2 = \lambda_1 \lambda_2$. Comme on a $D_1 D_2 - a^2 = \lambda_1 \lambda_2$ et $D_1 + D_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, on est en bonne voie pour montrer que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix}$ sont semblables car $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(D)$ et $\det(M) = \det(D)$.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P D P^T$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ car λ_1, λ_2 sont les deux valeurs propres de A . Or $\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M) = X^2 - (D_1 + D_2)X + D_1 D_2 - a^2$ donc $\chi_M = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1 \lambda_2 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Traitons deux cas :

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors A et M sont orthosemblables à $D = \lambda_1 I_2$ donc $A = M = \lambda_1 I_2$ et on a $\lambda_2 = D_2 = D_1 = \lambda_1$

dans ce cas avec $\mathbf{a} = 0$ donc $M = I_2 A I_2^T$ avec $I_2 \in O_2(\mathbb{R})$.

Si $\lambda_1 > \lambda_2$, A et M étant symétriques réelles avec $\chi_A = \chi_M = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, il existe deux matrices P, Q orthogonales telles que $A = P D P^T$ et $M = Q D Q^T$ donc $M = (Q P^T) D (Q P^T)^T$ avec $Q P^T \in O_2(\mathbb{R})$ par stabilité e $O_2(\mathbb{R})$ par produit donc A et M sont orthosemblables.

Ainsi, M et D sont orthosemblables dans les deux cas. Il suffisait de montrer que A et D (resp. M et D) sont orthosemblables, et comme la relation binaire d'orthosimilitude est une relation d'équivalence car $O_2(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, M et A sont elles aussi orthosemblables.

Pour aller plus loin : si on veut expliciter une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $M = P D P^T$, on peut chercher P sous la forme d'une matrice R_θ (le faire aussi avec des S_θ). Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M_\theta = R_\theta D R_\theta^T = R_\theta D R_{-\theta}$ donc

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta & \lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Traitons deux cas :

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors A est semblable à $D = \lambda_1 I_2$ donc $A = \lambda_1 I_2$. De plus, comme $\lambda_2 \leq D_2 \leq D_1 \leq \lambda_1$, on a $D_1 = D_2 = \lambda_1$ donc $\mathbf{a} = 0$ et $M = D$ et on peut prendre $P = I_2 = R_0$.

Si $\lambda_1 > \lambda_2$, avec le calcul précédent, on veut prendre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta = \mathbf{a}$, ce qui s'écrit aussi $\sin(2\theta) = \frac{2\mathbf{a}}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Il faut donc vérifier que $2\mathbf{a} \leq \lambda_1 - \lambda_2$. Ces quantités étant positives, $2\mathbf{a} \leq \lambda_1 - \lambda_2 \iff 4\mathbf{a}^2 \leq (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \iff 4(D_1 D_2 - \lambda_1 \lambda_2) \leq \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2$ donc on a encore $2\mathbf{a} \leq \lambda_1 - \lambda_2 \iff 4D_1 D_2 \leq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = (D_1 + D_2)^2$. Or, il est classique que $4D_1 D_2 \leq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = (D_1 + D_2)^2 \iff (D_1 - D_2)^2 \geq 0$ est vrai. Ainsi, $\frac{2\mathbf{a}}{\lambda_1 - \lambda_2} \in [0; 1]$, posons donc $\theta = \frac{1}{2} \text{Arcsin} \left(\frac{2\mathbf{a}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$ d'où $\sin(2\theta) = \frac{2\mathbf{a}}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Comme $2\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, $\cos(2\theta) \geq 0$ donc $\cos(2\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(2\theta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\mathbf{a}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2} = \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\mathbf{a}^2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ et on trouve $\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta = \lambda_1 \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} + \lambda_2 \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos(2\theta)$, ce qui donne $\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta = \frac{D_1 + D_2}{2} + \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\mathbf{a}^2}}{2} = \frac{D_1 + D_2}{2} + \frac{\sqrt{(D_1 - D_2)^2}}{2} = D_1$ (voir ci-dessus). On obtient, par un calcul analogue, $\lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_2 \cos^2 \theta = D_2$. Par conséquent, on a $M_\theta = M = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & D_2 \end{pmatrix} = R_\theta D R_\theta^T$.

81 ↓

82 D'abord, f_a est clairement un endomorphisme de E pour tout réel a .

a. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in E$, $f_a \circ f_b(x) = f_a(x + b(x|u)u) = f_a(x) + b(x|u)f_a(u)$ par linéarité de u . Or $f_a(u) = (1 + a|u|^2)u = (1 + a)u$ car u est unitaire, donc on a bien la relation $f_a \circ f_b = f_{a+b+ba}$ car on a $f_a \circ f_b(x) = x + a(x|u)u + b(1 + a)(x|u)u = x + (a + b + ba)(x|u)u = f_{a+b+ba}(x)$.

b. Comme $a + b + ba = b + a + ab$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par commutativité de la somme et du produit dans \mathbb{R} , on a bien $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a bien $f_a^0 = \text{id}_E = f_0 = f_{(a+1)^0-1}$ et $f_a^1 = f_a = f_{(a+1)-1}$. Soit un entier $p \in \mathbb{N}^*$

tel que l'on ait $f_a^p = f_{(a+1)^{p-1}}$, alors d'après la question **a.** et par hypothèse de récurrence, on obtient $f_a^{p+1} = f_a \circ f_a^p = f_a \circ f_{(a+1)^{p-1}} = f_{a+(a+1)^{p-1}+((a+1)^{p-1})a} = f_{(a+1)^{p+1}}$.

Par principe de récurrence, on a $\forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, f_a^p = f_{(a+1)^{p-1}}$.

d. Si $a \neq -1$, il existe b tel que $a + b + ba = 0$, c'est $b = -\frac{a}{a+1}$ on a $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a = f_0 = \text{id}_E$ donc f_a est un automorphisme de E . Si $a = -1$, $f_{-1}(u) = u - \|u\|^2 u = 0_E$ donc $\text{Ker}(f_{-1}) \neq \{0_E\}$ donc $f_{-1} \notin \text{GL}(E)$. Ainsi, f_a est inversible si et seulement si $a \neq -1$.

e. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in E^2$, on a $(f_a(x)|y) = (x + a(x|u)u|y) = (x|y) + a(x|u)(u|y) = (x|y) + a(x|u)(y|u)$ donc $(f_a(x)|y) = (x|y + a(y|u)u) = (x|f_a(y))$ par symétrie du produit scalaire, donc f_a est autoadjoint.

f. Analyse : soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f_a \in O(E)$. Alors $f_a(u)$ est unitaire car u l'est. Comme $f_a(u) = (1+a)u$, on en déduit que $\|f_a(u)\| = |1+a|\|u\| = \|u\|$ donc $|1+a| = 1$. Ainsi, $1+a = \pm 1$ ce qui donne $a = 0$ ou $a = -2$.

Synthèse : • Si $a = 0$, $f_a = \text{id}_E$ donc $f_0 \in O(E)$ (isométrie directe s'il en est).

• Si $a = -2$, $f_{-2}^2 = f_{-2-2+4} = f_0 = \text{id}_E$ donc f_{-2} est une symétrie, et comme c'est aussi un endomorphisme autoadjoint, c'est une symétrie orthogonale d'après le cours. Or $f_{-2}(x) = x \iff (x|u) = 0 \iff x \in \text{Vect}(u)^\perp$ ce qui montre que $E_1(f_{-2}) = \text{Vect}(u)^\perp$. Comme f_{-2} est orthogonale, $E_{-1}(f_{-2}) = E_1(f_{-2})^\perp = \text{Vect}(u)$. Dans ce cas, f_{-2} est la réflexion d'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$.

Conclusion : il existe donc seulement deux isométries parmi les $f_a : f_0 = \text{id}_E \in \text{SO}(E)$ et $f_{-2} \in O(E) \setminus \text{SO}(E)$ qui est la réflexion d'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$.

Pour aller plus loin : toutes les questions précédentes justifient qu'en posant $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$:

- La loi \circ est interne dans \mathcal{F} d'après la question **a.** car si $a \neq -1$ et $b \neq -1$, $f_a \circ f_b = f_{a+b+ab}$ et $(a+b+ab) + 1 = (a+1)(b+1) \neq 0$ donc $a+b+ab \neq -1$ et $f_a \circ f_b \in \mathcal{F}$.
- La loi \circ est commutative dans \mathcal{F} d'après la question **b.**
- La loi \circ est toujours associative.
- $f_0 = \text{id}_E$ est neutre pour \circ dans \mathcal{F} car $-1 \neq 0$.
- Tous les éléments f_a de \mathcal{F} (avec $a \neq -1$) sont inversibles dans \mathcal{F} car en posant $b = -\frac{a}{a+1}$, on a $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a = \text{id}_E = f_0$ d'après **d.** et $-\frac{a}{a+1} + 1 = \frac{1}{a+1} \neq 0$ donc $b \neq -1$.

Ceci justifie que \mathcal{F} est un groupe abélien pour la loi \circ .

De plus, l'application $\theta : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathcal{F}$ définie par $\forall a \in \mathbb{R}^*, \theta(a) = f_{a-1}$ est bien définie d'après **d.** car $a-1 \neq -1$ si $a \neq 0$. Elle est surjective par définition de \mathcal{F} , injective car $f_a = f_b$ équivaut à $a = b$ (évaluer par exemple en $x = u$), ainsi θ est bijective. Enfin, pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $\theta(a \times b) = f_{ab-1}$ et $\theta(a) \circ \theta(b) = f_{a-1} \circ f_{b-1} = f_{(a-1)+(b-1)+(a-1)(b-1)} = f_{ab-1}$ donc $\theta(a \times b) = \theta(a) \circ \theta(b)$, ce qui montre que θ est un isomorphisme de groupes entre (\mathbb{R}^*, \times) et (\mathcal{F}, \circ) .

Question supplémentaire : d'abord, $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un évènement ($A \in \mathcal{A}$) car il est une réunion d'un nombre dénombrable d'évènements (axiome d'une tribu) et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq 1$ par σ -additivité donc, comme la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

83 ↓

84 ↓

85 ↓

86 ↓

87 ↓

88 ↓

89 D'abord, on constate que Φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par linéarité du produit scalaire en la première variable donc, comme $\dim(\mathbb{R}) = 1$ donc $\text{rang}(\Phi) \leq 1$, on a deux cas :

- soit $\text{rang}(\Phi) = 1$ donc $\dim(\text{Im}(\Phi)) = \dim(\mathbb{R})$ alors que $\text{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}$ donc $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{R}$.
- soit $\text{rang}(\Phi) = 0$, alors $\Phi = 0$ donc $\text{Im}(\Phi) = \{0\}$.

De plus, si $X^T = (x_1 \cdots x_n)$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, par calcul matriciel, $\Phi(M) = \langle MX, X \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} x_i x_j$.

a. Comme $X \neq 0$ et que $\Phi(I_n) = \langle X|X \rangle = \|X\|^2 \neq 0$, on a $\text{rang}(\Phi) = 1$ donc $\text{Im}(\Phi) = \Phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$.

b. Pour $M \in O_n(\mathbb{R})$, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $|\Phi(M)| = |\langle MX, X \rangle| \leq \|MX\| \|X\|$. Comme $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\|MX\| = \|X\|$ donc $|\Phi(M)| \leq \|X\|^2$ et $\Phi(O_n(\mathbb{R})) \subset [-\|X\|^2; \|X\|^2]$. Traitons deux cas :

Si $n = 1$, on a $O_1(\mathbb{R}) = \{I_1, -I_1\}$ donc $\Phi(O_1(\mathbb{R})) = \{\langle X|X \rangle, \langle -X|X \rangle\} = \{-\|X\|^2, \|X\|^2\}$.

Si $n \geq 2$, posons $X_1 = \frac{X}{\|X\|}$, comme la famille (X_1) est orthonormée, on peut donc la compléter en une base orthonormale $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ de \mathbb{R}^n . Soit u l'isométrie de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} R_\theta & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on note M la matrice de u dans la base canonique. Ainsi, $MX = u(\|X\|X_1) = \|X\|u(X_1) = \|X\|(\cos(\theta)X_1 - \sin(\theta)X_2)$ donc $\Phi(M) = \langle MX, X \rangle = \|X\| \cos(\theta)$. Pour tout $y \in [-\|X\|^2; \|X\|^2]$, en posant $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{y}{\|X\|^2}\right)$, on a $\langle MX, X \rangle = y \in \Phi(O_n(\mathbb{R}))$. Par conséquent, par double inclusion, on obtient $\Phi(O_n(\mathbb{R})) = [-\|X\|^2; \|X\|^2]$.

90 a. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite de FIBONACCI et ses premiers termes sont $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1,$

$$f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8. \text{ Ainsi, } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

b. Les deux premières colonnes de A_n forment une famille libre car $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$. De plus, par construction, en notant C_j la j -ième colonne de A_n , on a $\forall j \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket, C_{j+2} = C_{j+1} + C_j$ ce qui montre que les colonnes C_3, \dots, C_n sont des combinaisons linéaires des colonnes précédentes donc des colonnes C_1 et C_2 . Ainsi, $\text{rang}(A_n) = 2$ de qui montre, avec la formule du rang, que $\dim(\text{Ker}(A_n)) = \dim(E_0(A_n)) = n - 2$. Comme A_n est symétrique réelle car $f_{i+j-2} = f_{j+i-2}$, la matrice A_n est diagonalisable d'après le théorème spectral. Par conséquent, l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_{A_n} est égal à $\dim(E_0(A_n)) = n - 2$.

c. D'après la question précédente et toujours grâce au théorème spectral, $\chi_{A_n} = X^{n-2}(X - \lambda_n)(X - \mu_n)$ avec des réels λ_n, μ_n car on sait que χ_{A_n} est scindé sur \mathbb{R} , et qu'il est unitaire de degré n .

- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X^T = (1 \ -1 \ 0 \ \cdots \ 0) \neq 0$. On a $X^T A_n X = -1 < 0$ donc A_n n'est pas symétrique positive, il existe donc d'après le cours une valeur propre $\alpha_n < 0$ de A_n .
- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X^T = (1 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0) \neq 0$. On a $X^T A_n X = 3 > 0$ donc A_n n'est pas symétrique négative, il existe donc d'après le cours une valeur propre $\beta_n > 0$ de A_n .

Les valeurs propres de A_n sont donc $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-2 \text{ fois}}, \alpha_n, \beta_n$.

d. Soit $X_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre unitaire de A_n associé à la valeur α_n , d'où $A_n X_n = \alpha_n X_n$. On considère le vecteur $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Par un calcul par blocs, comme $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & * \\ * & f_{2n} \end{pmatrix}$, $Y_{n+1}^T A_{n+1} Y_{n+1} = X_n^T A_n X_n = \alpha_n X_n^T X_n = \alpha_n \|X_n\|^2 = \alpha_n$. Grâce au théorème spectral, les espaces propres de A_{n+1} sont supplémentaires orthogonaux et $\mathbb{R}^{n+1} = E_0(A_{n+1}) \oplus E_{\alpha_{n+1}}(A_{n+1}) \oplus E_{\beta_{n+1}}(A_{n+1})$. Ainsi, $Y_{n+1} = U_{n+1} + V_{n+1} + W_{n+1}$ avec $(U_{n+1}, V_{n+1}, W_{n+1}) \in E_0(A_{n+1}) \times E_{\alpha_{n+1}}(A_{n+1}) \times E_{\beta_{n+1}}(A_{n+1})$ et $\alpha_n = Y_{n+1}^T A_{n+1} Y_{n+1} = \alpha_{n+1} \|V_{n+1}\|^2 + \beta_{n+1} \|W_{n+1}\|^2 \geq \alpha_{n+1} \|V_{n+1}\|^2 + \alpha_{n+1} \|W_{n+1}\|^2 \geq \alpha_{n+1}$ car on a $\|V_{n+1}\|^2 + \|W_{n+1}\|^2 \leq \|U_{n+1}\|^2 + \|V_{n+1}\|^2 + \|W_{n+1}\|^2 = \|Y_{n+1}\|^2 = \|X_n\|^2 = 1$.

Ainsi, $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ et on peut conclure que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

Avec la même méthode, la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Comme $f_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$, $f_2 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, comme $\forall n \geq 2$, $f_{n+1} - f_n = f_{n-1} \geq 1$, la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante et $\forall n \geq 2$, $f_n = f_2 + \sum_{k=2}^{n-1} (f_{k+1} - f_k) \geq n - 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = +\infty$. Comme $\text{Tr}(A_n) = \sum_{k=0}^n f_{2k} \geq f_{2n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Tr}(A_n) = +\infty$. Or $\text{Tr}(A_n) = \alpha_n + \beta_n \leq \beta_n$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.

Il semble que $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ soit convergente, mais c'est une autre histoire !

91 ↓

92 ↑

93 ↑

94 ↓

95 ↓

96 ↓

97 ↑

98 ↑

99 ↑

100 ↑

101 **a.** La matrice $S = M^T M$ est symétrique car $S^T = (M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M = S$ et elle est à coefficients réels donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral.

b. On a $S^2 = (M^T M)(M^T M) = M^T (M M^T) M = M^T (M^T M) M$ par hypothèse car $M^T M = M M^T$. Comme on a $M^2 = -2I_2$, $S^2 = (M^T)^2 M^2 = (M^2)^T M^2 = (-2I_2)^2 = 4I_2$. Ainsi, le polynôme $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$ annule S et on sait d'après le cours que ceci implique que $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(M^T M) \subset \{-2, 2\}$.

c. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M^T M)$, il existe par définition un vecteur $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $SX = M^T M X = \lambda X$. Ainsi, $X^T M^T M X = \lambda X^T X$ donc $\|M X\|^2 = \lambda \|X\|^2$ d'où $\lambda = \frac{\|M X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$ car $\|X\|^2 > 0$. Or, $\text{Sp}(M^T M) \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{Sp}(M^T M) \subset \{-2, 2\}$ implique $\text{Sp}(M^T M) = \{2\}$ car $\text{Sp}(M^T M) \neq \emptyset$ d'après le théorème spectral.

d. Comme S est diagonalisable et n'a qu'une valeur propre, S est semblable à la matrice diagonale avec des 2 sur la diagonale. Comme S est semblable à $2I_2$, on a $S = P(2I_2)P^{-1} = 2I_2 = M^T M$ donc $\left(\frac{M}{\sqrt{2}}\right)^T \left(\frac{M}{\sqrt{2}}\right) = I_2$ ce qui montre que $\frac{M}{\sqrt{2}} \in O(2)$.

e. Posons $A = \frac{M}{\sqrt{2}}$, on a donc $A \in O(2)$ et $A^2 = -I_2$ d'après **d.** et par hypothèse, donc $\det(A) = 1$ car si on avait $\det(A) = -1$, on aurait $A^2 = I_2$ (réflexion) d'après le cours. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta$ et $A^2 = R_{2\theta} = -I_2 = R_\pi$ donc $2\theta \equiv \pi \pmod{2\pi} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ donc $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Ainsi, les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$ sont $M_1 = \sqrt{2} R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \sqrt{2} R_{-\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ (elles conviennent).

102 Comme S est symétrique réelle, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telle que $S = P D P^T$. Puisque S est définie positive, $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $Y^T S Y > 0$. Soit λ une valeur propre de S , alors $\lambda \in \mathbb{R}$ par le théorème spectral et il existe $Y \neq 0$ tel que $S Y = \lambda Y$. Ainsi, $Y^T S Y = \lambda Y^T Y = \lambda \|Y\|^2$ donc $\lambda = \frac{Y^T S Y}{\|Y\|^2} > 0$. Classons les valeurs propres de S , notons-les $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_r$

(avec $r \leq n$). On sait d'après le théorème spectral que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(S)$.

Pour tout vecteur $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on le décompose $X = \sum_{i=1}^r X_i$ avec $(X_1, \dots, X_r) \in E_{\lambda_1}(S) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(S)$.

Ainsi, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $S^k X = \sum_{i=1}^r S^k X_i$. Or $S X_i = \lambda_i X_i$ par définition donc, par une récurrence simple,

on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $S^k X_i = \lambda_i^k X_i$. Par conséquent, $S^k X = \sum_{i=1}^r \lambda_i^k X_i$.

Soit $j = \text{Max}(\{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \mid X_i \neq 0\})$ le plus grand entier tel que X_i est non nul, j existe bien car, comme $X \neq 0$, il existe forcément un indice $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que $X_i \neq 0$. Par définition de j , $S^k X = \sum_{i=1}^j \lambda_i^k X_i \neq 0$

pour $k \in \mathbb{N}$. Par PYTHAGORE, comme (X_1, \dots, X_j) est orthogonale, on a $\|S^k X\|^2 = \sum_{i=1}^j \lambda_i^{2k} \|X_i\|^2$ donc

$\|S^k X\|^2 \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j^{2k} \|X_j\|^2$ et $\|S^k X\| \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j^k \|X_j\|$ (tout est positif). Comme $\forall i \in \llbracket 1; j-1 \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_i^k}{\|S^k X\|} = 0$ car

$\lambda_i < \lambda_j$ et que $Y_k = \frac{\lambda_j^k}{\|S^k X\|} X_j + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\lambda_i^k}{\|S^k X\|} X_i$, ce qui précède montre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} Y_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_j^k}{\|S^k X\|} X_j = \frac{X_j}{\|X_j\|}$

(car $\|S^k X\| \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j^k \|X_j\|$) qui est bien un vecteur propre (et même unitaire) de S associé à la valeur propre λ_j .

103 ↑

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 8

PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

104 ↓

105 ↓

106 ↓

107 ↓

108 ↓

109 ↓

110 On modélise ce problème en associant chaque vote pour A à un déplacement dans \mathbb{Z}^2 de vecteur $(1, 1)$ et chaque vote pour B à un déplacement de vecteur $(1, -1)$. On part du point $(0, 0)$ et le dépouillement permet donc un chemin qui va de $(0, 0)$ à $(1000, 400)$ selon les règles ci-dessus. On cherche le nombre de chemins qui restent au dessus (au sens strict à part bien sûr à l'origine $(0, 0)$ de ce mouvement) de l'axe des abscisses.

On prend $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $q < p$ et on note $a_{p,q}$ le nombre de chemins dans \mathbb{Z}^2 qui partent de $(0, 0)$ et qui arrivent en $(p + q, p - q)$ en restant toujours au dessus (au sens large) de l'axe des abscisses. Dans notre cas, on a $p = 700$ et $q = 300$. Le nombre total des chemins qui partent de $(0, 0)$ et qui arrivent en $(p + q, p - q)$ est $b_{p,q} = \binom{p+q}{p}$ car il faut choisir parmi les $p + q$ déplacements les p qui se font vers le haut (en complémentaire ceux qui vont vers le bas).

Les $a_{p,q}$ chemins qui restent au dessus de l'axe des abscisses doivent commencer par un déplacement vers le haut donc passer par le point $(1, 1)$. Le nombre total de chemins qui vont de $(1, 1)$ à $(p + q, p - q)$ est, comme ci-dessus, égal à $\binom{p+q-1}{p-1}$. Pour un chemin $c = ((1, 1), (x_2, y_2), \dots, (x_{p+q-1}, y_{p+q-1}), (p + q, p - q))$ qui part de $(1, 1)$ et arrive en $(p + q, p - q)$ et qui touche l'axe des abscisses, on définit l'entier $k \geq 1$ qui est l'indice du premier (k minimal tel que $y_k = 0$) passage par l'axe des abscisses et on associe à c le chemin $c' = ((1, -1), (x_2, -y_2), \dots, (x_{k-1}, -y_{k-1}), (x_k, 0), (x_{k+1}, y_{k+1}), \dots, (x_{p+q-1}, y_{p+q-1}), (p + q, p - q))$. Réciproquement, pour un chemin $c' = ((1, -1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_{p+q-1}, y'_{p+q-1}), (p + q, p - q))$ qui va de $(1, -1)$ à $(p + q, p - q)$, on définit k qui est le premier passage par l'axe des abscisses et on associe à c' le chemin $c = ((1, 1), (x'_2, -y'_2), \dots, (x'_{k-1}, -y'_{k-1}), (x'_k, 0), (x'_{k+1}, y'_{k+1}), \dots, (x'_{p+q-1}, y'_{p+q-1}), (p + q, p - q))$ qui est un chemin allant de $(1, 1)$ à $(p + q, p - q)$ et qui croise l'axe des abscisses.

Ce procédé, appelé principe de réflexion, réalise une bijection entre les chemins allant de $(1, 1)$ à $(p + q, p - q)$ et touchant l'axe des abscisses et les chemins allant de $(1, -1)$ à $(p + q, p - q)$. Mais comme il existe, comme précédemment, $\binom{p+q-1}{p}$ chemins qui vont de $(1, -1)$ à $(p + q, p - q)$, la bijection permet d'affirmer qu'il

y a aussi $\binom{p+q-1}{p}$ chemins allant de $(1, 1)$ à $(p+q, p-q)$ et touchant l'axe des abscisses.

En passant par le complémentaire, il existe donc $a_{p,q} = \binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$ chemins allant de $(1, 1)$ à $(p+q, p-q)$ qui ne croisent pas l'axe des abscisses car un chemin qui va de $(0, 0)$ à $(p+q, p-q)$ sans croiser l'axe des abscisses est un chemin qui va de $(1, 1)$ à $(p+q, p-q)$ sans croiser l'axe des abscisses.

En considérant que tous les chemins sont équiprobables (on peut prendre les bulletins de vote dans un ordre

quelconque et de manière équiprobable), la probabilité cherchée est $\alpha = \frac{a_{p,q}}{b_{p,q}} = \frac{\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}}{\binom{p+q}{p}}$

qui vaut, comme on a $\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!} - \frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!} = \frac{(p+q-1)!(p-q)}{p!q!}$ et $\binom{p+q}{p} = \frac{(p+q)!}{p!q!} = \frac{(p+q) \cdot (p+q-1)!}{p!q!}$, plus simplement, $\alpha = \frac{p-q}{p+q}$.

Dans notre cas, comme $p = 700$ et $q = 300$, cela donne $\alpha = 0,4$.

111 ↑

112 ↓

113 a. Notons $P_k =$ "on fait pile au lancer numéro k " (le premier lancer est de numéro 1). On pose $X = +\infty$ si on ne fait pas deux fois pile au cours du processus. On a $X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X = k) = \bigcup_{i=1}^{k+1} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{P_j} \right) \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=i+1}^{k+1} \overline{P_j} \right) \cap P_{k+2} \right)$ (en notant $i \in \llbracket 1; k+1 \rrbracket$ et $k+2$ les numéros des deux lancers donnant pile). Comme ces évènements sont incompatibles et que P_1, \dots, P_{k+2} sont supposés indépendants, on a $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=1}^{k+1} \left(\prod_{j=1}^{i-1} (1-p) \right) p \left(\prod_{j=i+1}^{k+1} (1-p) \right) p = (k+1)p^2(1-p)^k$.

$\overline{(X = +\infty)} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = k)$ donc, par σ -additivité, on a $1 - \mathbb{P}(X = +\infty) = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(1-p)^k$. Or on sait

que $\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ qu'on dérive à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$. Comme $1-p \in]0; 1[$, $1 - \mathbb{P}(X = +\infty) = \frac{p^2}{(1-(1-p))^2} = 1$ donc $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

b. Par définition, X admet une espérance finie si et seulement si $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}(X = k)$ est absolument convergente.

Or $k \mathbb{P}(X = k) = k(k+1)p^2(1-p)^k \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ par croissances comparées donc $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}(X = k)$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN, ce qui prouve que X admet une espérance finie.

On dérive une fois de plus terme à terme la relation $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$ dans l'intervalle

ouvert de convergence et $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)x^{k-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)x^k = \frac{2x}{(1-x)^3}$. Ainsi,

$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)p^2(1-p)^k = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^k = \frac{2p^2(1-p)}{(1-(1-p))^3}$ car $1-p \in]0; 1[$

et on a l'espérance attendue, $\mathbb{E}(X) = \frac{2(1-p)}{p}$.

c. On suppose que la boule piochée dans l'urne l'est de manière uniforme. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ en

convenant que $Y = +\infty$ si $X = +\infty$. Comme on a vu que $(X = +\infty)$ est négligeable, $(Y = +\infty) = (X = +\infty)$ l'est aussi. Pour $k \in \mathbb{N}$, comme $((X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'évènements, par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = k | X = n)$. Or $\mathbb{P}(Y = k | X = n) = 0$ si $k > n$ et $\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \frac{1}{n+1}$ si $k \leq n$ donc $\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(n+1)p^2(1-p)^n}{n+1} = p^2 \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^n = \frac{p^2(1-p)^k}{1-(1-p)}$ (série géométrique) donc $\mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^k$.

d. Comme $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y+1 = k) = \mathbb{P}(Y = k-1) = p(1-p)^{k-1}$, la variable aléatoire $Y+1$ suit (presque sûrement) la loi géométrique de paramètre p . On sait d'après les cours que $\mathbb{E}(Y+1) = \mathbb{E}(Y) + 1 = \frac{1}{p}$ et que $\mathbb{V}(Y+1) = \mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2}$. Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1-p}{p}$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

114 Comme $\sum_{k \geq 1} \frac{X_k(\omega)}{k}$ est une série à termes positifs pour $\omega \in \Omega$, elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Ainsi, en discrétisant les majorants $M \in \mathbb{N}^*$, on a l'expression $A = \bigcup_{M=1}^{+\infty} A_M$

où $A_M = \left\{ \omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{X_k(\omega)}{k} \leq M \right\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$ avec $B_n = (S_n \leq M)$.

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, comme la suite $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion car $B_{n+1} \subset B_n$ puisque si $S_{n+1}(\omega) \leq M$, alors $S_n(\omega) \leq S_{n+1}(\omega) \leq M$. Par le théorème de continuité décroissante, on a donc $\mathbb{P}(A_M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}(X_k)}{k} = pH_n$ en posant $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ la somme partielle de la série harmonique. Par indépendance de X_1, \dots, X_n , $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{V}(X_k)}{k^2} = p(1-p)T_n$ en posant $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ la somme partielle de la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ qui converge et dont la somme est $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Comme S_n admet un moment d'ordre 2, d'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, pour tout $\varepsilon > 0$, on a la majoration $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n - pH_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)T_n}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{p(1-p)\pi^2}{6\varepsilon^2}$.

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $pH_n > M$. Pour tout $n \geq n_0$, comme $M < pH_n$, on a $(S_n \leq M) \subset (|S_n - pH_n| \geq pH_n - M)$ donc, en posant $\varepsilon = pH_n - M > 0$ dans la majoration précédente, on obtient $0 \leq \mathbb{P}(S_n \leq M) \leq \frac{p(1-p)\pi^2}{6\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)\pi^2}{6(pH_n - M)^2}$. Par encadrement, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq M) = 0$ donc $\mathbb{P}(A_M) = 0$.

Méthode 1 : par sous-additivité, comme $A = \bigcup_{M=1}^{+\infty} A_M$, on a $\mathbb{P}(A) \leq \sum_{M=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_M) = 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 0$.

Méthode 2 : Pour $M \in \mathbb{N}^*$, si la suite $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par M , elle est a fortiori majorée par $M+1$ donc $A_M \subset A_{M+1}$. Ainsi, la suite d'évènements $(A_M)_{M \in \mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion donc, par continuité croissante, on a $\mathbb{P}(A) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_M) = 0$.

115 On note qu'ici $\lambda_n \geq 0$ contrairement à ce qu'on a vu en cours où on a imposé que le paramètre d'une variable aléatoire suivant une loi de POISSON soit strictement positif. Il est donc possible, si $\lambda_n = 0$, que X_n

soit presque sûrement nulle car alors on a $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{e^{-0}0^0}{0!} = 1$ et $\forall k \geq 1, \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{e^{-0}0^k}{k!} = 0$.

On a $(S = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (X_n = 0)$ car les X_n sont à valeurs positives. Comme $(S = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = 0) \right)$ et que la suite $\left(I_n = \bigcap_{k=1}^n (X_k = 0) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, par théorème de continuité décroissante,

on a $\mathbb{P}(S = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(I_n)$. Par indépendance des X_k , $\mathbb{P}(I_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = 0) = \prod_{k=1}^n e^{-\lambda_k} = e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k}$.

On a donc deux cas :

- Si $\sum_{n \geq 1} \lambda_n$ converge, on a $\mathbb{P}(S = 0) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k\right) > 0$.
- Si $\sum_{n \geq 1} \lambda_n$ diverge, on a $\mathbb{P}(S = 0) = 0$.

Dans le cas général, pour $p \in \mathbb{N}$, en posant les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, on constate que la suite $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $\omega \in \Omega$ et que $(S \leq p) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (S_n \leq p)$. Or $((S_n \leq p))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion donc, par le théorème de continuité décroissante, $\mathbb{P}(S \leq p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq p)$.

On a vu dans le cours que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de POISSON de paramètres respectifs λ et μ , alors $X + Y$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda + \mu$.

Initialisation : X_1 suit la loi de POISSON de paramètre λ_1 par hypothèse et, avec ce qui précède, $X_1 + X_2$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que la variable aléatoire S_n suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$. Comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions, $S_n + X_{n+1} = S_{n+1}$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda + \lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi de POISSON de paramètre $\sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(S_n \leq p) = \bigsqcup_{i=0}^p (S_n = i)$ donc $\mathbb{P}(S_n \leq p) = \sum_{i=0}^p \mathbb{P}(S_n = i) = \sum_{i=0}^p \frac{\exp\left(-\sum_{k=1}^n \lambda_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^i}{i!}$ (1).

Traitons deux cas :

- Si $\sum_{k \geq 1} \lambda_k$ converge, en notant $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \in \mathbb{R}_+$, par continuité de $t \mapsto e^t$ et de $t \mapsto t^i$ pour $i \in \llbracket 0; p \rrbracket$ en S , en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1), on obtient $\mathbb{P}(S \leq p) = \sum_{i=0}^p \frac{e^{-S} S^i}{i!}$.
- Si $\sum_{k \geq 1} \lambda_k$ diverge, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^i = 1$ si $i = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^i = 0$ si $i \geq 1$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1), on obtient $\mathbb{P}(S \leq p) = 1$.

Pour avoir la loi de S , on écrit $(S = 0) = (S \leq 0)$ et, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $(S \leq p) = (S = p) \sqcup (S \leq p - 1)$ de sorte que, en traitant à nouveau deux cas :

- Si $\sum_{k \geq 1} \lambda_k$ converge, $\mathbb{P}(S = 0) = e^{-S}$ et $\mathbb{P}(S = p) = \sum_{i=0}^p \frac{e^{-S} S^i}{i!} - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{e^{-S} S^i}{i!} = \frac{e^{-S} S^p}{p!}$ si $p \in \mathbb{N}^*$.
- Si $\sum_{k \geq 1} \lambda_k$ diverge, $\mathbb{P}(S = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(S = p) = 1 - 1 = 0$ si $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans les deux cas, S suit la loi de POISSON de paramètre $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$.

116 ↓

117 ↓

118 ↓

119 a. Si p est injective, pour $x \in E$, $p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x)$ donc $p(x) = x$ par injectivité de p donc $p = \text{id}_E$.

b. Si p est surjective, soit $x \in E$, $\exists a \in E$, $x = p(a)$ d'où $p(x) = p(p(a)) = p \circ p(a) = p(a) = x$ donc $p = \text{id}_E$.

c. Si $E = \{a, b\}$ est de cardinal 2 avec $a \neq b$, soit $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$. On a bien $p(p(a)) = p(b) = p = p(a)$ et $p(p(b)) = p(b)$ donc $p \circ p = p$ et p est idempotente alors que $p \neq \text{id}_E$.

d. Si $E = \{a, b\}$ est de cardinal 2 avec $a \neq b$, parmi les $4 = 2^2$ applications de E dans E , seule $f : E \rightarrow E$ telle que $f(a) = b$ et $f(b) = a$ n'est pas idempotente, les trois autres le sont, c'est-à-dire

- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$ et
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = a$ et
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$.

e. Si $E = \{a, b, c\}$ est de cardinal 3 avec $a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$, parmi les $27 = 3^3$ applications de E dans E , les 10 qui sont idempotentes sont les applications suivantes :

- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = a$ et $p(c) = a$ avec $p(E) = \{a\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$ et $p(c) = b$ avec $p(E) = \{b\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = c$ et $p(b) = c$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{c\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$ et $p(c) = a$ avec $p(E) = \{a, b\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$ et $p(c) = b$ avec $p(E) = \{a, b\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = a$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{a, c\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = c$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{a, c\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{b, c\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = c$ et $p(b) = b$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{b, c\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{a, b, c\}$.

f. (\implies) Si l'application $p : E \rightarrow E$ est idempotente, soit $x \in p(E)$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = p(a)$, alors $p(x) = p(p(a)) = p \circ p(a) = p(a) = x$ donc x est un point fixe de p .

(\impliedby) Si $\forall x \in p(E)$, $p(x) = x$, soit $y \in E$, comme $p(y) \in p(E)$, on a $p(p(y)) = p(y)$ par hypothèse donc $p \circ p = p$ et l'application p est idempotente.

Par double implication, si $p : E \rightarrow E$, on a p idempotente si et seulement si ($\forall x \in p(E)$, $p(x) = x$).

g. Le nombre d'applications idempotentes d'un ensemble de cardinal n ne dépend que de ce cardinal, et pas de l'ensemble lui-même. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le cardinal de E (car E est non vide), $I_n = \{p : E \rightarrow E \mid p \text{ idempotente}\}$ et, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $I_{n,k} = \{p : E \rightarrow E \mid p \text{ idempotente et } \text{card}(p(E)) = k\}$. Ainsi, $I_n = \bigsqcup_{k=1}^n I_{n,k}$ car

le cardinal de l'image de E par p idempotente est forcément un entier de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Comme cette réunion est disjointe, en notant $a_n = \text{card}(I_n)$ et $a_{n,k} = \text{card}(I_{n,k})$, on a $a_n = \sum_{k=1}^n a_{n,k}$.

Protocole de choix pour les éléments p de $I_{n,k}$ avec la question précédente :

- On choisit les k éléments de $p(E)$: il y a $\binom{n}{k}$ choix.
- Pour les k éléments x de $p(E)$, on a $p(x) = x$ d'après **f.** : 1 seul choix.
- Les $n - k$ autres éléments ont pour image un des éléments de $p(E)$: k^{n-k} choix.

Ainsi, par indépendance de ces nombres de choix, on a $a_{n,k} = \binom{n}{k} k^{n-k}$.

Par conséquent, le nombre d'applications idempotentes d'un ensemble de cardinal n est $a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}$.

On vérifie bien que $a_2 = \binom{2}{1} 1^1 + \binom{2}{2} 2^0 = 3$ (voir **d.**) et $a_3 = \binom{3}{1} 1^2 + \binom{3}{2} 2^1 + \binom{3}{3} 3^0 = 10$ (voir **e.**).

120 ↑

121 ↑

122 ↑

123 a. Par définition, comme X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , sous réserve de convergence, on

a $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$. Or, pour $t \in \mathbb{R}$, la suite $(\mathbb{P}(X = n)t^n)_{n \geq 0} = \left(\frac{e^{-\lambda}(\lambda t)^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ est bornée par croissances comparées. Ainsi, le rayon de convergence de la série génératrice $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ vaut $R = +\infty$

et on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$.

b. Soit $a > 0$ et $t \geq 1$, comme $(X \geq a) = \bigsqcup_{k \geq a} (X = k)$, par σ -additivité, et car $t \geq 1$ donc $\forall k \geq a$, $t^a \leq t^k$,

on a $\mathbb{P}(X \geq a) = \sum_{k \geq a} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{t^a} \sum_{k \geq a} t^k \mathbb{P}(X = k) \leq \frac{1}{t^a} \sum_{k \geq a} t^k \mathbb{P}(X = k)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$ car

$G_X(t) = \left(\sum_{k < a} \mathbb{P}(X = k)t^k\right) + \left(\sum_{k \geq a} \mathbb{P}(X = k)t^k\right)$ et que $\sum_{k < a} \mathbb{P}(X = k)t^k \geq 0$.

c. D'après les questions précédentes, en prenant $a = 2\lambda > 0$, $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = e^{\lambda(t-1) - 2\lambda \ln(t)}$ pour

tout $t \geq 1$. Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \lambda(t-1) - 2\lambda \ln(t)$, alors f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $f'(t) = \lambda - \frac{2\lambda}{t} = \frac{\lambda(t-2)}{t}$ donc f est décroissante sur $[1; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$ et elle atteint son

minimum en $t = 2$. En prenant $t = 2$ dans la question **b.**, on a donc $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq e^{f(2)} = e^{\lambda - 2\lambda \ln(2)} = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.

124 a. Soit $B_k =$ "on tire une boule blanche ou tirage k " et $N_k = \overline{B_k} =$ "on tire une boule noire ou tirage k ".

Cas $r = 1$: il y a $N - 1$ boules blanches et une seule boule noire dans l'urne. On a $X_N(\Omega) = \llbracket 1; N \rrbracket$ dans ce cas

et, pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on a $(X_N = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap N_k$ donc, avec la formule des probabilités composées en tenant

compte de la composition de l'urne à chaque étape, $\mathbb{P}(X_N = k) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2|B_1) \times \dots \times \mathbb{P}\left(N_k \mid \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right)$

donc $\mathbb{P}(X_N = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{N-i}{N-i+1}\right) \times \frac{1}{N-k+1} = \frac{1}{N}$ après télescopage. Ainsi, X_N suit la loi uniforme sur

$$\llbracket 1; N \rrbracket \text{ et on a } \mathbb{E}(X_N) = \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}(X_N = k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2}.$$

Cas $r = N$: il n'y a que des boules noires dans l'urne : $X_N = N$ est certain, $X_N(\Omega) = \{N\}$ et $\mathbb{E}(X_N) = N$.

b. On peut modéliser cette expérience par des N -uplets comme $BNNBBNN \cdots BN$, celui-ci signifiant que la première boule tirée est Blanche, les deux suivantes Noires, etc..... sachant qu'il doit impérativement y avoir $N - r$ fois B et r fois N dans cette suite de lettres : en d'autres termes l' "évènement" $BNNBBNN \cdots BN$ est égal à $B_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap N_6 \cap N_7 \cap \cdots \cap B_{N-1} \cap N_N$. On note Ω l'ensemble des tous ces N -uplets, il y en a $\binom{N}{r}$ car il faut choisir les r tirages qui vont donner une boule noire parmi les N tirages. On prend aussi la tribu pleine $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour \mathbb{P} la probabilité uniforme (par symétrie) sur Ω . On a $X_N(\Omega) = \llbracket r; N \rrbracket$ car il faut au moins r tirages pour prendre toutes les boules noires et au plus N .

Soit $k \in \llbracket r; N \rrbracket$, alors $\mathbb{P}(X_N = k) = \frac{\text{card}((X_N = k))}{\text{card}(\Omega)}$ (loi uniforme sur Ω). Or on a $\text{card}(\Omega) = \binom{N}{r}$ et $\text{card}((X_N = k)) = \binom{r-1}{k-1}$ car il faut forcément tirer une boule noire au tirage k , des blanches à tous les tirages suivants et il faut choisir parmi les $r-1$ premiers tirages les $k-1$ tirages qui donnent une boule noire. Ainsi $\mathbb{P}(X_N = k) = \frac{\binom{r-1}{k-1}}{\binom{N}{r}} = \frac{(k-1)!(N-r)!r!}{(r-1)!(k-r)!N!} = \frac{r(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

Autre méthode : pour $k \in \llbracket r; N \rrbracket = X_N(\Omega)$, on pouvait aussi décrire, avec la définition de X_N , l'évènement $(X_N = k)$ par $(X_N = k) = \bigsqcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{r-1} \leq k-1} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{r-1} N_j \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{p \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket \\ p \notin \{i_1, \dots, i_{r-1}\}}} B_p \right) \right) \cap N_k \cap \left(\bigcap_{m=k+1}^N B_m \right)$, ce qui

fait une réunion de $\binom{k-1}{r-1}$ évènements incompatibles car il faut choisir les $r-1$ entiers i_1, \dots, i_{r-1} parmi les $k-1$ entiers de $\llbracket 1; k-1 \rrbracket$. Le premier (dans l'ordre lexicographique par exemple) de ces évènements est $U = \left(\bigcap_{j=1}^{r-1} N_j \right) \cap \left(\bigcap_{p=r}^{k-1} B_p \right) \cap N_k \cap \left(\bigcap_{m=k+1}^N B_m \right)$ et le dernier $V = \left(\left(\bigcap_{p=1}^{k-r} B_p \right) \cap \bigcap_{j=k-r+1}^{k-1} N_j \right) \cap N_k \cap \left(\bigcap_{m=k+1}^N B_m \right)$.

Pour le premier de ces deux évènements, avec la formule des probabilités composées, on obtient la relation $\mathbb{P}(U) = \left(\prod_{j=1}^{r-1} \frac{r-j+1}{N-j+1} \right) \times \left(\prod_{p=r}^{k-1} \frac{N-p}{N-p+1} \right) \times \frac{1}{N-k+1} \times \left(\prod_{m=k+1}^N \frac{N-m+1}{N-m+1} \right) = \frac{r!(N-r)!}{N!}$. Pour le second,

$\mathbb{P}(V) = \left(\prod_{p=1}^{k-r} \frac{N-r-p+1}{N-p+1} \right) \times \left(\prod_{j=k-r+1}^{k-1} \frac{k-j+1}{N-j+1} \right) \times \frac{1}{N-k+1} \times \left(\prod_{m=k+1}^N \frac{N-m+1}{N-m+1} \right) = \frac{r!(N-r)!}{N!}$. On

se rend compte que pour chacun des évènements dont $(X_N = k)$ est la réunion incompatible, on va avoir les mêmes dénominateurs allant en décroissant de N à 1 et les mêmes numérateurs mais pas dans le même ordre. Comme tous ces évènements ont pour probabilité $\frac{r!(N-r)!}{N!}$ et qu'ils sont au nombre de $\binom{k-1}{r-1}$, il

vient $\mathbb{P}(X_N = k) = \binom{k-1}{r-1} \times \frac{r!(N-r)!}{N!} = \frac{r(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

c. Par définition, $\mathbb{E}(X_N) = \sum_{k=r}^N k \mathbb{P}(X_N = k) = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N k \binom{k-1}{r-1} = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N r \binom{k}{r}$ avec la formule du

capitaine, ce qui se simplifie avec la formule des colonnes en $\mathbb{E}(X_N) = \frac{\binom{N+1}{r+1}}{\binom{N}{r}} = \frac{r(N+1)}{r+1} < N$ comme il

se doit. La formule est aussi valable pour les cas limites $r = 1$ et $r = N$ de la question **a.**

125 a. Comme S est symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles par le théorème spectral. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_S(\lambda) = (\lambda - X)^2 - Y^2 = (\lambda - X + Y)(\lambda - X - Y)$ donc $\text{Sp}(S) = \{X - Y, X + Y\}$ donc, puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ par définition donc $Y > 0$, il vient $\lambda = X - Y$ et $\mu = X + Y$.

b. S est inversible si et seulement si $\det(S) = X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y) = 0$ donc, puisque $X + Y > 0$, S est inversible si et seulement si $X \neq Y$. Ainsi, $(S \notin \text{GL}_2(\mathbb{N}^*)) = (X = Y) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X = k, Y = k)$ et, puisque ces évènements sont incompatibles et que X et Y sont indépendants et de même loi, par σ -additivité et car $|1 - p| < 1$, on a $\mathbb{P}(S \notin \text{GL}_2(\mathbb{N}^*)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^j = \frac{p^2}{1 - (1-p)^2}$ simplifié en $\mathbb{P}(S \notin \text{GL}_2(\mathbb{N}^*)) = \frac{p}{2-p}$. Ainsi, $\mathbb{P}(S \in \text{GL}_2(\mathbb{N}^*)) = 1 - \mathbb{P}(S \notin \text{GL}_2(\mathbb{N}^*)) = 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}$.

c. On sait d'après le cours que S , étant déjà symétrique réelle, est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives donc $(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = (\lambda > 0) = (X > Y) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X > k, Y = k)$ car on a toujours $\mu > 0$. À nouveau, par incompatibilité de ces évènements et indépendance de X et Y , par σ -additivité, on a $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} (1-p)^k$ qui se calcule comme à la question précédente, $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k-1} = \frac{p(1-p)}{1 - (1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$.

Il est logique de trouver $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(S \in \text{GL}_2(\mathbb{N}^*))$ car $(\lambda < 0)$ et $(\lambda > 0)$ sont deux évènements de même probabilité par symétrie entre X et Y .

126 ↑

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 9

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

127 a. Comme φ est continue sur \mathbb{R} , cette équation différentielle linéaire normalisée d'ordre 2 vérifie les hypothèses du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Pour tout $(t_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$. Ainsi, en prenant $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $y'_0 = 1$, il existe une unique solution $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E) telle que $y_1(0) = 0$ et $y'_1(0) = 1$. De même, en prenant $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $y'_0 = 0$, il existe une unique solution $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E) telle que $y_2(0) = 1$ et $y'_2(0) = 0$. En notant S l'ensemble des solutions réelles de (E) définies sur \mathbb{R} , on a vu dans le cours que S est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que l'application $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\theta(y) = (y(0), y'(0))$ est linéaire et bijective d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Ainsi, $\dim(S) = 2$ car θ est un isomorphisme de S dans \mathbb{R}^2 . Si $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$ (R) avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, en évaluant (R) et sa dérivée en 0, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc (y_1, y_2) est libre. Par conséquent, (y_1, y_2) est une base de S et on a donc $S = \text{Vect}(y_1, y_2)$.

b. Comme f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} par hypothèse, g l'est aussi par opérations. De plus, pour tout réel x , on a $g'(x) = f'(x + 2\pi)$ et $g''(x) = f''(x + 2\pi)$ donc, comme φ est 2π -périodique, on obtient la relation $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + \varphi(x)g(x) = f''(x + 2\pi) + \varphi(x + 2\pi)f(x + 2\pi) = 0$ car $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et que f est solution de (E) sur \mathbb{R} . Ainsi, g est aussi solution de (E) sur \mathbb{R} .

c. On vient de montrer que ψ envoie toute fonction $f \in S$ sur $\psi(f) = g \in S$. La linéarité de ψ est claire donc ψ est un endomorphisme de S . Soit $f \in \text{Ker}(\psi)$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x + 2\pi) = 0$ donc, comme $x \mapsto x + 2\pi = y$ est surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , il vient $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = 0$ donc $f = 0$. Ainsi, ψ est injective, et comme S est de dimension finie, ψ est un automorphisme de S .

d. La fonction $z_1 = \psi(y_1) : x \mapsto y_1(x + 2\pi)$ appartient à S d'après la question précédente et $z_1(0) = y_1(2\pi)$ et $z'_1(0) = y'_1(2\pi)$ donc $\theta(z_1) = (y_1(2\pi), y'_1(2\pi)) = y_1(2\pi)(1, 0) + y'_1(2\pi)(0, 1) = y_1(2\pi)\theta(y_2) + y'_1(2\pi)\theta(y_1)$ ce qui montre, par linéarité et bijectivité de θ , que $z_1 = y'_1(2\pi)y_1 + y_1(2\pi)y_2$. De même, on obtient la relation $z_2 = \psi(y_2) = y'_2(2\pi)y_1 + y_2(2\pi)y_2$ car ces deux fonctions sont solutions de (E) avec les mêmes conditions initiales. Par conséquent, la matrice de ψ dans la base (y_1, y_2) de S est $A = \begin{pmatrix} y'_1(2\pi) & y'_2(2\pi) \\ y_1(2\pi) & y_2(2\pi) \end{pmatrix}$.

Comme $\chi_A = \chi_\psi = \begin{vmatrix} X - y'_1(2\pi) & -y'_2(2\pi) \\ -y_1(2\pi) & X - y_2(2\pi) \end{vmatrix} = X^2 - (y'_1(2\pi) + y_2(2\pi))X + (y'_1(2\pi)y_2(2\pi) - y'_2(2\pi)y_1(2\pi))$, les valeurs propres de ψ sont les racines de χ_A . Ainsi, si λ est une valeur propre de ψ , λ est solution de l'équation polynomiale (P) : $x^2 - (y'_1(2\pi) + y_2(2\pi))x + (y'_1(2\pi)y_2(2\pi) - y'_2(2\pi)y_1(2\pi)) = 0$.

128 ↓

129 a. La surface S est définie implicitement par $S : F(x, y, z) = 0$ avec $F(x, y, z) = f(x, y) - z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z$. La fonction f est de classe C^1 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et, de même, F est de classe C^1 par opérations sur

$(\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R}$. Comme $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z) = \left(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}, -1\right) \neq (0, 0, 0)$, la surface S n'admet que des points réguliers donc $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)(z-c) = 0$ est une équation du plan tangent P à S en $(a, b, c) \in S$. Ceci se simplifie en $P : \left(b - \frac{1}{a^2}\right)(x-a) + \left(a - \frac{1}{b^2}\right)(y-b) - (z-c) = 0$.

b. Comme la fonction f est de classe C^1 l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, si elle admet en un point $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ un extremum local, c'est forcément en un point critique de f d'après le cours. Or, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $\nabla f(x, y) = \left(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}\right) = (0, 0) \iff (yx^2 = xy^2 = 1)$. Or si $yx^2 = xy^2 = 1$, on a $\frac{yx^2}{xy^2} = \frac{x}{y} = 1$ donc $x = y$ et $x^3 = 1$ impose $x = 1$ donc $y = 1$. Comme réciproquement, si $x = y = 1$, on a bien $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, le seul point critique de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est $(1, 1)$.

Or $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = t$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = 1$ donc la hessienne de f en $(1, 1)$ est la matrice $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et elle est symétrique (normal avec le théorème de SCHWARZ car f est de classe C^2 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$) et elle est définie positive car $\chi_H = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ donc $\text{Sp}(H) = \{1, 3\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f admet en $(1, 1)$ son unique extremum local et c'est un minimum local.

c. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de K qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n \leq 3$, $x_n \geq \frac{1}{3}$ et $y_n \geq \frac{1}{3}$ par définition de K donc, en passant à la limite dans ces inégalités larges, on a $xy \leq 3$, $x \geq \frac{1}{3}$ et $y \geq \frac{1}{3}$ donc $(x, y) \in K$. Ainsi, K est fermé. De plus, si $(x, y) \in K$, on a $x = \frac{xy}{y} \leq \frac{3}{1/3} = 9$ et $y = \frac{xy}{x} \leq \frac{3}{1/3} = 9$ donc K est borné.

d. Comme K est un fermé borné en dimension finie et que f est continue sur K , f admet un minimum absolu sur K par le théorème des bornes atteintes. Comme $(1, 1) \in K$, $\text{Min}_K(f) \leq f(1, 1) = 3$. Mais f est strictement supérieure à 3 sur la frontière de K . En effet, K est un sorte de triangle avec un bord hyperbolique :

- Si $(x, y) \in K$ vérifie $xy = 3$, on a $f(x, y) = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 3$.
- Si $(x, y) \in K$ vérifie $x = \frac{1}{3}$, on a $f(x, y) = xy + 3 + \frac{1}{y} > 3$.
- Si $(x, y) \in K$ vérifie $y = \frac{1}{3}$, on a $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + 3 > 3$.

Ainsi le minimum de f sur K est atteint à l'intérieur de K donc en un point critique or il n'en existe qu'un. Par conséquent, f atteint son minimum sur K en $(1, 1)$ et $\text{Min}_K(f) = f(1, 1) = 3$.

Maintenant, pour un point $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a deux possibilités :

- Si $(x, y) \in K$, d'après ce qui précède, $f(x, y) \geq \text{Min}_K(f) = f(1, 1) = 3$.
- Si $(x, y) \notin K$, on a $f(x, y) > 3$ en distinguant selon que $xy > 3$ ou $x < \frac{1}{3}$ ou $y < \frac{1}{3}$.

Par conséquent, $\text{Min}_{(\mathbb{R}_+^*)^2}(f) = \text{Min}_K(f) = f(1, 1) = 3$ et f admet un unique minimum absolu en $(1, 1)$.

130 ↓

131 ↑

132 ↓

133 ↓

134 ↓

135 ↑

136 a. Dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 3 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de GAUSS $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ et, par linéarité

du déterminant par rapport à la première colonne, $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ X & X-2 & 1 \\ X & -1 & X-2 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$ puis on

effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ pour avoir $\chi_A = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2)$. χ_A est scindé

à racines simples sur \mathbb{R} donc A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont simples donc $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des droites. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

donc $E_0(A) = \text{Vect}(v_1)$, $E_1(A) = \text{Vect}(v_2)$ et $E_2(A) = \text{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b. Le système (S) s'écrit matriciellement $X'' = AX$ si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Comme $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente, on a l'équivalence, en posant $Y = P^{-1}X$, Y étant C^1 si et seulement si X l'est : $X'' = AX \iff X'' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X'' = (P^{-1}X)'' = D(P^{-1}X) \iff Y'' = DY$.

En notant $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $Y'' = DY \iff (a'' = 0, b'' = b \text{ et } c'' = 2c)$. Ces trois équations différentielles linéaires linéaires du second ordre à coefficients et sans second membre se résolvent facilement et $Y'' = DY$ équivaut à $\exists (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R}^6, \forall t \in \mathbb{R}, a(t) = \alpha_1 t + \alpha_2, b(t) = \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t}, c(t) = \gamma_1 e^{\sqrt{2}t} + \gamma_2 e^{-\sqrt{2}t}$.

Avec les équivalences précédentes, (x, y, z) vérifie (S) si et seulement s'il existe $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R}^6$

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = a(t) + b(t) + c(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 + \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t} + \gamma_1 e^{\sqrt{2}t} + \gamma_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y(t) = a(t) + 2b(t) + 3c(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 + 2\beta_1 e^t + 2\beta_2 e^{-t} + 3\gamma_1 e^{\sqrt{2}t} + 3\gamma_2 e^{-\sqrt{2}t} \text{ car } X = PY. \\ z(t) = a(t) + b(t) - c(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 + \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t} - \gamma_1 e^{\sqrt{2}t} - \gamma_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{cases}$$

137 ↑

138 a. On décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{t(t^2-1)}$ en éléments simples sachant que ses pôles sont $-1, 0, 1$, que

son degré vaut $-3 < 0$ et qu'elle est déjà sous forme irréductible. Il existe donc trois constantes a, b, c réelles telles que $\forall t \notin \{-1, 0, 1\}, \frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$. Par identification, la technique classique ou l'astuce

habituelle $2 = 2t^2 + 2(1-t^2)$ ce qui donne $\frac{2}{t(1-t^2)} = \frac{2t^2 + 2(1-t^2)}{t(1-t^2)} = \frac{2t}{1-t^2} + \frac{2}{t} = \frac{t+1-(1-t)}{(1-t)(1+t)} + \frac{2}{t}$,

on obtient $\frac{2}{t(1-t^2)} = \frac{2}{t} + \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}$.

a. L'équation (E) peut être mise sous forme normalisée sur les intervalles $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1; 0[$, $I_3 =]0; 1[$ et $I_4 =]1; +\infty[$. On retient que $\frac{2}{t(1-t^2)} = \frac{2t}{1-t^2} + \frac{2}{t}$ et, comme une primitive de $a : t \mapsto \frac{2t}{1-t^2} + \frac{2}{t}$

est $A : t \mapsto 2 \ln(|t|) - \ln(|1 - t^2|)$ sur chacun des ces intervalles, les solutions de l'équation homogène $(E_0) : t(t^2 - 1)y' + 2y = 0$ sur chacun des I_k sont les fonctions $y : t \mapsto \frac{\lambda t^2}{t^2 - 1}$ (les valeurs absolues sont absorbées par la constante λ qui parcourt \mathbb{R}).

On fait ensuite varier la constante en cherchant une solution particulière de (E) sous la forme $y : t \mapsto \frac{\lambda(t)t^2}{t^2 - 1}$ avec $\lambda : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. En substituant, on trouve $\lambda'(t) = \frac{1}{t}$ et on prend par exemple $\lambda = \ln(|t|)$ pour avoir comme solution particulière $y_0 : t \mapsto \frac{t^2 \ln(|t|)}{t^2 - 1}$ sur chacun des I_k .

Par théorème de structure, comme l'équation (E) est linéaire, les solutions de (E) sur chaque I_k sont les $y_\lambda : t \mapsto \frac{t^2(\lambda + \ln(|t|))}{t^2 - 1}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$: cet ensemble de solutions est une droite affine.

b. Raccord en 0, analyse : si y est une solution de (E) sur $] - 1; 1[$, ses restrictions à I_2 et I_3 sont des solutions de (E) sur ces deux intervalles donc, d'après la question précédente, il existe des réels λ_2 et λ_3 tels que $\forall t \in] - 1; 0[= I_2, y(t) = \frac{t^2(\lambda_2 + \ln(|t|))}{t^2 - 1}$ et $\forall t \in]0; 1[= I_3, y(t) = \frac{t^2(\lambda_3 + \ln(|t|))}{t^2 - 1}$. On a forcément $y(0) = 0$ (en remplaçant t par 0 dans (E) par exemple ou par prolongement).

Raccord en 0, synthèse : réciproquement, pour $(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2$, si la fonction $y :] - 1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\forall t \in] - 1; 0[, y(t) = \frac{t^2(\lambda_2 + \ln(|t|))}{t^2 - 1}$ et $\forall t \in]0; 1[, y(t) = \frac{t^2(\lambda_3 + \ln(|t|))}{t^2 - 1}$ et $y(0) = 0$, y est de classe C^∞ sur $I_2 \cup I_3$ par opérations et y est continue en 0 par croissances comparées car $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 \ln(|t|) = 0$ et y est aussi dérivable en 0 car $y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = 0$ car on a aussi $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln(|t|) = 0$ par croissances comparées, et ceci quelles que soient les constantes λ_2 et λ_3 . Comme y est solution de (E) en 0, sur I_2 et sur I_3 , y est bien solution de (E) sur $] - 1; 1[$.

Raccord en 0, conclusion : les solutions de (E) sur $] - 1; 1[$ sont de la forme précédente. L'espace affine $S_{2,3}$ des solutions de (E) sur $] - 1; 1[$ est de dimension 2 car les fonctions y solutions de (E) sur $] - 1; 1[$ s'écrivent $y = y_0 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$ où $y_2 :] - 1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\forall t \in] - 1; 0[, y_2(t) = \frac{t^2}{t^2 - 1}$ et $\forall t \in]0; 1[, y_2(t) = 0$ et $y_3 :] - 1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\forall t \in] - 1; 0[, y_3(t) = 0$ et $\forall t \in]0; 1[, y_3(t) = \frac{t^2}{t^2 - 1}$; $S_{2,3} = y_0 + \text{Vect}(y_2, y_3)$.

Raccord en 1, analyse : si y est une solution de (E) sur $]0; +\infty[$, alors il existe des réels λ_3 et λ_4 tels que $\forall t \in]0; 1[, y(t) = \frac{t^2(\lambda_3 + \ln(t))}{t^2 - 1}$ et $\forall t \in]1; +\infty[, y(t) = \frac{t^2(\lambda_4 + \ln(t))}{t^2 - 1}$. Or on doit avoir $y(1) = \frac{1}{2}$ en remplaçant t par 1 dans (E) et la continuité de y en 1 impose que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ car $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2}{t^2 - 1} = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 \ln(t)}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}$ car $\frac{t^2 \ln(t)}{t^2 - 1} \underset{1}{\sim} \frac{t^2(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{t^2}{t+1} \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}$.

Raccord en 1, synthèse : réciproquement, $y_0 :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \neq 1, y_0(t) = \frac{t^2 \ln(t)}{t^2 - 1}$ et $y_0(1) = \frac{1}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par opérations et, pour $t > 0$ et $t \neq 1$, $\frac{y_0(t) - y_0(1)}{t - 1} = \frac{2t^2 \ln(t) - (t^2 - 1)}{2(t-1)^2(t+1)}$ donc $\frac{y_0(t) - y_0(1)}{t - 1} = \frac{2(1+u)^2 \ln(1+u) - u(u+2)}{2u^2(u+2)} \underset{0}{=} \frac{2(1+2u + o(u))(u - (u^2/2) + o(u^2)) - 2u - u^2}{2u^2 + o(u^2)}$ en posant $u = t - 1$ et il vient $\frac{y_0(1+u) - y_0(1)}{u} \underset{0}{=} \frac{2(1+2u + o(u))(u - (u^2/2) + o(u^2)) - 2u - u^2}{2u^2 + o(u^2)} \underset{0}{\sim} \frac{2u^2}{u^2} = \frac{1}{2}$ donc y_0 est aussi dérivable en 1. De plus, y_0 est solution de (E) sur $]0; +\infty[$ car elle l'est d'après la question

précédente sur I_3 et I_4 et que la relation est vraie pour $t = 1$.

Raccord en 1, conclusion : l'espace affine $S_{3,4}$ des solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ est de dimension 0 car on vient de voir que seule y_0 était solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* , donc que $S_{3,4} = \{y_0\} = y_0 + \{0\}$.

Raccord en -1 : pour ne pas avoir à tout refaire, pour un intervalle I de \mathbb{R} , on pose $-I = \{-t \mid t \in I\}$ et, pour $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, on pose $z : -I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall u \in -I, z(u) = y(-u)$. Alors z est aussi dérivable par opérations et, si y est solution de (E) sur I , on a $\forall u \in -I, (-u)((-u)^2 - 1)y'(-u) + 2y(-u) = (-u)^2$ donc $u(u^2 - 1)z'(u) + 2z(u) = u^2$ et z est solution de (E) sur $-I$. Comme $-(-I) = I$, on a la réciproque par symétrie. Ainsi, raccorder les solutions revient à les raccorder en 1, les graphes des solutions sur $-I$ étant les symétriques orthogonalement par rapport à la droite (Oy) . D'après le cas précédent, la seule solution de (E) sur $] -\infty; 0[= -]0; +\infty[$ est $z_0 : \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall u \in \mathbb{R}_-^*, z_0(u) = y_0(-u) = \frac{(-u)^2 \ln(-u)}{(-u)^2 - 1} = \frac{u^2 \ln(|u|)}{u^2 - 1}$.

Ainsi, l'espace affine $S_{1,2}$ des solutions de (E) sur $] -\infty; 0[$ est de dimension 0 car on vient de voir que seule z_0 était solution de (E) sur \mathbb{R}_-^* , donc que $S_{1,2} = \{z_0\} = z_0 + \{0\}$.

Solutions sur \mathbb{R} : avec ce qui précède, la seule solution de (E) sur \mathbb{R} est la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t^2 \ln(|t|)}{t^2 - 1}$ si $t \notin \{-1, 0, 1\}$, $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$.

139 a. Comme $g : t \mapsto f(2t)$ et $h : t \mapsto tf(2t)$ sont continues sur \mathbb{R} , par le théorème fondamental de l'intégration, les fonctions $G : x \mapsto \int_0^x f(2t)dt$ et $H : x \mapsto \int_0^x tf(2t)dt$ sont de classe C^1 car elles sont respectivement les primitives de g et h qui s'annulent en 0. Or, $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 1 + xG(x) - H(x)$ (1) donc $x \mapsto f(2x)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} par opérations, ce qui justifie que f est elle-même de classe C^1 sur \mathbb{R} . D'ailleurs, on peut montrer facilement par une récurrence simple que f est alors de classe C^∞ sur \mathbb{R} . En dérivant (1), on a $2f'(2x) = G(x) + xG'(x) - H'(x) = G(x) + xf(2x) - xf(2x) = \int_0^x f(2t)dt$. En remplaçant $2x$ par x , on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x/2} f(2t)dt$.

b. Comme $f'(x) = \frac{1}{2}G\left(\frac{x}{2}\right)$ et que G est de classe C^1 sur \mathbb{R} , la fonction f est de classe C^2 et, en dérivant une fois de plus, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{4}G'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{4}$. Ainsi, f est une solution réelle sur \mathbb{R} de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants (E) : $4y'' - y = 0$.

c. Les solutions de l'équation caractéristique $4z^2 - 1 = 0$ sont $\pm \frac{1}{2}$ donc les solutions réelles de (E) sont les $y : x \mapsto A \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Or $f(0) = 1$ grâce à la relation de l'énoncé et $f'(0) = \frac{1}{2}G\left(\frac{0}{2}\right) = 0$ donc $A = 1$ et $B = 0$. Si f vérifie les conditions de l'énoncé, $f : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$. Pour la réciproque :

Méthode 1 : la fonction $f : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien continue sur \mathbb{R} et à valeurs réelles et, en posant les fonctions $u : t \mapsto x - t$ et $v : t \mapsto -\operatorname{sh}(t)$ qui sont de classe C^1 sur $[\widetilde{0}; x]$, par intégration par parties, on a la relation $\int_0^x (x - t)\operatorname{ch}(t)dt = 0 + \int_0^x \operatorname{sh}(t)dt = [\operatorname{ch}(t)]_0^x = \operatorname{ch}(x) - 1 = f(2x) - 1$ ce qui montre bien que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 1 + \int_0^x (x - t)f(2t)dt$.

Méthode 2 : la fonction $f : x \mapsto \text{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ est continue sur \mathbb{R} et à valeurs réelles et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - \frac{f(x)}{4} = 0$ donc $\left(f'(x) - \frac{1}{2} \int_0^{x/2} f(2t) dt\right)' = 0$ d'après ce qui précède. Comme $f'(x) - \frac{1}{2} \int_0^{x/2} f(2t) dt$ s'annule pour $x = 0$, sur l'intervalle \mathbb{R} , on a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \frac{1}{2} \int_0^{x/2} f(2t) dt = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \left(f(2x) - 1 - \int_0^x (x-t)f(2t) dt\right)' = 0$ et, comme \mathbb{R} est un intervalle et que $f(2 \cdot 0) = 1 + \int_0^0 (0-t)f(2t) dt$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t) dt$.

Conclusion : la seule fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t) dt$ est donc la fonction $f : x \mapsto \text{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$.