



PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2024 / 2025



EXERCICES PAR THÈME

- 1 : intégrales et analyse (10 exercices : 1-10)page 4
- 2 : algèbre linéaire et générale (6 exercices : 11-16)page 6
- 3 : séries numériques, séries de fonctions, séries entières (24 exercices : 17-40) page 8
- 4 : espaces vectoriels normés (8 exercices : 41-48) page 14
- 5 : réduction des endomorphismes (22 exercices : 49-70) page 16
- 6 : théorèmes de domination (9 exercices : 71-79) page 22
- 7 : espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens (24 exercices : 80-103) page 24
- 8 : probabilités et variables aléatoires (23 exercices : 104-126).....page 30
- 9 : équations différentielles et calcul différentiel (13 exercices : 127-139) page 36

EXERCICES PAR CONCOURS

- 1 : X (4 exercices)
numéros 1, 11, 80, 127
- 2 : ENS Cachan / Rennes (8 exercices)
numéros 41, 49-51, 81-82, 104-105
- 3 : Centrale Maths 1 (30 exercices)
numéros 2-4, 12-13, 17-18, 42-43, 52-53, 71-72, 83-88, 106-109, 128-132
- 4 : Mines (58 exercices)
numéros 5-9, 14-15, 21-29, 44-47, 54-62, 73-78, 89-97, 110-120, 133-135
- 5 : CCINP (26 exercices)
numéros 10, 30-35, 48, 63-68, 79, 98-101, 121-124, 136-138
- 6 : Mines-Télécom (13 exercices)
numéros 16, 36-40, 69-70, 102-103, 125-126, 139

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 1

INTÉGRALE ET ANALYSE

1 X PSI 2024 Jules Campistron II

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = q > 0$.

- a. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\psi :]-\alpha; \beta[\rightarrow]-\alpha; \beta[$ tels que $\forall x \in]-\alpha; \beta[$, $f(x) = -f(\psi(x))$.
- b. Montrer que ψ est de classe C^1 .

2 Centrale Maths1 PSI 2024 Jules Campistron

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0\}$.

Soit $f \in E$, on définit l'équation différentielle $(E_f) : y' - y + f(x) = 0$.

- a. Montrer que E est un espace vectoriel.
- b. Montrer que la fonction $g : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) appartenant à E .

3 Centrale Maths1 PSI 2024 Mathis Laruelle

On définit la fonction f par $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t) dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition de f .

On pose maintenant $\Phi(x) = x f(x) f(x-1)$.

- b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi(x+1) = \Phi(x)$.
- c. Montrer que $x \mapsto \frac{\Phi(x)}{x}$ est décroissante.
- d. Montrer que Φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- e. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

4 Centrale Maths1 PSI 2024 Arya Tabrizi

- a. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$ ou $z = 0$.
- b. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.
- c. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Soit $(z, z_0) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$, une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ converge. On définit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_0^x e^{-z_0 t} f(t) dt$.

- d. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle y est bornée.
- e. Montrer que $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- f. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ converge et qu'on a $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$.

Questions supplémentaires :

- rappeler la formule de TAYLOR reste intégral.
- rappeler l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE.

5 Mines PSI 2024 Armand Dépée II

Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) dx$ et calculer sa valeur.

6 Mines PSI 2024 Jonathan Filocco I

- Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge. On pose $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.
- Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .
- Montrer que $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Effectuer une intégration par parties pour améliorer la majoration de la question précédente.
- Est-ce que f est intégrable sur $]0; +\infty[$?
- Calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ en fonction de J .

7 Mines PSI 2024 Nathan Jung I

- Montrer que la fonction $I : x \mapsto \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) d\theta$ est bien définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Donner une expression simplifiée de $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 \right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire la valeur de $I(x)$ pour $x \in D$.

8 Mines PSI 2024 Antoine Métayer II

Soit $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N(s) = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} \right) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$ et, en cas d'existence, $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(s)$.

- Montrer que $\zeta(s)$ est bien définie si $\operatorname{Re}(s) > 1$.
- Montrer que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} = \int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt$.
- Si $\operatorname{Re}(s) > 0$, après avoir justifié l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^s} - \frac{1}{[t]^s} \right) dt$, montrer que $\zeta(s)$ existe et qu'on a $\zeta(s) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[t]^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt + \frac{1}{s-1}$.

9 Mines PSI 2024 Antoine Vergnenègre II

- Soit $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^1 , convexe et décroissante, montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} ty'(t) = 0$.
- Soit $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fois dérivable telle que $y'' = qy$. Montrer l'équivalence suivante : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0 \iff \int_0^{+\infty} tq(t) dt$ diverge.

10 CCINP PSI 2024 Yasmine Azzaoui I

- Montrer que f définie par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.
- Montrer que $\forall x > 0, f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.
- Montrer que $\forall x > 0, f(x) = -e^{-x} \ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 2

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

11 X PSI 2024 Guilhem Thébaud I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un ensemble non vide et une famille $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^I$ telle que $\forall i \in I, A_i^2 = I_n$ et $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille finie et donner une majoration de son cardinal.

12 Centrale Maths1 PSI 2024 Armand Coiffe

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire G de F dans E .

Soit $t \in]0; 1[$ et $\varphi_t : f \mapsto g$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - f(tx)$.

c. Montrer que φ_t est un endomorphisme injectif de F .

d. Soit $(f, g) \in F^2$ tel que $g = \varphi_t(f)$. Montrer que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$. Conclure.

e. Déterminer toutes les fonctions $f \in F$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x$.

13 Centrale Maths1 PSI 2024 Adrien Saignac

Soit $E = \mathbb{K}[X]$, $u : P \in E \rightarrow P(X+1)$ et $v = u - \text{id}_E$.

a. Montrer que v est un endomorphisme de E et que $\forall P \in E, \forall n \in \mathbb{N}, v^n(P) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$.

b. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p+1, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0$.

c. Que vaut $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?

d. Déterminer $\text{Ker}(v)$. Est-ce que v est injective ?

e. Est-ce que v est surjective ?

14 Mines PSI 2024 Amélia Arangoits II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X-k)$.

15 Mines PSI 2024 Edward Bauduin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Par exemple, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On appelle permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ une bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ et on note d_n le nombre de dérangements de $\llbracket 1; n \rrbracket$, un dérangement étant une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sans point fixe. On prend par convention $d_0 = 1$.

On note p_n la probabilité d'obtenir un dérangement si on prend une permutation au hasard.

a. Déterminer A_n^{-1} . Indication : trouver $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $A_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$.

c. Trouver une relation entre $A_n^T, (0! \ 1! \ \dots \ (n-1)! \ n!)^T$ et $(d_0 \ d_1 \ \dots \ d_n)^T$.

d. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

e. Déterminer p_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

16 Mines-Télécom PSI 2024 Mathéo Demongeot-Marais II

Soit E un espace de dimension n et p un projecteur de E . On pose $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ p = -p \circ f\}$.

a. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

b. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f .

c. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que l'application induite par f sur $\text{Im}(p)$ est l'application nulle.

d. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 3

SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

17 Centrale Maths1 PSI 2024 Émile Gauvrit

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $a_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (\alpha + k)}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{k} \right) \right) - \alpha \ln(n)$.

- a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- b. Montrer que $\sum_{n \geq 2} (v_n - v_{n-1})$ converge.
- c. En déduire l'existence de $\lambda > 0$ tel que $a_n \sim_{+\infty} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.
- d. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $x = \pm R$.

18 Centrale Maths1 PSI 2024 Lucie Girard

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- a. Montrer la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$, c'est-à-dire l'existence du réel S .
- b. Quel est le domaine de définition D de la fonction $I : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1}$?
- c. Donner une expression simple de $I(x)$ pour certains x et en déduire la valeur de S .
- d. Calcul de $\int_0^1 I(x) dx$ de deux manières différentes.

19 Centrale Maths1 PSI 2024 Mathias Pisch

a. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$.

b. Montrer que F est définie et développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner son développement.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\operatorname{Re} \left(\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt \right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$.

d. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de F en $+\infty$.

20 Centrale Maths1 PSI 2024 Eva Rojo

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{1 + \sin(2\pi nx)}{1 + n^2 x^2}$.

- a. Tracer le graphe de la fonction f_5 .
- b. Que dire quant à la convergence simple ou uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+^*$?
- c. Que dire quant à la convergence simple ou uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

Questions supplémentaires :

- Donner la définition de $f^{-1}(A)$ avec $f : E \rightarrow F$ et $A \subset F$.
- Est-ce que $f : x \mapsto \int_0^1 \cos(xt) dt$ est continue sur $\mathbb{R}$?

21 Mines PSI 2024 Amélia Arangoits I

Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \geq 1, x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}$.

- a. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
- b. Montrer que $\forall n \geq 2, x_n \geq n$. En déduire que $x_n \sim_{+\infty} n$.
- c. Montrer qu'il existe un réel c tel que $x_n = n + c + o(1)$.
- d. Montrer que $c = 0$.

22 Mines PSI 2024 Yasmine Azzaoui I

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$.

23 Mines PSI 2024 Edward Bauduin II

- a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière au voisinage de 0.
- b. Que dire du rayon de convergence du développement de la question précédente ?

24 Mines PSI 2024 Axel Corbière I

On appelle involution d'un ensemble E toute application $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = \text{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ et $I_n = \text{card}(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
- b. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq 1$.

On définit $\varphi :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

- c. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[, \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.
- d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
- e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

25 Mines PSI 2024 Tiago Genet II

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0, f_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} \right)$.

Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

26 Mines PSI 2024 Valentine Girard I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un carré quadrillé avec $(n+1)^2$ cases numérotées $(x, y) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$. On cherche à aller de la case $(0, 0)$ à la case (n, n) avec pour seuls déplacements autorisés les mouvements $(0, 1)$ et $(1, 0)$ (vers la droite ou vers en haut).

a. Déterminer le nombre c_n de chemins possibles (avec ces contraintes) pour aller de $(0, 0)$ à (n, n) .

On note d_n le nombre de chemins qui vont de $(0, 0)$ à (n, n) (avec ces contraintes) mais en restant toujours au-dessus (au sens large) de la diagonale $x = y$. Par convention, on pose $d_0 = 1$. En cas de convergence,

pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$.

b. Calculer d_1, d_2, d_3 .

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \sum_{k=0}^n d_k d_{n-k}$.

d. Justifier que $0 \leq d_n \leq \binom{2n}{n}$. Minorer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} d_n x^n$.

e. Donner une relation entre $xf(x)^2$ et $f(x)$ pour $x \in]-R; R[$.

f. En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. Que vaut R ?

g. Donner une expression de d_n en fonction de n .

h. Si tous les chemins allant de $(0, 0)$ à (n, n) sont équiprobables, quelle est la probabilité p_n qu'un chemin reste au-dessus de la diagonale ?

27 Mines PSI 2024 Lou Goiffon II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas d'existence, on note $f(x) = e^{-2x^2} \int_0^x e^{2t^2} dt$.

a. Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

b. Expliciter le développement en série entière de f .

c. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

28 Mines PSI 2024 Jasmine Meyer I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$. On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$?

c. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d. Donner un équivalent simple de $S(x)$ quand x tend vers 0. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

e. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.

f. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$?

29 Mines PSI 2024 Guilhem Thébault II

Soit $r \in]0; \frac{1}{2}[$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, on pose alors $x(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n r^n$.

Montrer que l'application x ainsi construite est injective.

30 CCINP PSI 2024 Amélia Arangoits I

Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S selon les valeurs de a .

Dans la suite de l'exercice, on impose $|a| < 1$.

b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$ pour $x > 0$.

d. Trouver un équivalent de S en 0.

e. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

f. Trouver un équivalent de S en $+\infty$.

31 CCINP PSI 2024 Amjad Belmiloud II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin(nx e^{-nx^2})$.

a. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.

b. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a; 1]$ avec $a \in]0; 1[$.

c. En considérant $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[-1; 1]$?

32 CCINP PSI 2024 Olivier Farje I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$. Soit la fonction S définie par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

e. Déterminer $S(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.

f. Trouver un équivalent de $S'(x)$ quand x tend vers 0^+ .

33 CCINP PSI 2024 Lucie Girard I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Soit la fonction S définie par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S .

b. Montrer que S est continue sur D .

c. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u'_n$ sur D ?

d. Calculer $S'(x)$ pour x convenable.

e. En déduire une expression simple de $S(x)$ pour $x \in D$.

34 CCINP PSI 2024 Clément Lacoste I

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et $\forall n \geq 2$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$.

- Trouver une expression de a_n en fonction de n .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 4^n$.
- En déduire une inégalité concernant le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- Montrer que pour des x convenables, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$.
- Donner une autre expression de a_n et la valeur de R .

35 CCINP PSI 2024 Martin Mayot II

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- Étudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n^3$. Indication : considérer $u_{n+1} - u_n$.
- Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ diverge. Indication : considérer $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
- Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$ grâce au théorème de CESARO (question rajoutée). Indication : considérer $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$.

36 Mines-Télécom PSI 2024 Mathéo Demongeot-Marais I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{1}{n^2 x + n}$. Soit aussi f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer qu'il existe un réel a tel que $\forall x > 0$, $\left| f(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{a}{x^2}$.
- En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

37 Mines-Télécom PSI 2024 Émile Gauvrit II

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

Sur quelle domaine peut-on prolonger f ? f est-elle continue, dérivable, de classe C^1 ? De classe C^∞ ?

38 Mines-Télécom PSI 2024 Romane Mioque II

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)}$.

- Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Trouver des réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

39 *Mines-Télécom PSI 2024* Eva Rojo I

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et

R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

- a. Montrer que $\forall x \in]-R; R[$, $S(x) = x + S(x)^2$.
- b. En déduire $S(x)$ pour $x \in]-R; R[$ et la valeur de R .
- c. Montrer que $\forall n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$.

40 *Mines-Télécom PSI 2024* Tom Sanchez I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$.

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ qu'on notera x_n .
- b. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
- c. Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 1} x_n$?

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 4

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

41 ENS Cachan PSI 2024 Armand Dépée et Adrien Saignac

Soit $n \geq 1$ et $\rho > 0$. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On définit le diamètre $d(A)$ d'une partie bornée non vide $A \subset \mathbb{R}^n$ par $d(A) = \sup \{ \|x - y\| \mid (x, y) \in A^2 \}$.

Soit X un borné de $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}_+$ et $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de parties bornées de $\mathbb{R}^n$:

- on dit que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un ρ -recouvrement de X si $X \subset \bigcup_{k \geq 0} A_k$ et $\forall k \in \mathbb{N}, d(A_k) \leq \rho$.
- on pose $H_s^\rho(X) = \inf \left(\left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} d(A_k)^s \mid (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ } \rho\text{-recouvrement de } X \right\} \right)$.

a. Montrer que $H_s^\rho(X)$ est fini et que $\rho \mapsto H_s^\rho(X)$ est une fonction décroissante.

Indication : on pourra considérer des hyper-cubes.

On pose $H_s(X) = \sup \{ H_s^\rho(X) \mid \rho > 0 \} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} H_s^\rho(X) \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

b. Montrer que $s \mapsto H_s(X)$ est une fonction décroissante.

c. Calculer $H_0(X)$ et $H_s(X)$ si $s \geq n$.

d. Soit $v \in \mathbb{R}^n$, on note $X + v$ le translaté de X par le vecteur v . Comparer $H_s(X + v)$ et $H_s(X)$.

e. Soit $\lambda > 0$, on note λX l'homothétisé de X dans le rapport λ . Exprimer $H_s(\lambda X)$ en fonction de $H_s(X)$.

f. Pour deux parties U et V bornées de $\mathbb{R}^n$, comparer $H_s(U \cup V)$ et $H_s(U) + H_s(V)$.

g. Soit X et Y deux parties bornées de $\mathbb{R}^n$ telles que $\inf \{ \|x - y\| \mid (x, y) \in X \times Y \} > 0$. Montrer la relation $H_s(X \cup Y) = H_s(X) + H_s(Y)$.

h. Si $s > 0$ et $H_s(X) > 0$, montrer que $H_u(X) = +\infty$ si $u < s$.

i. Si $s > 0$ et $H_s(X) > 0$, montrer que $H_t(X) = 0$ si $s < t$.

j. On pose $\delta(X) = \inf \{ H_s(X) \mid s > 0 \}$. Calculer $\delta(X)$ pour X un segment, un carré, un cube.

42 Centrale Maths1 PSI 2024 Olivier Farje

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, on suppose que P n'admet pas de racine complexe.

On définit alors la fonction I sur $\mathbb{R}_+$ par $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.

a. Montrer que I est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que I est constante sur $\mathbb{R}_+$.

c. Pour $\varepsilon > 0$, montrer l'existence de $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (r, \theta) \in [k; +\infty[\times [0; 2\pi]$, $\left| \frac{1}{P(re^{i\theta})} \right| \leq \varepsilon$.

d. Conclure.

Questions supplémentaires :

- soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : t \mapsto f(t^2, 2^t)$. Calculer la dérivée de g .

43 Centrale Maths1 PSI 2024 Jonathan Filocco

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1(a) = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}(a) = u_n(a)^2 + \frac{1}{n+1}$.

a. Montrer que si la suite $(u_n(a))_{n \geq 1}$ admet une limite, celle-ci ne peut valoir que 0, 1 ou $+\infty$.

Pour $L = 0, 1$ ou ∞ , on note $E_L = \{a > 0 \mid u_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L\}$.

b. Montrer que E_L sont des intervalles de $\mathbb{R}$ si $L = 0, 1$ ou ∞ .

c. Montrer que $[1; +\infty[\subset E_\infty$ et montrer que E_∞ est un ouvert.

Question supplémentaire :

- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

44 Mines PSI 2024 Armand Coiffe et Adrien Sagnac II

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Montrer que $A = \{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

45 Mines PSI 2024 Olivier Farje I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $\exp_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$.

a. Soit E un espace normé de dimension finie et F un sous-espace de E . Montrer que F est un fermé de E .

b. Montrer que la suite $(\exp_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers une limite notée $\exp(A)$.

c. Montrer que $\exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$.

46 Mines PSI 2024 Bilal Mrani II

Soit E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qu'on munit de la norme infinie classique.

Pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on note P_T l'ensemble des fonctions T -périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note aussi

P l'ensemble des fonctions périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que pour toute fonction $f \in P$, on a $f \in E$.

b. P_T et P sont-ils ouverts ?

c. P_T et P sont-ils fermés ?

47 Mines PSI 2024 Mathias Pisch II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a. Calculer χ_A . Indication : on pourra commencer par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$.

b. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \|A^n\| z^n$.

48 CCINP PSI 2024 Lucie Girard II

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$.

Soit $x \in \text{Im}(u - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(u - \text{id}_E)$.

a. Justifier l'existence d'un vecteur $y \in E$ tel que $u(y) = x + y$.

b. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(y)$ en fonction de n , x et y .

c. Que peut-on en déduire sur x ?

d. Que peut-on dire de $\text{Im}(u - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ dans E ?

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 5

RÉDUCTION

49 *ENS Cachan PSI 2024* Tristan Cheyrou

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, on pose $[A, B] = AB - BA$. On note $S = \{[A, B] \mid (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2\}$.

Soit $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ et Z l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la diagonale est nulle.

- a. Montrer que si $M \in S$, alors $\text{Tr}(M) = 0$.
- b. Montrer que S est stable par multiplication par un scalaire.
- c. Montrer que si $M \in S$ est semblable à $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $N \in S$.
- d. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\text{Tr}(M) = 0$, alors M est semblable à une matrice à diagonale nulle.
- e. Montrer que $\Phi : Z \rightarrow Z$ définie par $\Phi(M) = [D, M]$ est un automorphisme de Z .
- f. En déduire que $S = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$.

Soit e, f, h trois endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ tels que $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ et $[e, f] = h$. Soit x un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ .

- g. Montrer que $e(x) = 0$ ou que $e(x)$ est un vecteur propre de h associé à une valeur propre μ que vous donnerez en fonction de λ .
- h. Montrer que $A = \{k \in \mathbb{N} \mid e^k(x) \neq 0\}$ est un ensemble fini.

50 *ENS Cachan PSI 2024* Axel Corbière et Maxime Plottu

Une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unilpotente si $U - I_n$ est nilpotente.

On admet que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple (D, N) tel que $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente avec $DN = ND$ (décomposition de DUNFORD).

- a. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unilpotente, montrer que 1 est l'unique valeur propre de U .
- b. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unilpotente, exprimer U^{-1} en fonction de $N = U - I_n$.
- c. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le couple (D, N) de DUNFORD vérifie $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et le couple (D, N) associé à A par la décomposition de DUNFORD.

- d. Montrer que $D \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- e. Montrer qu'il existe un unique couple (D', U') tel que D diagonalisable, U' unilpotente et $D'U' = U'D'$.
- f. Montrer que si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

51 ENS Cachan PSI 2024 Mathis Laruelle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a. Montrer que si B est diagonalisable, alors $\exp(B)$ l'est aussi.
- b. Montrer qu'il existe $(B_1, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ avec B_1 diagonalisable, N nilpotente, $B = B_1 + N$ et $B_1 N = N B_1$.
- c. Si $\exp(B)$ est diagonalisable, montrer que $\exp(N) - I_n$ est nilpotente, puis que B est diagonalisable.

Soit pour les trois prochaines questions $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable avec $\mu_1, \dots, \mu_p$ ses valeurs propres distinctes. Soit des matrices $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = P D P^{-1}$.

- d. Déterminer un polynôme U tel que $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $P(\mu_k) = e^{\mu_k}$.
- e. Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $Q(A) = P Q(D) P^{-1}$.
- f. En déduire que $\exp(A)$ est un polynôme en A .

On admet que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(M) \in GL_n(\mathbb{C})$ de sorte qu'on peut définir l'application exponentielle sur les matrices par $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$. Soit aussi la matrice $D = \text{diag}(-1, -2, \dots, -n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- g. Montrer que D est inversible.
- h. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que e^λ est une valeur propre de $\exp(B)$.
- i. Existe-t-il une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B) = D$?
- j. Que dire de l'application $\exp$?

52 Centrale Maths1 PSI 2024 Amélia Arangoits

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

- a. Montrer que F est stable par M si et seulement si $F^\perp$ est stable par M^T .
- b. Trouver les sous-espaces stables par $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

53 Centrale Maths1 PSI 2024 Romane Mioque et Maxime Plottu

- a. Montrer que si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que M et $2M$ sont semblables.

- b. Que vaut $\text{Sp}(M)$? Qu'en déduire sur M ?
- c. Trouver un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle telle que M et $2M$ sont semblables.
- d. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $\text{rang}(M) = 1$, montrer que M est semblable à $E_{2,3}$.
En déduire que M est semblable à $2M$.
- e. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $n - 1$, montrer que M est semblable à $2M$.

54 Mines PSI 2024 Yasmine Azzaoui II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

- a. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
- b. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.
- c. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX - XB = M$.

55 Mines PSI 2024 Thomas Favant I

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$ et $\varphi : E \rightarrow E$ définie par $\varphi(u) = v$ où $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

- a. Montrer que φ est un automorphisme de E .
- b. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .

56 Mines PSI 2024 Tiago Genet et Lou Goiffon I

Soit $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$.

- a. Vérifier que $P(2) = P'(2) = 0$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$.

57 Mines PSI 2024 Nathan Jung II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\text{Sp}(A) = \{0\}$.
- b. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que $E_A = \{X \in \mathbb{C}^n \mid AX = \lambda X\}$ est un espace vectoriel.

58 Mines PSI 2024 Martin Mayot I

On définit $A_0 = (1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la taille de la matrice A_n .
- b. Calculer le rang de A_n .
- c. Donner les valeurs propres de A_n . La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

59 Mines PSI 2024 Clément Reiner II

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et on pose $E = \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

- a. Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.
- b. Déterminer le déterminant et la trace de $f_{a,b}$ en fonction de a et b .
- c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable.

60 Mines PSI 2024 Arya Tabrizi I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, $a_{i,i} = i$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.

On note P_n le polynôme caractéristique de A_n .

- a. Montrer que $\forall n \geq 1$, $P_{n+1} = (X - n)P_n - X(X - 1) \cdots (X - n + 1)$.
- b. Montrer que, $\forall k \in \llbracket 0;n - 1 \rrbracket$, $(-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n - 1) < 0$ et $P_n(n) < 0$.
- c. En déduire que A_n admet n valeurs propres réelles distinctes.

61 Mines PSI 2024 Guilhem Thébault I

Soit $N \geq 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$.

- Identifier un endomorphisme f de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$.
- En déduire que A est diagonalisable et donner ses éléments propres.

62 Mines PSI 2024 Antoine Vergnenègre I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(U, V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $UV = VU$ et V nilpotente.

- Montrer que $\det(I_n + M) = 1$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente.
- Montrer que $\det(U + V) = \det(U)$ si U est inversible.
- Montrer que $\det(U + V) = \det(U)$. Indication : montrer que $\text{Ker}(U)$ est stable par V .

63 CCINP PSI 2024 Amélia Arangoits II

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- Donner au moins une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension fini.
- Donner les valeurs propres de A .
- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

64 CCINP PSI 2024 Edward Bauduin II

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant (1) : $M^3 - 4M = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$.

- Montrer que les valeurs propres de M sont des racines de $P = X^3 - 4X$.
- En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant (1).

65 CCINP PSI 2024 Amjad Belmiloud I

a. Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$. On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

- Calculer χ_C en fonction de χ_A . En déduire $\text{Sp}(C)$ en fonction de $\text{Sp}(A)$.
- On suppose $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta = \gamma$. Calculer χ_B en fonction de χ_A , puis $\text{Sp}(B)$ en fonction de $\text{Sp}(A)$.
- Montrer que si $X \in \text{Ker}(A)$, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B)$. En déduire que $\dim(\text{Ker}(B)) \geq 2 \dim(\text{Ker}(A))$.
- Diagonaliser B pour $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 3$.

66 CCINP PSI 2024 Martin Mayot I

Soit $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- a. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et U et V des matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P(U)$ et $P(V)$ sont semblables.
- b. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer M^k .
- c. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, donner une expression de $P(M)$ en fonction de A , $P(A)$ et $P'(A)$.
- d. Montrer que si M est diagonalisable, alors A l'est aussi.
- e. Étudier la réciproque si A est inversible.
- f. Montrer que si M est diagonalisable et A n'est pas inversible, alors $A = 0$.

67 CCINP PSI 2024 Jasmine Meyer II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

- a. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de $P = X^3 - X^2 + X - 1$.
- b. Calculer $\det(A)$.
- c. Prouver que $\text{Tr}(A) \in \mathbb{N}$.

68 CCINP PSI 2024 Tom Sanchez II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AU = UB$ et $U \neq 0$.

- a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P(A) = 0$, alors $\text{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P .
- b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)U = UP(B)$.
- c. En déduire A et B possèdent une valeur propre commune.
- d. Montrer que si deux matrices C, D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont une valeur propre commune, il existe une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $CM = MD$.

69 Mines-Télécom PSI 2024 Clément Lacoste II

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

- a. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
- b. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$, montrer que les vecteurs propres de A sont aussi des vecteurs propres de M . La matrice M est-elle diagonalisable ?
- c. Donner toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

70 Mines-Télécom PSI 2024 Romane Mioque I

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u = \sum_{k=1}^n e_k$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f(e_i) = e_i + u$.

- a. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
- b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- c. Déterminer la valeur de $\det(f)$ et $\text{Tr}(f)$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 6

THÉORÈMES DE DOMINATION

71 Centrale Maths1 PSI 2024 Thomas Favant

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $2\lambda > -1$. On définit $g_\lambda : \mathbb{R} \times]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ par $g_\lambda(x, \theta) = e^{-ix \cos(\theta)} \sin^{2\lambda}(\theta)$.

- a. Montrer que la fonction $\theta \mapsto g_\lambda(x, \theta)$ est intégrable sur $]0; \pi[$.
- b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda(x) = \int_0^\pi g_\lambda(x, \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos(\theta)) \sin^{2\lambda}(\theta) d\theta$.
- c. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'_\lambda(x) = f_{\lambda+1}(x) - f_\lambda(x)$.

72 Centrale Maths1 PSI 2024 Antoine Métayer

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

On définit aussi $f :]-1; 0[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$.

- a. Montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim_{+\infty} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.
- b. Montrer que f est bien définie et que $\forall x \in]-1; 0[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{n \cdot n!}$.

73 Mines PSI 2024 Jules Campistron II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^1 |\ln(t)|^x dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition D de f .
- b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D .
- c. Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- d. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

74 Mines PSI 2024 Tristan Cheyrou II

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

- a. Justifier que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est bien définie.
- b. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à déterminer.
- c. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.
- d. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 2} (I_n - \ell)$.

75 Mines PSI 2024 Lucie Girard I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt$.

- a. Montrer la convergence de la suite $(H_n - \ln(n))_{n \geq 1}$. On note γ sa limite.
- b. Établir la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$. On note $I = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$.
- c. Prouver l'existence de I_n et trouver un lien simple entre I_n et H_n .
- d. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et trouver un lien entre γ et I .

76 Mines PSI 2024 Valentine Girard III

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

77 Mines PSI 2024 Manech Leroux I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(xt) e^{-t} dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition D de f .
 - b. Montrer que f est de classe C^1 sur D .
- On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
 - d. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

78 Mines PSI 2024 Mathias Pisch I

Soit la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- a. Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle y est strictement positive et de classe C^2 .
- b. Prouver que Γ et $\ln \circ \Gamma$ sont convexes sur $\mathbb{R}_+^*$.
- c. Établir, pour $x > 0$, que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.
- d. Trouver une relation entre $\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ et $\int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$.
- e. En déduire que $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

79 CCINP PSI 2024 Edward Bauduin et Jasmine Meyer I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition de f .
- b. Trouver la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c. Pour $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
- d. En déduire un développement de f en somme de séries de fonctions.
- e. Trouver ce développement d'une autre manière.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 7

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

80 *X PSI 2024* Jules Campistron I

- a. Soit $\alpha, \lambda_1, \lambda_2, D_1, D_2$ des réels tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2$ et $D_1 \geq D_2$. Soit $A = \begin{pmatrix} D_1 & \alpha \\ \alpha & D_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont λ_1, λ_2 . Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$ et $\lambda_1 \geq D_1$.
- b. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique dont les deux valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \lambda_2$ et soit D_1, D_2 des réels tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, $D_1 \geq D_2$ et $\lambda_1 \geq D_1$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que les matrices A et $\begin{pmatrix} D_1 & \alpha \\ \alpha & D_2 \end{pmatrix}$ soient orthosemblables.

81 *ENS Cachan PSI 2024* Thomas Favant

Soit un entier $n \geq 2$, on note $|\cdot|_2$ la norme 2 sur l'espace vectoriel des vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|M\|_2 = \sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \frac{|MX|_2}{|X|_2}$.

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on définit le conditionnement $\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

- a. Rappeler la définition de $|\cdot|_2$ et montrer que $\|M\|_2 = \sup_{|X|_2=1} |MX|_2$.
- b. Montrer que $M \mapsto \|M\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|M_1 M_2\|_2 \leq \|M_1\|_2 \|M_2\|_2$.
- c. Montrer que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $|MX|_2 = \|M\|_2 |X|_2$.
- d. Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique définie positive.
- e. On note σ_n (resp. σ_1) la plus grande (resp la plus petite) valeur propre de $A^T A$, montrer que $\kappa(A) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}}$.
- f. On suppose dans cette question seulement que A est symétrique définie positive, et on note λ_n (resp. λ_1) sa plus grande (resp. sa plus petite) valeur propre. Calculer $\|A\|_2$ et en déduire $\kappa(A)$.
- g. Montrer que $\kappa(A) = 1$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $Q \in O(n)$ tels que $A = \alpha Q$.
- h. On suppose que $A = QR$ avec $Q \in O(n)$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\kappa(A) = \kappa(R)$.
- i. Soit $(B, \bar{B}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $B \neq 0$ et $X, \bar{X}$ les solutions de $AX = B$ et $A\bar{X} = \bar{B}$. Majorer l'erreur relative $\frac{|X - \bar{X}|_2}{|X|_2}$ sur les solutions en fonction du conditionnement $\kappa(A)$ et de l'erreur relative $\frac{|B - \bar{B}|_2}{|B|_2}$ sur les entrées.
- j. Illustrer avec une matrice A bien choisie le principe suivant : “une matrice mal conditionnée (telle que $\kappa(A)$ est grand) entraîne de grandes erreurs numériques”.

82 ENS Cachan PSI 2024 Tiago Genet

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien de dimension $d \geq 2$. Pour $u \in E$ unitaire et $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : x \mapsto x + a(x|u)u$.

- a. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f_a \circ f_b = f_{a+b+ba}$.
- b. En déduire que $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$.
- c. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, f_a^p = f_{(a+1)^p-1}$.
- d. Montrer que f_a est inversible si et seulement si $a \neq -1$.
- e. Montrer que f_a est autoadjoint pour tout réel a .
- f. Montrer que f_a est une isométrie si et seulement si $a = 0$ ou $a = -2$.

Question supplémentaire :

- soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements disjoints, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

83 Centrale Maths1 PSI 2024 Axel Corbière

Soit E un espace euclidien dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et f un endomorphisme de E . On dit que f est une contraction si $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$.

- a. Si f est autoadjoint, montrer l'équivalence entre des deux assertions suivantes :

(i) f est une contraction.

(ii) $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), |\lambda| \leq 1$.

- b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que si f est autoadjoint et $x \in E, \|P(f)(x)\| \leq \left(\sup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (|P(\lambda)|) \right) \|x\|$.

84 Centrale Maths1 PSI 2024 Nathan Jung

Soit E un espace euclidien de dimension $p \geq 1$ dont on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E dont on note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$ les valeurs propres. On note enfin $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de E .

- a. Montrer que $x \mapsto (u(x)|x)$ admet un minimum sur S .
- b. Montrer que $\lambda_1 = \min_{x \in S} ((u(x)|x))$.
- c. Montrer que $\lambda_2 = \min_{F \in \mathcal{E}_2} \left(\max_{x \in S \cap F} ((u(x)|x)) \right)$ où $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des plans vectoriels de E .

85 Centrale Maths1 PSI 2024 Guillaume Leduc

Soit E un espace euclidien pour un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, v un vecteur non nul de E et $f : E \rightarrow E$ définie par $\forall x \in E, f(x) = x - \lambda(x|v)v$.

- a. f est-il un endomorphisme autoadjoint de E ?
- b. Pour quelles valeurs de λ l'endomorphisme f est-il une isométrie vectorielle ?
- c. On suppose que f est une isométrie vectorielle, déterminer les éléments caractéristiques de f .
- d. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux réflexions commutent.

86 Centrale Maths1 PSI 2024 Clément Reiner

Soit $\mathcal{U}' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \mid |z| = 1\}$ et $h : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(z) = \frac{1-z}{1+z}$.

- a. Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ dans lui-même.
- b. Montrer que h induit une bijection de $\mathcal{U}'$ dans $i\mathbb{R}$.
- c. Former une représentation de $\mathcal{U}'$ dans le plan complexe.
- d. Pour $\theta \in]-\pi; \pi[$, représenter dans le plan complexe le point d'affixe $h(e^{i\theta})$.

On note $\mathcal{O}'$ l'ensemble des matrices orthogonales de $O(2)$ dont -1 n'est pas valeur propre et on définit $H : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $H(M) = (I_2 - M)(I_2 + M)^{-1}$.

- e. Justifier que H est bien définie et donner le spectre de $h(M)$ si $M \in \mathcal{O}'$.
- f. Montrer que H réalise une bijection entre $\mathcal{O}'$ et les matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

87 Centrale Maths1 PSI 2024 Guilhem Thébaud

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \dots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité) : ces matrices sont dites à diagonale propre.

On note $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit à diagonale propre.
- b. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n$.
- c. Trouver $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n$.
- d. Montrer que si un sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $F \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, alors $\dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

88 Centrale Maths1 PSI 2024 Antoine Vergnenègre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que les coefficients diagonaux de M sont impairs et tous les autres pairs.

- a. Montrer que $\det(M)$ est impair. En déduire $\text{rang}(M)$.

Soit $P_1, \dots, P_k$ des parties distinctes de $\llbracket 1; n \rrbracket$ et, pour $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$, le vecteur colonne $X_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X_j^T = (x_{1,j} \ \dots \ x_{n,j})$ avec $x_{i,j} = 1$ si $i \in P_j$ et $x_{i,j} = 0$ sinon.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\{0,1\})$ dont les colonnes sont, dans l'ordre, $X_1, \dots, X_k$.

- b. Montrer que X et $X^T X$ ont même rang.
- c. Calculer les coefficients de $X^T X$ en fonction des parties $P_1, \dots, P_k$.

89 Mines PSI 2024 Jules Campistron I

Soit $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ et $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(M) = \langle MX, X \rangle$.

- a. Déterminer $\Phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- b. Déterminer $\Phi(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

90 Mines PSI 2024 Armand Dépée I

On définit la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Pour un entier $n \geq 2$, on note $A_n = (f_{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Exprimer A_2, A_3, A_4 .
- b. Pour $n \geq 2$, quelle est la multiplicité de 0 pour A_n .
- c. Montrer qu'il existe deux valeurs propres de A_n non nulles α_n et β_n , telles que $\alpha_n < 0 < \beta_n$.
- d. Quelle est la nature de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$? Et de $(\beta_n)_{n \geq 2}$?

91 Mines PSI 2024 Lucie Girard II

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E .

a. Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$.

On prend, pour les deux prochaines questions, $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

b. Déterminer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$ si on munit E du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par $(P|Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

c. Déterminer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$ si on munit E du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

d. Donner une condition suffisante pour que $F = (F^\perp)^\perp$.

e. La condition suffisante de la question précédente est-elle nécessaire ?

Question supplémentaire :

- si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E , est-ce que F est un ouvert ou un fermé ?

92 Mines PSI 2024 Valentine Girard II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^T M M^T = I_n$.

93 Mines PSI 2024 Mathis Laruelle I

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0\}$ et p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F .

a. Trouver une base orthonormale de F et la compléter en une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer les matrices de p et s dans la base $\mathcal{B}'$.

c. Déterminer les matrices de p et s dans la base $\mathcal{B}$.

94 Mines PSI 2024 Guillaume Leduc II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 - M + M^T = I_n$.

a. Montrer que M est symétrique.

b. (question rajoutée) Que représente f canoniquement associé à M dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ canonique ?

95 Mines PSI 2024 Manech Leroux II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $\varphi_A : M \mapsto AMA^T$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ_A soit une isométrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique.

96 Mines PSI 2024 Antoine Métayer I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. Si $A \neq 0 \in E$, on définit l'application f_A qui à un polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de P par A .

a. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

b. Montrer que f_A est un endomorphisme de E .

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_A soit un projecteur orthogonal.

d. Trouver tous les polynômes A tel que f_A est un projecteur orthogonal si $n = 3$.

97 Mines PSI 2024 Jasmine Meyer II

Soit E un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et p un projecteur de E .
Montrer que p est orthogonal si et seulement si p est 1-lipschitzien.

98 CCINP PSI 2024 Yasmine Azzaoui II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A et A^T commutent.

a. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T)$.

b. Montrer que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

c. En déduire qu'il existe $r \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $P \in O(n)$ tels que $A = PBP^T$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $U \in GL_r(\mathbb{R})$.

99 CCINP PSI 2024 Mathéo Demongeot-Marais II

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur orthogonal de E tel que $\text{rang}(p) = r$.

a. Montrer que $\forall x \in E, (p(x)|p(x)) = (x|p(x))$.

b. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(v_i)\|^2 = r$.

100 CCINP PSI 2024 Clément Lacoste II

a. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\exists! u_n \in \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_{-1}^1 P(t)u_n(t)dt$.

c. Déterminer u_2 .

101 CCINP PSI 2024 Romane Mioque I

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.

a. La matrice $M^T M$ est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que $\text{Sp}(M^T M) \subset \{-2, 2\}$.

c. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(M^T M)$, alors $\lambda \geq 0$. En déduire $\text{Sp}(M^T M)$.

d. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}} M$ est orthogonale.

e. Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.

102 Mines-Télécom PSI 2024 Mattéo Aumaitre II

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne non nul et la suite de vecteurs colonnes $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N}, Y_k = \frac{S^k X}{\|S^k X\|}$.

Montrer que la suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur propre de S .

103 Mines-Télécom PSI 2024 Émile Gauvrit I

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ dans lequel on considère $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y - z - t = x - y + z - t = 0\}$.

a. Déterminer la matrice A dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F .

b. Que constate-t-on sur cette matrice ? Était-ce prévisible ?

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 8

PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

104 *ENS Cachan PSI 2024* Jules Campistron

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω et des variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_{n-1}$ sur Ω et indépendantes deux à deux, d'espérance nulle et de variance 1. Soit Z une variable aléatoire réelle sur Ω telle que $Z(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ avec $m \geq 3$ et les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ distincts deux à deux.

On pose, pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $x_i = (X_i(\omega_1), \dots, X_i(\omega_n))$, $x_n = (1, \dots, 1)$ et $z = (Z(\omega_1), \dots, Z(\omega_n))$.

- a. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{n} \langle z, x_n \rangle$.
- b. Montrer que $\exists (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, $\sum_{k=1}^m \mathbb{P}(Z = \alpha_k) \beta_k = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(Z = \alpha_k) \alpha_k \beta_k = 0$.
- c. En déduire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que $Q(Z)(\Omega) \neq \{0\}$, $\mathbb{E}(Q(Z)) = \mathbb{E}(Q(Z)Z) = 0$.
- d. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\langle x_i, x_i \rangle = n$ et que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket^2$, $i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0$.
- e. Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} X_k^2 = n-1$. En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} X_k^3 = 0$.

105 *ENS Cachan/Rennes PSI 2024* Jonathan Filocco et Mathias Pisch

Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- a. Calculer la loi de S_n , son espérance, sa variance.
- b. Montrer que $\forall a > 0$, $\mathbb{P}(S_n \geq na) \leq \frac{1}{na^2}$.
- c. Soit X une variable aléatoire réelle, montrer $\forall a > 0$, $\forall s > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{sX})}{e^{sa}}$.
- d. Montrer que $\forall s > 0$, $\mathbb{P}(S_n \geq na) \leq \left(\frac{\text{ch}(s)}{e^{sa}} \right)^n$.
- e. Montrer que $\forall s \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(s) \leq e^{\frac{s^2}{2}}$.
- f. En déduire que $\forall a > 0$, $\mathbb{P}(S_n \geq na) \leq e^{\frac{-na^2}{2}}$.
- g. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x > 0$, $g(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ se prolonge par continuité en 0 et qu'elle est alors croissante sur $\mathbb{R}_+$.

106 Centrale Maths1 PSI 2024 Tristan Cheyrou

a. Donner le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$. Montrer : $\forall x \in]-R; R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\})$ si $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\} \neq \emptyset$ et $T = +\infty$ sinon.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_k = \frac{1+X_k}{2}$. Donner la loi de Y_k , puis celle de $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

c. En déduire la loi de S_n , son espérance et sa variance. Que représente S_n ?

On pose $p_0 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. On pose aussi $q_k = \mathbb{P}(T = 2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

d. Montrer que $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ est convergente pour $|x| < 1$. On pose alors $p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

e. Montrer que $\forall n \geq 1$, $p_n = \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k$. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[$, $G_T(x) = \frac{p(x^2) - 1}{p(x^2)}$.

f. En déduire la loi de T et son espérance.

107 Centrale Maths1 PSI 2024 Mathéo Demongeot-Marais

Dans une marche aléatoire symétrique (autant de chance d'aller à gauche qu'à droite) sur $\mathbb{Z}$ démarrant en 0, on note X_n la variable aléatoire désignant l'abscisse du marcheur après le n -ième pas. On a donc $X_0 = 0$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $E_k =$ "le marcheur est revenu à l'origine au moins k fois au cours de la marche entière".

Soit B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le marcheur est revenu en 0 après le i -ième pas et 0 sinon.

a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X_n = 0)$.

b. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = 0)$.

c. Déterminer la loi de B_i et, pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^p B_i \geq k\right)$.

d. Trouver un lien entre $\left(\sum_{i=0}^p B_i \geq k\right)$ et E_k . En déduire que $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(E_k)$ diverge.

108 Centrale Maths1 PSI 2024 Armand Dépée

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire de cet espace à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On note $A = \{X \text{ variable aléatoire de } \Omega \text{ dans } \mathbb{N} \mid G_X \text{ est définie sur } \mathbb{R}\}$.

a. Soit $X \in A$, montrer que X^p admet une espérance finie.

b. Soit $X \in A$, exprimer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de G_X .

On note $A_1 = \{X \in A \mid \mathbb{E}(X) = 1, \mathbb{E}(X^2) = 2, \mathbb{E}(X^3) = 5\}$.

c. Montrer que l'ensemble $\{\mathbb{P}(X = 0) \mid X \in A_1\}$ admet un minimum et le déterminer.

Question supplémentaire :

- Donner le théorème spectral dans sa version matricielle et étudier la validité de sa réciproque.

109 Centrale Maths1 PSI 2024 Valentine Girard

Soit E l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n \geq 0} a_n^2$ converge.

Pour deux suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , on pose $\langle a, b \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

a. Montrer que E muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace préhilbertien réel.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose $u_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on prend $u_{-1} = 0$ par convention. On dit que X vérifie la propriété $(*)$ si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
- X admet un moment d'ordre 2,
- $\sum_{n \geq 0} \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{u_n}$ converge (on note $S(X)$ sa somme).

b. Si X suit la loi de POISSON de paramètre λ , montrer que X vérifie $(*)$.

c. Si X suit la loi de POISSON de paramètre λ , calculer $S(X) \mathbb{V}(X)$.

110 Mines PSI 2024 Yasmine Azzaoui III

Sur 1000 électeurs, 700 votent pour A et 300 pour B.

Quelle est la probabilité pour que A soit toujours en tête (au sens strict) lors du dépouillement ?

111 Mines PSI 2024 Tristan Cheyrou I

Soit deux réels $q \in]0; 1[$ et $a \in \mathbb{R}_+$ et deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que l'on ait $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = a q^{i+j}$.

- a. Exprimer a en fonction de $p = 1 - q$.
- b. Déterminer les lois marginales de X et Y . Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
- c. Trouver $\text{Cov}(X, Y)$.
- d. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de $U = \text{Max}(X, Y)$ sachant $X + Y = 2n + 1$.

112 Mines PSI 2024 Armand Coiffe I

Dans une urne, il y a b boules blanches, 1 boule rouge et $n - b - 1$ boules noires.

On tire une boule avec remise dans cette urne jusqu'à tirer la boule rouge à l'instant T .

On note X le nombre de boules blanches tirées pendant ce processus.

- a. Pour $r \in \mathbb{N}$, donner le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$.
- b. Déterminer la loi de T .
- c. Que vaut $\mathbb{P}_{(T=k)}(X = i)$ pour $(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
- d. Déterminer la loi de X .

113 Mines PSI 2024 Axel Corbière II

On considère une pièce qui fait pile avec une probabilité $p \in]0; 1[$ et qu'on lance indéfiniment. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de face obtenus pour faire deux fois pile.

- a. Donner la loi de X .
- b. Montrer que X admet une espérance finie et la calculer.

Si $X = n$, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on en pioche une. On note Y le numéro de la boule piochée.

- c. Donner la loi de Y .
- d. Calculer l'espérance et la variance de Y .

114 *Mines PSI 2024* Olivier Farje II

Soit $p \in]0; 1[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de BERNOULLI de paramètre p . On pose $A = \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{k \geq 1} \frac{X_k(\omega)}{k} \text{ converge} \right\}$. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

115 *Mines PSI 2024* Thomas Favant II

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que chaque X_n suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda_n \geq 0$ et $S : \Omega \rightarrow [0; +\infty]$ définie par $S(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)$. Déterminer la loi de S . Indication : commencer par calculer $\mathbb{P}(S = 0)$.

116 *Mines PSI 2024* Jonathan Filocco II

Une urne contient au début une bille blanche et une bille rouge. On répète indéfiniment des tirages selon le mode suivant : on tire une bille, et on remet dans l'urne deux billes de la couleur obtenue.

- a. Quelle est la probabilité qu'on n'obtienne que des boules rouges lors des n premiers tirages ?
- b. Quelle est la probabilité qu'on obtienne indéfiniment seulement des boules rouges ?
- c. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au 42-ième tirage ?
- d. Est-ce que le résultat du **b.** change si on remet trois billes de la couleur obtenue ou lieu de deux ?
- e. Est-ce que le résultat de la question **b.** change si on remet k billes de la couleur obtenue ou lieu de deux au k -ième tirage ?

117 *Mines PSI 2024* Guillaume Leduc I

On considère deux urnes contenant chacune r boules rouges et b boules bleues. À chaque tirage, on tire sans remise une boule dans chaque urne. On note X le nombre de tirages lors desquels les boules tirées dans les deux urnes sont de couleurs différentes.

- a. Déterminer la loi de X .
- b. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

118 *Mines PSI 2024* Bilal Mrani I

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$ avec $p \in]0; 1[$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $k \geq 1$, $S_k = X_1 + \dots + X_{2k}$. On note $p(k) = \mathbb{P}(S_k = 0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- a. Déterminer l'expression de $p(k)$ et en donner un équivalent quand k tend vers $+\infty$.
- b. On suppose dans cette question $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que le nombre de retour à l'origine (le nombre d'indices n tels que $S_n = 0$) est presque sûrement fini. Indication : on pourra commencer par traduire mathématiquement le fait qu'il existe une infinité de retour à l'origine.

119 *Mines PSI 2024* Adrien Sagnac I

Soit E un ensemble non vide et p une application de E dans E . On suppose que p est idempotente, c'est-à-dire que $p \circ p = p$.

- Montrer que si p est injective, on a $p = \text{id}_E$.
- Montrer que si p est surjective, on a $p = \text{id}_E$.
- Si $\text{card}(E) = 2$, trouver une application idempotente de E dans E qui ne soit pas id_E .
- Trouver 3 applications idempotentes de E si $\text{card}(E) = 2$.
- Trouver 10 applications idempotentes de E si $\text{card}(E) = 3$.
- Prouver que si $p : E \rightarrow E$, on a p idempotente si et seulement si $(\forall x \in p(E), p(x) = x)$.
- Dénombrer les applications idempotentes de E dans E si $\text{card}(E) = n$.

120 *Mines PSI 2024* Arya Tabrizi II

Dans une urne, il y a une boule blanche et une boule noire indiscernables au toucher. On prend une boule :

- si elle est blanche, on arrête.
- si elle est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule blanche.

On note Y le rang du tirage d'une boule blanche en convenant que $Y = 0$ si on n'obtient jamais de boule blanche. Déterminer la loi et l'espérance de Y .

121 *CCINP PSI 2024* Mattéo Aumaitre I

Soit $p \in]0; 1[$, $q = 1 - p$ et $r \in \mathbb{N}$. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $p_n = q^r p^n \binom{n+r-1}{r-1}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = p_n$.

- Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$ (vous donnerez le rayon de convergence).
- En déduire celui de $\frac{1}{(1-x)^r}$.
- Vérifier que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilité.
- Déterminer la fonction génératrice de X .
- Calculer l'espérance et la variance de X .

122 *CCINP PSI 2024* Mathéo Demongeot-Marais I

On considère une urne de $n \geq 2$ boules numérotées de 1 à n . On réalise des tirages avec remise.

On note X_n le premier rang tel qu'une autre boule que la première soit tirée.

- Montrer que X_n est une variable aléatoire discrète et déterminer la loi de X_n .
- Montrer que X_n admet une espérance et la calculer.
- Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$. Interpréter.

Soit Y_n le premier rang tel que toutes les boules de l'urne aient été tirées au moins une fois.

- Déterminer la loi de Y_2 .
- Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i < j$, déterminer $\mathbb{P}_{(X_3=i)}(Y_3 = j)$. En déduire la loi de Y_3 .

123 CCINP PSI 2024 Émile Gauvrit II

Soit $\lambda > 0$ et une variable aléatoire X suivant la loi de POISSON de paramètre λ .

- a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
- b. Montrer que $\forall a > 0, \forall t \geq 1, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$.
- c. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.

124 CCINP PSI 2024 Tom Sanchez I

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \llbracket 1; N \rrbracket$. On considère une urne avec $N - r$ boules blanches et r boules noires. On tire une boule successivement et sans remise dans cette urne, on note X_N le numéro du tirage lors duquel on retire la dernière boule noire.

- a. Donner la loi de X_N et l'espérance de X_N dans les cas particuliers $r = 1$ et $r = N$.

On suppose dorénavant que $1 < r < N$.

- b. Pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X_N = k)$.
- c. En déduire $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N et r .

125 Mines-Télécom PSI 2024 Mattéo Aumaitre I

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. On pose $S = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ et $\lambda < \mu$ ses deux valeurs propres.

- a. Calculer λ et μ en fonction de X et Y .
- b. Quelle est la probabilité pour que S soit inversible ?
- c. Quelle est la probabilité pour que S soit définie positive ?

126 Mines-Télécom PSI 2024 Eva Rojo II

On dispose d'un dé blanc non truqué et d'un dé noir pipé avec lequel la probabilité de faire 6 est $\frac{1}{3}$. Le joueur 1 prend un dé au choix et le lance, le joueur 2 lance l'autre dé. Celui qui a fait strictement plus que l'autre a gagné, et si le score est égal, le dé blanc gagne.

Quelle est la meilleure stratégie pour le joueur 1 ?

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 9

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

127 X PSI 2024 Guilhem Thébaud II

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π -périodique et l'équation différentielle (E) : $y'' + \varphi y = 0$.

- a. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est $\text{Vect}(y_1, y_2)$ où $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$.
- b. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (E), alors $g : x \mapsto f(x + 2\pi)$ est aussi solution de (E).
- c. Quelle est la nature de l'application $\psi : f \rightarrow g$?
- d. Montrer que si un réel λ est valeur propre de l'endomorphisme ψ , alors λ est solution de l'équation polynomiale (P) : $x^2 - (y_1'(2\pi) + y_2(2\pi))x + (y_1'(2\pi)y_2(2\pi) - y_2'(2\pi)y_1(2\pi)) = 0$.

128 Centrale Maths1 PSI 2024 Yasmine Azzaoui

On définit, pour un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sa norme infinie $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

On définit $B(O, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_\infty < 1\}$ et $\overline{B(O, 1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_\infty \leq 1\}$ les boules unité ouverte ou fermée pour cette norme infinie et $f : \overline{B(O, 1)} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 1$.

Soit la surface $S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \overline{B(O, 1)}\}$ représentative de f .

- a. Exprimer $B(O, 1)$ et $\overline{B(O, 1)}$ sous la forme d'un produit cartésien de parties de $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que f est C^1 sur $B(O, 1)$, calculer son gradient et déterminer les points critiques de f sur $B(O, 1)$.
- c. En déduire les extrema de f sur $\overline{B(O, 1)}$.
- d. Déterminer les points $(x, y) \in B(O, 1)$ où le plan tangent à S en $(x, y, f(x, y))$ est normal à $\vec{v} = (0, 1, -1)$.

129 Centrale Maths1 PSI 2024 Edward Bauduin

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

- a. Donner l'équation du plan tangent à $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ et } z = f(x, y)\}$ en $(a, b, c) \in S$.
- b. Montrer que f admet un minimum local en un unique point $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ à déterminer.
- c. Montrer que $K = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy \leq 3 \text{ et } x \geq \frac{1}{3} \text{ et } y \geq \frac{1}{3}\}$ est un fermé borné de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- d. En déduire que f admet en (x_0, y_0) un minimum absolu.

130 Centrale Maths1 PSI 2024 Amjad Belmiloud

Soit les ensembles $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 8\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 8\}$. Soit les fonctions $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $\Phi(t) = (2 \cos(t), \sqrt{2} \sin(t))$ et $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} + x^2$.

- a. Montrer que Φ réalise une bijection de classe C^1 de $[0; 2\pi[$ dans $\mathcal{E}$.
- b. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur Δ .
- c. Déterminer $\min_{\Delta} f$. Montrer que le maximum de f sur Δ est atteint sur $\mathcal{E}$.
- d. Trouver la valeur de $\max_{\Delta} f$.

131 Centrale Maths1 PSI 2024 Lou Goiffon et Tom Sanchez

Soit $H = [-1; 1] \times [0; 1]$, $O =]-1; 1[\times]0; 1[$ et $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{y - yx^2}(x - xy)$.

- a. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur H .
- b. Trouver les extrema de f sur O .
- c. Calculer la valeur du maximum global de f sur H .

132 Centrale Maths1 PSI 2024 Martin Mayot

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 1$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$.

- a. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- c. Trouver les points critiques de f .
- d. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

133 Mines PSI 2024 Martin Mayot II

Soit un entier $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

- a. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.
- b. Montrer que l'application $x \mapsto \nabla f(x)$ est surjective.

134 Mines PSI 2024 Mathis Laruelle II

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-kt} \sin(xe^t) dt$.

- a. La fonction F_k est-elle définie sur $\mathbb{R}$? Est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
- b. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E_k) : xy' - ky = \sin(x)$ pour $k \geq 2$.
- c. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E_1) : xy' - y = \sin(x)$.

135 Mines PSI 2024 Clément Reiner I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^1 \operatorname{Arctan}^2(xt) dt$ et l'équation différentielle $(E) : xy' + y = \operatorname{Arctan}^2(x)$.

- a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur de $f(0)$.
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- c. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que $f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + \frac{\operatorname{Arctan}^2(x)}{x}$.
- d. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
- e. Trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

136 CCINP PSI 2024 Olivier Farje II

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- b. Résoudre $(S) : \begin{cases} x'' = -x + y \\ y'' = -x + 2y - z \\ z'' = -3x + y + 2z \end{cases}$.

137 CCINP PSI 2024 Émile Gauvrit I

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et les deux systèmes différentiels associés $(S_1) : \begin{cases} x' = -2x + 4y + z \\ y' = -x + 3y + z \\ z' = -4x + 4y + 3z \end{cases}$
 et $(S_2) : \begin{cases} x'' = -2x + 4y + z \\ y'' = -x + 3y + z \\ z'' = -4x + 4y + 3z \end{cases}$. On définit la fonction $X : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- En posant $Y = P^{-1}X$ pour une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ bien choisie, déterminer un système différentiel (S'_1) tel que X solution de (S_1) sur $\mathbb{R} \iff Y$ solution de (S'_1) sur $\mathbb{R}$.
- En déduire une expression des solutions de (S_1) sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre (S_2) .
- Les solutions réelles et bornées de (S_2) forment-elles un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ? Si oui, déterminer la dimension de cet espace.

138 CCINP PSI 2024 Romane Mioque II

On considère l'équation différentielle (E) : $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$.

- Trouver des réels a, b, c , tels que $\forall t \notin \{-1, 0, 1\}$, $\frac{1}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-1}$.
- Résoudre (E) sur les intervalles où elle peut être mise sous forme normalisée.
- Résoudre (E) sur $] -1; 1[$, puis sur $\mathbb{R}$.

139 Mines-Télécom PSI 2024 Clément Lacoste I

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t)dt$.

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
- Justifier que f est solution d'une équation différentielle du second degré (E) qu'on déterminera.
- Conclure.