♠ ♡

PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2024 / 2025

♢ ♣

EXERCICES PAR THÈME

EXERCICES PAR CONCOURS

- 1 : X .... (4 exercices)

  numéros 1, 11, 80, 127

- 2 : ENS Cachan / Rennes .... (8 exercices)

  numéros 41, 49-51, 81-82, 104-105

- 3 : Centrale Maths 1 .... (30 exercices)

  numéros 2-4, 12-13, 17-18, 42-43, 52-53, 71-72, 83-88, 106-109, 128-132

- 4 : Mines .... (58 exercices)

  numéros 5-9, 14-15, 21-29, 44-47, 54-62, 73-78, 89-97, 110-120, 133-135

- 5 : CCINP .... (26 exercices)

  numéros 10, 30-35, 48, 63-68, 79, 98-101, 121-124, 136-138

- 6 : Mines-Télécom .... (13 exercices)

  numéros 16, 36-40, 69-70, 102-103, 125-126, 139

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 1
INTÉGRALE ET ANALYSE

1 Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. En prenant $\varepsilon = q > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]-\eta,\eta[,\ |f'(x) - f'(0)| < \varepsilon = q \Longrightarrow f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]-\eta;\eta[$. Posons $m = \mathrm{Min}(-f(-\eta), f(\eta)) > 0$. Si, par exemple, $m = f(\eta)$ (l'autre cas est similaire), par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel qu'on note $-\alpha \in [-\eta;0[$ (avec $0 < \alpha < \eta$) tel que $f(-\alpha) = -m$ car f réalise une bijection entre $[-\eta;0]$ et $[f(-\eta);0]$ qui contient $-m$ (faire un dessin).

En posant $\beta = \eta > 0$, on a donc $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $m > 0$ tels que f réalise une bijection strictement croissante entre $]-\alpha;\beta[$ et $]-m;m[$. Notons encore f cette restriction de la fonction initiale et posons $\psi = f^{-1}\circ(-f)$. On le peut car $-f$ réalise une bijection strictement décroissante de $]-\alpha;\beta[$ dans $]-m;-(-m)[=]-m;m[$ et que f^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $]-m;m[$ dans $]-\alpha;b[$. Par conséquent, par composition, ψ réalise une bijection strictement décroissante de $]-\alpha;\beta[$ dans $]-\alpha;\beta[$ et on a $\forall x \in]-\alpha;\beta[,\ \psi(x) = f^{-1}\circ(-f(x))$ donc $f(\psi(x)) = -f(x)$ et on a bien $f(x) = -f(\psi(x))$.

b. Comme $\forall x \in]-\alpha;\beta[,\ f'(x) > 0$, la fonction bijective $f^{-1} :]-\alpha;\beta[\to]-\alpha;\beta[$ est aussi de classe C^1 et ψ est donc de classe C^1 par composition. De plus, $\forall x \in]-\alpha;\beta[,\ \psi'(x) = -f'(x) \times \dfrac{1}{f'(f^{-1}(-f(x)))}$.

Enfin, ψ est involutive car $\forall x \in]-\alpha;\beta[,\ \psi^2(x) = f^{-1}\circ(-f(f^{-1}\circ(-f(x)))) = f^{-1}(-(-f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$.

2 **a.** L'ensemble E est inclus dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et il est non vide car la fonction nulle, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$, vérifie $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$. De plus, soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f,g) \in E^2$, il existe par définition des réels positifs α et β tels que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x^\beta g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Supposons par exemple que $\alpha \leqslant \beta$, comme la fonction $x \mapsto x^{\alpha-\beta}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ car $\alpha - \beta \leqslant 0$, on a $x^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda x^\alpha f(x) + \mu x^{\alpha-\beta}x^\beta g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lambda f + \mu g \in E$ car cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ donc est lui-même un espace vectoriel.

b. D'abord, pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $h : t \mapsto e^{-t}f(t)$ est continue sur $[x;+\infty[$. Par définition de E, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $h(t) = t^{-\alpha}e^{-t}t^\alpha f(t) \underset{+\infty}{=} o(t^{-\alpha}e^{-t}) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$. Par comparaison à une intégrale de référence, h est intégrable sur $[x;+\infty[$ donc g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Par Chasles, pour $x \in \mathbb{R}_+$, il vient $g(x) = e^x\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt - e^x\int_0^x e^{-t}f(t)dt$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t}f(t)dt$ est de classe C^1 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et $H(x) = h(x)$. Ainsi, par opérations, g est de classe C^1 et g est solution de (E_f) sur $\mathbb{R}_+$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = e^x\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt - e^x\int_0^x e^{-t}f(t)dt - e^xe^{-x}f(x) = g(x) - f(x)$.

Comme les solutions réelles de l'équation homogène $(E_{f,0})\ :\ y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ sont toutes les fonctions $z_\lambda : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, par théorème de structure, les solutions réelles de (E_f) sur $\mathbb{R}_+$ sont toutes les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \left(\lambda + \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt\right)e^x$. On a $y_0 = g$, vérifions que $g \in E$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|x^\alpha g(x)| = \left|x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt\right| \leqslant x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} t^{-\alpha}e^{-t}|t^\alpha f(t)|dt$ par inégalité triangulaire. Soit $\varepsilon > 0$, comme $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall t \geqslant A,\ |t^\alpha f(t)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, dès que $x \geqslant A$, on a $|x^\alpha g(x)| \leqslant \varepsilon x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} t^{-\alpha}e^{-t}dt \leqslant \varepsilon x^\alpha e^x x^{-\alpha} \int_x^{+\infty} e^{-t}dt$ car $\forall t \geqslant x,\ t^{-\alpha} \leqslant x^{-\alpha}$ car $\alpha \geqslant 0$. Comme $\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_x^{+\infty} = e^{-x}$, on a donc $\forall x \geqslant A,\ |x^\alpha g(x)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $x^\alpha g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $g \in E$. Or $x \mapsto e^x$ n'appartient pas à E car $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+,\ x^\alpha e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc y_λ n'appartient à E que si $\lambda = 0$ et on peut donc conclure que $g : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ est l'unique solution de (E_f) appartenant à E.

Pour terminer, on peut établir que $E = F = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \mid f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$. En effet :

($\subset$) Soit $f \in E$, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) = x^{-\alpha}(x^\alpha f(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $x \mapsto x^{-\alpha}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ car $\alpha \geqslant 0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a bien $f \in F$.

($\supset$) Soit $f \in F$, alors $f(x) = x^0 f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f \in E$ car f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

La définition de E est donc un peu bizarre mais c'est pour vous faire travailler sur les majorations d'intégrales.

3 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_x : t \mapsto \sin^x(t)$ est continue sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $f(x) = \int_0^{\pi/2} f_x(t)dt$ existe. Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, la fonction $f_x : t \mapsto \sin^x(t)$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f_x(t) \underset{0}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ donc, comme f_x est positive et par critère de Riemann, $\int_0^{\pi/2} f_x(t)t$ converge si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$. Par conséquent, le domaine de définition D_f de f vaut $D_f =]-1;+\infty[$.

b. Pour $x > 0$, les fonctions $u_x : t \mapsto \sin^x(t)$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\lim_{t\to0^+} u_x(t)v(t) = 0$ donc $f(x+1) = \int_0^{\pi/2} u_x(t)v'(t)dt = [u_x(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{+\infty} u_x'(t)v(t)dt$ par intégration par parties d'où $f(x+1) = x\int_0^{\pi/2} \sin^{x-1}(t)\cos^2(t)dt$. Ainsi, $f(x+1) = x\int_0^{\pi/2} \sin^{x-1}(t)(1-\sin^2(t))dt$ ce qui donne $f(x+1) = x\big(f(x-1) - f(x+1)\big)$ par linéarité de l'intégrale (les deux convergent) donc $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$ ce qui donne $(x+1)f(x+1)f(x) = xf(x)f(x-1)$ d'où $\Phi(x+1) = \Phi(x)$.

c. Pour $(x,y) \in (D_f)^2$ tel que $x < y$, comme $\forall t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \leqslant 1$, on a $\sin^x(t) \geqslant \sin^y(t)$ donc, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geqslant f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur D_f ce qui entraîne, par positivité de f, que $f(x)f(x-1) \geqslant f(y)f(y-1)$ si $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x < y$. La fonction $x \mapsto \frac{\Phi(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. D'après la question **b.** et par une récurrence facile, Φ est constante sur les entiers naturels non nuls et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi(n) = \phi(1) = f(0)f(1) = \frac{\pi}{2} \times [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$. De plus, soit $x > 1$, on a $\lfloor x\rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x\rfloor + 1$ par définition de la partie entière donc, avec la question **c.**, $\frac{\Phi(\lfloor x\rfloor+1)}{\lfloor x\rfloor+1} \leqslant \frac{\Phi(x)}{x} \leqslant \frac{\Phi(\lfloor x\rfloor)}{\lfloor x\rfloor}$ qui devient, comme on a $\lfloor x\rfloor > 0$, $\frac{x}{\lfloor x\rfloor+1} \times \frac{\pi}{2} \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{x}{\lfloor x\rfloor} \times \frac{\pi}{2}$. Or $1 \leqslant \frac{x}{\lfloor x\rfloor} \leqslant 1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor} = 1 + \frac{1}{x-1}$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\lfloor x\rfloor} = 1$ par encadrement. De même, il vient $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\lfloor x\rfloor+1} = 1$ donc, par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \frac{\pi}{2}$. Enfin, pour un réel $x > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \Phi(x+n) = \Phi(x)$ avec la question **b.** donc, comme $\lim_{n\to+\infty} \Phi(x+n) = \frac{\pi}{2}$ par caractérisation séquentielle de la limite, $\Phi(x) = \frac{\pi}{2}$. La fonction Φ est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ où elle vaut $\frac{\pi}{2}$.

e. Comme f est décroissante sur D_f, pour $x > 0$, on a $f(x+1) \leqslant f(x) \leqslant f(x-1)$ donc, comme $f(x) > 0$, on a l'encadrement $f(x+1)f(x) \leqslant f(x)^2 \leqslant f(x)f(x-1)$ et, avec la question précédente, $\frac{\pi}{2(x+1)} \leqslant f(x)^2 \leqslant \frac{\pi}{2x}$.

Comme $\dfrac{\pi}{2(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$ et que $f(x) > 0$, par encadrement, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

4 **a.** Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $f_z : t \mapsto e^{-zt}$ pour tout l'exercice. Traitons quatre cas :

- Si $z = 0$, la fonction f_z est constante et vaut 1 donc f_z admet une limite finie $\ell = 1$ en $+\infty$.
- Si $\mathrm{Re}\,(z) > 0$, comme $|f_z(t)| = e^{-\mathrm{Re}\,(z)t}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} |f_z(t)| = 0$ donc f_z admet une limite finie $\ell = 0$ en $+\infty$.
- Si $\mathrm{Re}\,(z) < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} |f_z(t)| = +\infty$ car $|f_z(t)| = e^{-\mathrm{Re}\,(z)t}$ donc f_z n'admet pas de limite finie en $+\infty$.
- Si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, supposons que f_z admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$, par caractérisation séquentielle de la limite, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} f_z\left(\dfrac{n\pi}{|\,\mathrm{Im}(z)|}\right) = \ell$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\pi}{|\,\mathrm{Im}(z)|} = +\infty$, ce qui s'écrit aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\pm in\pi} = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n = \ell$, et c'est absurde.

Ainsi, $t \mapsto e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ ou $z = 0$.

b. Comme $|f_z(t)| = |e^{-\mathrm{Re}\,(z)t - i\,\mathrm{Im}(z)t}| = e^{-\mathrm{Re}\,(z)t}$, qu'on sait, pour $a \in \mathbb{R}$, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}dt$ converge si et seulement si $a < 0$ d'après le cours, et que f_z est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f_z est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$, la fonction $g_z : t \mapsto e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $z = 0$, g_z est constante et vaut 1 donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)dt = \int_0^{+\infty} 1dt$ diverge.
- Si $z \neq 0$, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x e^{-zt}dt = \left[-\frac{e^{-zt}}{z}\right]_0^x = \frac{1-e^{-zx}}{z}$. Ainsi, avec la question **a.**, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-zt}dt$ admet une limite finie en $+\infty$ par définition, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}dt$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.

d. Comme $h : t \mapsto e^{-z_0 t}f(t)$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car c'est la primitive de h qui s'annule en 0. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t}f(t)dt$ converge par hypothèse, la fonction F admet une limite finie en $+\infty$ par définition. Comme F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t}f(t)dt$ en $+\infty$, il est classique que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$. En effet, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant A,\ |F(x) - I| \leqslant \varepsilon = 1$ ce qui montre que $|F(x)| = |(F(x) - I) + I| \leqslant |F(x) - I| + |I| \leqslant |I| + 1$. Comme F est continue sur le segment $[0; A]$, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [0; A],\ |F(x)| \leqslant M$. Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |F(x)| \leqslant \mathrm{Max}(|I| + 1, M)$ et F est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$.

e. La fonction $a_z : t \mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|a_z(t)| = |e^{-(z-z_0)t}||F(t)| \underset{+\infty}{=} O\big(|e^{-(z-z_0)t}|\big)$ d'après la question précédente donc, d'après la question **b.** et par comparaison car $\mathrm{Re}\,(z - z_0) > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_z(t)|dt$ converge donc a_z est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

f. Comme $z \neq z_0$, en posant $u : t \mapsto -\dfrac{e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0}$ et $v = F$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ d'après **d.** et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ d'après **d.** car F est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-(z-z_0)t}$ puisque $\mathrm{Re}\,(z - z_0) > 0$. Par intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0} \times (e^{-z_0 t}f(t))dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt$ ont même nature. Or $t \mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

d'après **e.** et $\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt$ converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-(z-z_0)t}}{z-z_0} \times (e^{-z_0 t}f(t))dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-zt}f(t)}{z-z_0}dt$ converge et on a la relation $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-zt}f(t)}{z-z_0}dt = 0 - \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt$ car $F(0) = 0$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)dt = (z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt$.

Questions supplémentaires :

• Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$, $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe C^{n+1} avec $n \in \mathbb{N}$, on a la formule de Taylor reste intégral, $f(b) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\Big) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

• Avec ces conditions, on note $M_{n+1} = \underset{x \in \widetilde{[a;b]}}{\mathrm{Max}} |f^{(n+1)}(t)|$ (qui existe car $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $\widetilde{[a;b]}$) et on a l'inégalité de Taylor-Lagrange $\Big|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!}\Big| \leqslant \frac{M_{n+1}|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

5 La fonction $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$ est continue sur $[1;+\infty[$. De plus, $\mathrm{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^3)$ et, en intégrant ce développement limité, on a $\mathrm{Arcsin}(y) \underset{0}{=} y + \frac{y^3}{6} + o(y^4)$ car $\mathrm{Arcsin}(0) = 0$. Ainsi, on obtient $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ce qui montre que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^3}$. Par comparaison aux intégrales de Riemann, on en déduit que la fonction f est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Méthode 1 : dans $I = \int_1^{+\infty} \left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)dx$, on pose $u : x \mapsto x$ et $v = f$ qui sont de classe C^1 sur $]1;+\infty[$ et, comme $\lim_{x \to 1^+} u(x)v(x) = f(1) = \frac{\pi}{2} - 1$ par continuité de Arcsin en 1 et $\lim_{x \to +\infty} u(x)v(x) = 0$ car $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^2}$, on obtient la relation $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} xf'(x)dx = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} x\left(\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)\right)dx$ ce qui se simplifie en $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$. On pose ensuite $x = \frac{1}{\sin(u)} = \varphi(u)$ avec φ bijection strictement décroissante de classe C^1 de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $]1;+\infty[$ et $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_{\pi/2}^{0} \sin(u)\left(\frac{\cos(u)-1}{\cos(u)}\right)\left(-\frac{\cos(u)}{\sin^2(u)}\right)du$. Ainsi, $I = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(u)}{\sin(u)}du = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2(u/2)}{2\sin(u/2)\cos(u/2)}du = 1 - \frac{\pi}{2} + \Big[-2\ln(\cos(u/2))\Big]_0^{\pi/2}$ et enfin $I = 1 + \ln(2) - \frac{\pi}{2} \sim 0,12$.

Méthode 2 : dans $I = \int_1^{+\infty} \left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)dx$, on pose $\theta = \mathrm{Arcsin}(1/x)$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{\sin(\theta)} = \varphi(\theta)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[1;+\infty[$. Par changement de variable, il vient $I = \int_{\pi/2}^{0} (\theta - \sin(\theta))\left(-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}\right)d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\theta\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)d\theta$. Les deux fonctions $a : \theta \mapsto \frac{\theta\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}$ et $b : \theta \mapsto \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ne sont pas intégrables en 0^+ car $a(\theta) \underset{0}{\sim} b(\theta) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\theta}$. Par contre, on peut écrire $I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\theta\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}d\theta - \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}d\theta\right)$ car, pour $\varepsilon \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, les deux fonctions a et b sont continues sur le segment $\left[\varepsilon;\frac{\pi}{2}\right]$. Or $\int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}d\theta = [\ln(\sin(\theta))]_\varepsilon^{\pi/2} = -\ln(\sin(\varepsilon))$ et, en posant les fonctions $u : \theta \mapsto \theta$ et $v : \theta \mapsto -\frac{1}{\sin(\theta)}$ qui sont de classe C^1 sur $\left[\varepsilon;\frac{\pi}{2}\right]$, par intégration par parties, $\displaystyle\int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\theta\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}d\theta = \left[-\frac{\theta}{\sin(\theta)}\right]_\varepsilon^{\pi/2} + \int_\varepsilon^{\pi/2}\frac{1}{\sin(\theta)}d\theta = -\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} + \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]_\varepsilon^{\pi/2}$ ce qui donne $\displaystyle\int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\theta\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}d\theta = -\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} - \ln\left(\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. Alors, en regroupant les termes, on parvient à $\displaystyle\int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\theta\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}d\theta - \int_\varepsilon^{\pi/2}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}d\theta = -\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} - \ln\left(\frac{\tan(\varepsilon/2)}{\sin(\varepsilon)}\right)$. Comme $\sin(\varepsilon)\underset{0}{\sim}\varepsilon$ et $\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\underset{0}{\sim}\frac{\varepsilon}{2}$, en passant à la limite quand ε tend vers 0^+, on a $I = 1+\ln(2)-\frac{\pi}{2}\sim 0,12$.

6 **a.** La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[x;+\infty[$ pour $x>0$ et $g(t)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où g est intégrable sur $[x;+\infty[$ ce qui montre que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme, pour $x>0$, on a $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}g(t)dt-\int_1^x g(t)dt$ et que $x\mapsto\displaystyle\int_1^x g(t)dt$ est la primitive de g qui s'annule en 1 par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0,\ f'(x)=-g(x)=-\dfrac{\sin(x)}{x^2}$.

b. La fonction $h : u\mapsto\dfrac{\sin(u)}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0)=1$ car $\sin(u)\underset{0}{\sim}u$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ converge. Posons les fonctions $a : u\mapsto -\cos(u)$ et $b : u\mapsto\dfrac{1}{u}$ qui sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et vérifient $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}a(u)b(u)=0$ donc, par intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}a'b=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}ab'=\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u^2}du$ sont de même nature. Or la seconde est absolument convergente car $d : u\mapsto\dfrac{\cos(u)}{u^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $d(u)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{u^2}\right)$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ converge (mais pas absolument) et on pose $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$.

c. Pour $x>0$, $f(x)=\displaystyle\int_x^1\frac{\sin(t)}{t^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt=-\int_1^x\frac{dt}{t}+\int_x^1\frac{\sin(t)-t}{t^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt$. La fonction $h : t\mapsto\dfrac{\sin(t)-1}{t^2}$ est continue sur $[0;1]$ en la prolongeant par continuité en 0 en posant $h(0)=0$ car $\sin(t)-t\underset{0}{\sim}-\dfrac{t^3}{6}$ donc $h(t)\underset{0}{\sim}-\dfrac{t}{6}$. Comme h est négative sur $[0;1]$ par concavité de $\sin$ sur $[0;1]$, on a $\forall x\in]0;1]$, $\left|\displaystyle\int_x^1 h(t)dt\right|=-\int_x^1 h(t)dt\leqslant\int_x^1||h||_{\infty,[0;1]}dt=||h||_{\infty,[0;1]}$ car h est continue sur le segment $[0;1]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes. Par conséquent, $f(x)\underset{0}{=}-\ln(x)+O(1)$ qui montre, comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$, que $f(x)\underset{0}{=}-\ln(x)+o(\ln(x))$ donc que $f(x)\underset{0}{\sim}-\ln(x)$.

d. Pour $x>0$, par inégalité triangulaire, il vient $|f(x)|=\left|\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt\right|\leqslant\int_x^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t^2}dt\leqslant\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ donc $|f(x)|\leqslant\left[-\dfrac{1}{t}\right]_x^{+\infty}=\dfrac{1}{x}$ et on a bien $f(x)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x}\right)$.

e. Dans l'expression de $f(x)$, on pose $u : t\mapsto-\cos(t)$ et $v : t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ qui sont de classe C^1 sur $[x;+\infty[$ et vérifient $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$ donc $f(x)=\displaystyle\int_x^{\infty}u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]_x^{+\infty}-\int_x^{+\infty}u(t)v'(t)dt$ par intégration par parties d'où $f(x)=\dfrac{-\cos(x)}{x^2}-2\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^3}dt$. Or, comme avant, $\left|\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^3}dt\right|\leqslant\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^3}dt=\frac{1}{2x^2}$ donc, puisque $\dfrac{-\cos(x)}{x^2}\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^3}dt\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, par somme, on obtient $f(x)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

f. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puisqu'elle y est de classe C^1, $f(x)\underset{0}{\sim}-\ln(x)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f est intégrable en 0^+ et en $+\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

g. Dans l'expression de $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$, on pose $u : x \mapsto x$ et $v = f$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.** et que $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)$ d'après **c.** et **e.** et par croissances comparées car $u(x)v(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ et $u(x)v(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi, par intégration par parties, comme on sait d'après **f.** que ces intégrales convergent, $I = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx = 0 - \int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = J$.

En supposant pouvoir intervertir les intégrales double avec le théorème de FUBINI, on trouve (mais sans preuve) $I = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt\right)dx = \iint_{0<x<t} g(t)dtdx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t g(t)dx\right)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = J$. Il se trouve que cette intégrale, dite de DIRICHLET, a pour valeur $\frac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire !

7 **a.** Pour $x \in D$, comme $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = |x - e^{i\theta}|^2 > 0$ car $x \neq \pm 1$, la fonction $f_x : \theta \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)$ est continue sur le segment $[0; 2\pi]$ donc $I(x)$ existe.

b. Comme $X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 = \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, et que les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont les n racines n-ièmes de l'unité, comme les $e^{\frac{-2ik\pi}{n}}$, on peut factoriser $P_n = (X^n - 1)^2$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de RIEMANN $R_n(x) = \frac{2\pi - 0}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_x\left(0 + \frac{k(2\pi - 0)}{n}\right)$ associée à la fonction f_x continue sur le segment $[0; 2\pi]$. D'après le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = \int_0^{2\pi} f_x(\theta)d\theta$. Avec la question précédente, $R_n(x) = \frac{2\pi}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\left((x - e^{\frac{2ik\pi}{n}})(x - e^{\frac{-2ik\pi}{n}})\right) = \frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)\right) = \frac{4\pi}{n}\ln(|x^n - 1|)$.

- Si $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4\pi}{n}\ln(|x^n - 1|) = 0 \times 0 = 0$. Ainsi, $I(x) = 0$.
- Si $|x| > 1$, on a $R_n(x) = \frac{4\pi}{n}\ln\left(|x|^n.|1 - x^{-n}|\right) = 4\pi\ln(|x|) + \frac{4\pi}{n}\ln\left(|1 - x^{-n}|\right)$ donc $I(x) = 4\pi\ln(|x|)$.

8 Petit rappel .... ou pas : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x^z = e^{(a+ib)\ln(x)} = e^{a\ln(x)}e^{ib\ln(x)} = x^a(\cos(b\ln(x)) + i\sin(b\ln(x)))$. Ainsi, $|x^z| = x^a = x^{\mathrm{Re}\,(z)} > 0$.

a. Si $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{1}{k^s}\right| = \frac{1}{k^{\mathrm{Re}\,(s)}}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^{\mathrm{Re}\,(s)}}$ converge d'après le cours donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^s}$ converge absolument donc elle converge, ce qui assure que la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k^s}\right)_{N\geqslant 1}$ converge. De plus, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{N^{1-s}}{1-s}\right| = \frac{N^{1-\mathrm{Re}\,(s)}}{|1-s|} = \frac{1}{|1-s|N^{\mathrm{Re}\,(s)-1}}$ et $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{|1-s|N^{\mathrm{Re}\,(s)-1}} = 0$ car $\mathrm{Re}\,(s) > 1$. Par différence de suites convergentes, la suite $(S_N(s))_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge, ce qui assure l'existence de $\zeta(s)$ (la fonction de RIEMANN définie dans le cours si $s > 1$ est réel).

b. Avec $s \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, la fonction $g_s : t \mapsto \frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}$ est continue par morceaux sur le segment $[1; N+1]$ donc $\int_1^{N+1}\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}dt$ existe. Avec la relation de CHASLES, et comme g_s est constante sur l'intervalle $[k; k+1[$ et vaut $\frac{1}{k^s}$ pour $k \in [\![1; N]\!]$, on a $\int_1^{N+1}\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}dt = \sum\limits_{k=1}^{N}\int_k^{k+1}\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}dt = \sum\limits_{k=1}^{N}\int_k^{k+1}\frac{1}{k^s}dt = \sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k^s}$.

c. On suppose $a = \mathrm{Re}\,(s) > 0$ et on pose $b = \mathrm{Im}\,(s)$, la fonction $h_s : t \mapsto \frac{1}{t^s} - \frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}$ est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$ puisqu'elle l'est sur tout segment inclus dans $[1; +\infty[$. Pour $t \in [1; +\infty[$, il vient $h_s(t) = \frac{1}{t^{a+ib}} - \frac{1}{\lfloor t\rfloor^{a+ib}} = \frac{\lfloor t\rfloor^{a+ib} - t^{a+ib}}{t^{a+ib}\lfloor t\rfloor^{a+ib}}$ donc $|h_s(t)| = \frac{\left|\lfloor t\rfloor^a e^{ib\ln(\lfloor t\rfloor)} - t^a e^{ib\ln(t)}\right|}{t^a\lfloor t\rfloor^a}$ qu'on peut écrire $|h_s(t)| = \dfrac{\left|\lfloor t\rfloor^a e^{ib\ln\left(\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\right)} - t^a\right|}{t^a\lfloor t\rfloor^a} = \dfrac{\left|\left(\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\right)^a e^{ib\ln\left(\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\right)} - 1\right|}{\lfloor t\rfloor^a}$. De plus, par définition de la partie entière, pour un réel $t > 1$, on a $0 < t-1 < \lfloor t\rfloor \leqslant t$ donc $\lfloor t\rfloor \underset{+\infty}{\sim} t$ d'où $\lfloor t\rfloor^a \underset{+\infty}{\sim} t^a$ et, en posant $\{t\} = t - \lfloor t\rfloor \in [0;1[$ la partie fractionnaire de t, on a $\dfrac{\lfloor t\rfloor}{t} = \dfrac{t-\{t\}}{t} = 1 - y \underset{+\infty}{\sim} 1 + O\left(\dfrac{1}{t}\right)$ en notant $y = \dfrac{\{t\}}{t} \in \left[0;\dfrac{1}{t}\right[$ et $|h_s(t)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\left|\left(\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\right)^a e^{ib\ln\left(\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\right)} - 1\right|}{t^a} = \dfrac{\left|(1-y)^a e^{ib\ln(1-y)} - 1\right|}{t^a}$ et on arrive à $|h_s(t)| \underset{+\infty}{=} \dfrac{\left|(1-ay+o(y))e^{ib(-y+o(y))} - 1\right|}{t^a} \underset{+\infty}{=} \dfrac{\left|(1-ay+o(y))(1-iby+o(y)) - 1\right|}{t^a} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^{a+1}}\right)$. Alors, par critère de Riemann, h_s est intégrable sur $[1;+\infty[$ car $a+1 > 1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^s} - \frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}\right)dt$ existe.

Si s était un réel différent de 1, on aurait directement $\dfrac{N^{1-s}-1}{1-s} = \displaystyle\int_1^N t^{-s}dt = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^N$. Vérifions que cette relation est vraie même si s est complexe. Pour $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $f_z : t \mapsto t^z = t^\alpha e^{i\beta\ln(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall t > 0,\ f_z'(t) = \alpha t^{\alpha-1}e^{i\beta\ln(t)} + t^\alpha\left(\dfrac{i\beta}{t}\right)e^{i\beta\ln(t)} = \dfrac{\alpha+i\beta}{t}t^\alpha e^{i\beta\ln(t)}$ donc $f_z'(t) = zf_{z-1}(t)$ donc, par le théorème fondamental de l'intégration, en prenant $z = 1-s \in \mathbb{C}^*$, on obtient $\displaystyle\int_1^N t^{-s}dt = \int_1^N f_{z-1}dt = \left[\frac{f_z(t)}{z}\right]_1^N = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^N = \frac{N^{1-s}-1}{1-s}$.

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(s) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}\right) - \frac{N^{1-s}}{1-s} = \int_1^{N+1}\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}dt - \int_1^N t^{-s}dt - \frac{1}{1-s}$ qui s'écrit aussi, par linéarité de l'intégrale et Chasles, $S_N(s) = \displaystyle\int_N^{N+1}\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}dt + \int_1^N\left(\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s} - \frac{1}{t^s}\right)dt - \frac{1}{1-s}$.

Comme $\left|\displaystyle\int_N^{N+1}\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}dt\right| = \left|\int_N^{N+1}\frac{1}{N^s}dt\right| = \left|\frac{1}{N^s}\right| = \frac{1}{N^{\mathrm{Re}(s)}}$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_N^{N+1}\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}dt = 0$ car $\mathrm{Re}(s) > 0$ et, avec la convergence précédente, $(S_N(s))_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge donc $\zeta(s)$ existe et, comme $\zeta(s) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N(s)$, on obtient la relation $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s} - \frac{1}{t^s}\right)dt$.

9 **a.** Avec ces conditions, on a $y' \leqslant 0$ car y est dérivable et décroissante mais aussi, d'après le cours, comme y est convexe, on a y' croissante. De plus, avec le théorème de la limite monotone, comme y est décroissante et minorée par 0, y admet une limite finie en $+\infty$ qu'on note $\ell = \displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) \geqslant 0$. Pour $t > 0$, par croissance de l'intégrale, comme $\forall u \in [t;2t],\ y'(t) \leqslant y'(u) \leqslant y'(2t)$, on a $\displaystyle\int_t^{2t} y'(t)du \leqslant \int_t^{2t} y'(u)dt \leqslant \int_t^{2t} y'(2t)du$ donc $(2t-t)y'(t) \leqslant y(2t) - y(t) = [y(u)]_t^{2t} = \displaystyle\int_t^{2t} y'(u)du \leqslant (2t-t)y'(2t) = ty'(2t) \leqslant 0$ par croissance de l'intégrale. Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} y(2t) = \ell$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}(y(2t)-y(t)) = \ell - \ell = 0$. Par encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} ty'(2t) = 0$ puis $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 2ty'(2t) = 0$ et, par changement de variable, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xy'(x) = 0$.

b. Tout d'abord, comme y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, par théorème fondamental de l'analyse, on a la relation $y(t) - y(0) = \displaystyle\int_0^t y'(u)du$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$. De plus, $y'' = qy$ est continue donc y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ donc on peut poser $u = y'$ et $v : t \mapsto t$ qui sont de classe C^1 sur $[0;t]$ pour avoir, par intégration par parties, la relation $y(t) - y(0) = [uy'(u)]_0^t - \displaystyle\int_0^t uy''(u)du = ty'(t) - \int_0^t uq(u)y(u)du$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. Comme $y'' = qy$ est positive, y est convexe et y' est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. On a forcément y décroissante car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ donc, d'après **a.**, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} ty'(t) = 0$.

$(\Longleftarrow)$???

10 **a.** La fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ et l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge. Ainsi, par comparaison, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge pour tout $x > 0$ ce qui montre que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par CHASLES, $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt$. En posant $G : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \displaystyle\int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt$, la fonction G est la primitive de g qui s'annule en 1 par le théorème fondamental de l'intégration car g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, comme $f = G(1) - G$, par opérations, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = -G'(x) = -g(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.

b. <u>Méthode 1</u> : pour $x > 0$, comme $\forall t \geqslant x,\ \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc $\dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x}$ car $e^{-t} > 0$, par croissance de l'intégrale, on a $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{1}{x}[-e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}$.

<u>Méthode 2</u> : soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - f(x)$. D'après **a.**, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x} - \dfrac{e^{-x}}{x^2} + \dfrac{e^{-x}}{x} = -\dfrac{e^{-x}}{x^2} < 0$ donc g est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ en tant que reste d'une intégrale convergente, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ donc g reste positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui montre que $\forall x > 0,\ f(x) \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x}$.

c. Pour $x > 0$, on pose $u : t \mapsto e^{-t}$ et $v : t \mapsto \ln(t)$. Comme les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient, par intégration par parties, la relation $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} u'(t)v(t))dt = -e^{-x}\ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.

d. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après **b.**, $f(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ donc, comme en **a.**, f est intégrable en $+\infty$. Soit $h : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t/2})$ par croissances comparées donc h est intégrable en $+\infty$. De plus, $h(t) \underset{0}{\sim} \ln(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et l'intégrale de RIEMANN $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge donc, par comparaison, h est intégrable en 0^+. Par conséquent, h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, $\forall x > 0,\ \Big|\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)dt\Big| \leqslant \int_x^{+\infty} |h(t)|dt \leqslant \int_0^{+\infty} |h(t)|dt$ ce qui montre que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit avec **c.** que $f(x) \underset{0}{=} -e^{-x}\ln(x) + O(1) \underset{0}{=} -e^{-x}\ln(x) + o(e^{-x}\ln(x))$ qui s'écrit aussi $f(x) \underset{0}{\sim} -e^{-x}\ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ et f est donc intégrable en 0^+. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v = f$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ car $u(x)v(x) = xf(x) \underset{0}{\sim} x\ln(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ car $0 \leqslant u(x)v(x) = xf(x) \leqslant e^{-x}$ avec la question **b.** et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ (encadrement). Ainsi, par intégration par parties, on obtient la valeur $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

Avec FUBINI (HP), $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\Big(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt\Big)dx = \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{t} \frac{e^{-t}}{t}dx\Big)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 2 ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

11 Méthode 1 : On va montrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathcal{F}$ vérifiant ces conditions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est toujours finie et que son cardinal est inférieur à 2^n.

Initialisation : si $n = 1$, les seules matrices $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = I_1$ sont $A = (1)$ et $A = (-1)$. Alors, $\mathcal{F}$ comporte donc 1 ou 2 éléments, en prenant $\mathcal{F} = \{(1)\}$, $\mathcal{F} = \{(-1)\}$ ou $\mathcal{F} = \{(1), (-1)\}$ et on a $\text{card}(\mathcal{F}) \leqslant 2$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille $\mathcal{F}$ contenant des matrices de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ avec $k \in [\![1;n]\!]$ et vérifiant les hypothèses de l'énoncé est finie et de cardinal inférieur à 2^k. On prend maintenant une famille non vide $\mathcal{F} = (A_i)_{i\in I} \in \big(\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})\big)^I$ telle que $\forall i \in I,\ A_i^2 = I_{n+1}$ et $\forall (i,j) \in I^2,\ A_iA_j = A_jA_i$:

- Si $\mathcal{F} = \big(I_{n+1}\big)$ ou $\mathcal{F} = \big(-I_{n+1}\big)$ ou $\mathcal{F} = \big(I_{n+1}, -I_{n+1}\big)$, alors $\mathcal{F}$ est finie et $\text{card}(\mathcal{F}) \leqslant 2 \leqslant 2^{n+1}$.
- Si $\mathcal{F} \neq \big(I_{n+1}\big)$ et $\mathcal{F} \neq \big(-I_{n+1}\big)$ et $\mathcal{F} \neq \big(I_{n+1}, -I_{n+1}\big)$ (ou dans l'autre ordre bien sûr), il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $A_{i_0} \neq \pm I_{n+1}$. Comme A_{i_0} est une symétrie, on a $\mathbb{C}^{n+1} = E_1(A_{i_0}) \oplus E_{-1}(A_{i_0})$ avec $1 \leqslant p = \dim\big(E_1(A_{i_0})\big) \leqslant n-1$ et $1 \leqslant q = \dim\big(E_{-1}(A_{i_0})\big) \leqslant n-1$ car $A_{i_0} \neq \pm I_{n+1}$. Pour tout $i \in I$, $A_iA_{i_0} = A_{i_0}A_i$ donc les sous-espaces propres $E_1(A_{i_0})$ et $E_{-1}(A_{i_0})$ de la symétrie A_{i_0} sont stables par A_i. Soit une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^{n+1} = E_1(A_{i_0}) \oplus E_{-1}(A_{i_0})$. Notons P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$ et la base $\mathcal{B}$. Les stabilités de $E_1(A_{i_0})$ et $E_{-1}(A_{i_0})$ par tous les A_i se traduisent par le fait que $\forall i \in I,\ D_i = P^{-1}A_iP = \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix}$ car $D_i = P^{-1}A_iP$ est la matrice de l'endomorphisme a_i de $\mathbb{C}^{n+1}$ canoniquement associé à A_i dans la base $\mathcal{B}$. Comme $A_i^2 = I_{n+1}$, on a $D_i^2 = I_{n+1}$ donc $B_i^2 = I_p$ et $C_i^2 = I_q$. Or $\forall (i,j) \in I^2,\ A_iA_j = A_jA_i$ se traduit par $\forall (i,j) \in I^2,\ D_iD_j = D_jD_i$ donc $\forall (i,j) \in I^2,\ B_iB_j = B_jB_i$ et $\forall (i,j) \in I^2,\ C_iC_j = C_jC_i$.

  Ainsi, $\mathcal{F}_p = (B_i)_{i\in I} \in \big(\mathcal{M}_p(\mathbb{C})\big)^I$ est une famille telle que $\forall i \in I,\ B_i^2 = I_p$ et $\forall (i,j) \in I^2,\ B_iB_j = B_jB_i$ et $\mathcal{F}_q = (C_i)_{i\in I} \in \big(\mathcal{M}_q(\mathbb{C})\big)^I$ est une famille telle que $\forall i \in I,\ C_i^2 = I_q$ et $\forall (i,j) \in I^2,\ C_iC_j = C_jC_i$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\text{card}(\mathcal{F}_p) \leqslant 2^p$ et $\text{card}(\mathcal{F}_q) \leqslant 2^q$. Comme les matrices de $\mathcal{F}$ sont des images de couples $(B,C) \in \mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_q$ par l'application $(B,C) \mapsto P\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}P^{-1}$ qui est injective, on a $\text{card}(\mathcal{F}) \leqslant \text{card}(\varphi(\mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_q)) = \text{card}(\mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_q) = \text{card}(\mathcal{F}_p) \times \text{card}(\mathcal{F}_q) \leqslant 2^p \times 2^q = 2^{n+1}$.

Par récurrence forte, on a établi que si une famille $\mathcal{F} = (A_i)_{i\in I} \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^I$ vérifie $\forall i \in I,\ A_i^2 = I_n$ et $\forall (i,j) \in I^2,\ A_iA_j = A_jA_i$, alors cette famille est finie et $\text{card}(\mathcal{F}) \leqslant 2^n$.

Méthode 2 : montrons par récurrence sur le nombre p de matrices d'une famille de matrices de même taille $n \in \mathbb{N}^*$ (quelconque) que si une famille $\mathcal{F} = (A_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de p matrices ne contient que des matrices diagonalisables qui commutent deux à deux, alors il existe une base de $\mathbb{K}^n$ (et donc $P \in GL_n(\mathbb{K})$) formée de vecteurs propres de toutes ces matrices (telle que $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $P^{-1}A_iP$ est diagonale).

Initialisation : si $p = 1$, il n'y a qu'une matrice $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans la famille $\mathcal{F} = (A_1)$ et l'existence de

$P \in GL_n(\mathbb{K})$ provient de l'hypothèse que A est diagonalisable.

<u>Hérédité</u> : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille de p matrices de même taille n (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$) qui sont diagonalisables et qui commutent deux à fois codiagonalisent. Soit $\mathcal{F} = (A_1, \cdots, A_{p+1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{p+1}$ telle que $A_1, \cdots, A_{p+1}$ sont diagonalisables et commutent deux à deux. Comme A_{p+1} est diagonalisable, $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A_{p+1}. Comme $A_1, \cdots, A_p$ commutent avec A_{p+1}, les sous-espaces propres de A_{p+1} sont stables par $A_1, \cdots, A_p$ et les endomorphismes induits par $A_1, \cdots, A_p$ sur $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ (pour $i \in [\![1; r]\!]$) sont diagonalisables car $A_1, \cdots, A_p$ le sont.

Par hypothèse de récurrence, comme les endomorphismes induits par $A_1, \cdots, A_p$ dans $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ sont tous diagonalisables et commutent deux à deux, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ qui est une base de vecteurs propres communs à tous ces endomorphismes induits.

Posons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{B}_r$, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ car $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ et les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de $A_1, \cdots, A_p$ par construction et de A_{p+1} car ce sont des vecteurs non nuls d'un $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$.
Par principe de récurrence, on a bien établi la propriété énoncé plus haut.

Dans notre cas, pour $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^I$ telle que $\forall i \in I,\ A_i^2 = I_n$ et $\forall (i,j) \in I^2,\ A_iA_j = A_jA_i$ les A_i sont diagonalisables car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples et annulateur des A_i. Le résultat prouvé ci-dessus montre que si on prend une famille finie $J \subset I$, les matrices A_j de la famille $\mathcal{F}' = (A_j)_{j \in J}$ codiagonalisent, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall j \in J,\ P^{-1}A_jP = D_j$ diagonale. Mais les D_j contiennent seulement des ± 1 sur la diagonale car $Sp(A_j) \subset \{-1, 1\}$. Il y a donc au plus 2^n matrices D_j possibles donc, par injectivité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, il y a au plus 2^n matrices A_j dans la famille $\mathcal{F}'$.
On vint donc de montrer que si $J \subset I$ est fini, alors $\mathrm{card}(J) \leqslant 2^n$. Ainsi, I est fini et $\mathrm{card}(I) \leqslant 2^n$.

12 **a.** Il est classique qu'une application lipschitzienne est continue (même uniformément pour les ex-MP2SI). Pour le prouver ici, soit $f \in E$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$ donc, par encadrement $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ce qui montre la continuité de f en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. f est donc continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $E \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
De plus, $E \neq \emptyset$ car la fonction nulle est bien continue et 0-lipschitzienne donc $0 \in E$.
Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe $(k,k') \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$ et $|g(x) - g(y)| \leqslant k'|x-y|$. La fonction $\lambda f + g$ est d'abord continue sur $\mathbb{R}$ par linéarité de la continuité et, par inégalité triangulaire, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |(\lambda f+g)(x) - (\lambda f+g)(y)| = |\lambda f(x) - \lambda f(y) + g(x) - g(y)| \leqslant |\lambda|k|x-y| + k'|x-y|$ donc $\lambda f + g$ est aussi lipschitzienne associée à la constante $|\lambda|k + k'$. E est donc stable par combinaison linéaire.
Tout ce qui précède fait de E un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc E est lui-même un espace vectoriel.
b. Définissons $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par $\varphi(f) = f(0)$. Il est clair que φ est une forme linéaire sur E, et comme $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ par définition, F est un sous-espace vectoriel de E, donc un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et enfin F est lui-même un espace vectoriel. On pouvait le faire le faire de manière plus classique.
Comme φ est non nulle car $\cos \in E$ et $\varphi(\cos) = 1$ par exemple, F est un hyperplan de E donc on attend une droite comme supplémentaire de F. Posons $G = \mathrm{Vect}(1)$ le sous-espace vectoriel des fonctions constantes. Si

$f \in F \cap G$, alors f est constante et nulle en 0 donc nulle sur $\mathbb{R}$ et $F \cap G = \{0\}$ donc F et G sont déjà en somme directe. De plus, pour $f \in E$, on peut écrire $f = f - f(0) + f(0)$ ($f(0)$ signifie ici la fonction constante valant toujours $f(0)$) et la fonction $g = f - f(0) \in F$ est toujours lipschitzienne (même constante que celle de f) et elle s'annule en 0 et $h = f(0) \in G$ de sorte que $E = F + G$. Ainsi, G est un supplémentaire de F.

c. Soit $f \in F$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. L'application g de l'énoncé est bien définie sur $\mathbb{R}$ en fonction de f et la linéarité de φ_t est claire. De plus, g est kt-lipschitzienne car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y) - f(tx) + f(ty)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |f(tx) - f(ty)| \leqslant k|x - y| + k|tx - ty|$ donc $|g(x) - g(y)| \leqslant (1 + t)k|x - y|$. Comme $g(0) = f(0) - f(0) = 0$, il vient $g = \varphi_t(f) \in F$ donc φ_t est bien un endomorphisme de F.

Si $f \in \mathrm{Ker}(\varphi_t)$, on a $\varphi_t(f) = 0$ donc, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\varphi_t(f)(x) = 0$ d'où $f(x) = f(tx) = f(t^2x) = \cdots$ ce qui donne par une récurrence simple : $\forall k \in \mathbb{N},\ f(t^k x) = f(x)$. Or $\lim\limits_{k \to +\infty} t^k x = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{k \to +\infty} f(t^k x) = f(0) = 0 = f(x)$ (suite constante). Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi_t) = \{0\}$ et φ_t est injective de F dans F.

d. Par télescopage, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(t^k x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(f(t^k x) - f(t^{k+1}x)\big) = f(x) - f(t^n x)$. À nouveau, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t^n x) = f(0) = 0$, on obtient $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$.
Réciproquement, soit $g \in F$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que g est k-lipschitzienne, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} g(t^n x)$ est absolument convergente car $|g(t^n x)| \leqslant kt^n|x|$ et que la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} kt^n x$ converge car $0 < t < 1$. Ainsi, la fonction $f : x \to \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g(t^n x)$ est bien définie, elle vérifie clairement $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - f(tx)$ par télescopage et car $\lim\limits_{n \to +\infty} g(t^n x) = g(0) = 0$. De plus, on a $f(0) = 0$ car $g(0) = 0$ et, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il vient $|f(x) - f(y)| = \Big| \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g(t^n x) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g(t^n y) \Big| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |g(t^n x) - g(t^n y)| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} kt^n|x - y| = \dfrac{k}{1-t}|x - y|$ donc $f \in F$ car f est $\dfrac{k}{1-t}$-lipschitzienne et $g = \varphi_t(f)$. On en déduit que φ_t est aussi surjective de F dans F.
Par conséquent, φ_t est un automorphisme de F.
e. Si $f \in F$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_t^2(f)(x) = \varphi_t(x) - \varphi_t(tx) = f(x) - f(tx) - (f(tx) - f(t(tx))) = f(x) - 2f(tx) + f(t^2x)$ donc l'équation de l'énoncé se traduit par $\varphi_t^2(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = h$. Or $h \in F$ et, d'après la question **d.** et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_t^{-1}(h)(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} h(t^n x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} t^n x = \dfrac{x}{1-t}$ donc $\varphi_t^{-1}(h) = \dfrac{1}{1-t}h$. Comme φ_t est bijective, on a l'équivalence $\varphi_t^2(f) = h \iff f = \varphi^{-2}(h) = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(h)) = \dfrac{h}{(1-t)^2}$. Il existe une unique fonction dans F qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x$ et c'est la fonction $f = \dfrac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}{(1-t)^2} : x \mapsto \dfrac{x}{(1-t)^2}$.

13 **a.** Si $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X + 1) = \lambda P(X + 1) + Q(X + 1) = \lambda u(P) + u(Q)$ donc u est linéaire et u va bien de E dans E, ce qui montre que u est un endomorphisme de E. Par différence d'endomorphismes, v est aussi un endomorphisme de E.

Comme u et id_E commutent, par le binôme de Newton, on a $v^n = (u - \mathrm{id}_E)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \dbinom{n}{k} u^k$. Or, par une récurrence facile, on a $u^k : P \mapsto P(X + k)$ donc, pour tout polynôme $P \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il vient la relation $v^n(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \dbinom{n}{k} u^k(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \dbinom{n}{k} P(X + k)$.

b. Pour $P \in E$ non constant qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \geqslant 1$ et $a_d \neq 0$ de sorte que $\deg(P) = d$, on a $\nu(P) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k\big((X+1)^k - X^k\big)$. Or les termes en X^k s'éliminent dans le développement de $(X+1)^k - X^k$ donc $\deg(\nu(P)) \leqslant d-1$ car tous les polynômes $D_k = a_k\big((X+1)^k - X^k\big)$ sont de degré inférieur à $k-1$ et $\deg(\nu(P)) \leqslant \mathrm{Max}\big(\deg(D_0), \cdots, \deg(D_d)\big)$.

Soit donc $p \in \mathbb{N}$ et un entier $n \geqslant p+1$, comme on perd au moins un degré en appliquant ν à chaque étape, $\deg(\nu^n(X^p)) \leqslant p - n \leqslant -1$ donc $\nu^n(X^p) = 0$ car le seul polynôme de degré négatif est le polynôme nul. On a donc, en posant $P = X^p$ dans **a.**, $\nu^n(P)(0) = 0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(0+k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p = 0$.

c. Soyons plus précis, avec les notations de la question précédente, toujours si P n'est pas constant, par le binôme de Newton, on a $\nu(P) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k\Big(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i\Big) = \sum_{0 \leqslant i < k \leqslant d} a_k\binom{k}{i}X^i$ donc $\nu(P) = \sum_{i=0}^{d-1}\Big(\sum_{k=i+1}^{d} a_k\binom{k}{i}\Big)X^i$ donc, comme le terme en X^{d-1} de polynôme est $\binom{d}{d-1}a_d = da_d \neq 0$, on a même $\deg(\nu(P)) = \deg(P) - 1 = d-1$ et $\mathrm{dom}(\nu(P)) = da_d = \deg(P) \times \mathrm{dom}(P)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, comme on perd exactement un degré à chaque application de ν, on a $\nu^n(X^n)$ constant et, avec la relation précédente sur les coefficients dominants, $\nu^n(X^n) = n(n-1)\cdots 2 \times 1 = n!$ car X^n est unitaire. Ainsi, en prenant $P = X^n$ dans **a.**, on a $\nu^n(X^n)(0) = n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(0+k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n$.

d. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\nu)$, on a $P(X+1) = P(X)$. Si P était non constant, par le théorème de d'Alembert-Gauss, il existerait $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) = 0$. Ainsi, $P(\lambda+1) = P(\lambda)$ donc λ et $\lambda+1$ sont des racines de P. Par récurrence simple, $\forall p \in \mathbb{N},\ P(\lambda+p) = P(\lambda)$ donc tous les $\lambda+p$ sont des racines de P pour tout entier $p \in \mathbb{N}$. Or ceci donne une infinité de racines de P ce qui est absurde. Ainsi, P est constant. Réciproquement, si $P = \alpha$, $\nu(P) = \alpha - \alpha = 0$. Par double inclusion que $\mathrm{Ker}(\nu) = \mathbb{R}_0[X]$. Comme $\mathrm{Ker}(\nu) \neq \{0\}$, ν n'est pas injective.

e. D'après **b.**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ν car le degré de $\nu(P)$ est inférieur à celui de P. On peut donc considérer l'endomorphisme induit $\nu_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\nu_n(P) = \nu(P) = P(X+1) - P(X)$. D'après la question **d.**, $\mathrm{Ker}(\nu_n) = \mathrm{Ker}(\nu) \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Vect}(1)$ est de dimension 1 donc, avec la formule du rang, $\mathrm{rang}(\nu_n) = (n+1) - 1 = n$. D'après ce qui précède, $\mathrm{Im}(\nu_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc, par inclusion et égalité des dimensions, on obtient $\mathrm{Im}(\nu_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $Q \in E$, traitons deux cas :

<u>Si $Q = 0$</u> : $\nu(0) = Q = 0$ donc $Q \in \mathrm{Im}(\nu)$.

<u>Si $Q \neq 0$</u> : posons $d = \deg(Q) \in \mathbb{N}$, alors $Q \in \mathbb{R}_d[X] = \mathrm{Im}(\nu_{d+1})$ donc il existe $P \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$ tel que $\nu_{d+1}(P) = \nu(P) = Q$ et on a encore $Q \in \mathrm{Im}(\nu)$.

On vient de montrer que $\mathrm{Im}(\nu) = E$, donc que ν est surjective.

14 L'application $f : E = \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ f(P) = P(X-1)$ est bien définie car si $\deg(P) \leqslant n-1$, on a $\deg(P(X-1)) = \deg(P) \leqslant n-1$. De plus, si $(P,Q) \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X-1) = \lambda P(X-1) + Q(X-1) = \lambda f(P) + f(Q)$ donc f est linéaire ce qui montre que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, f est classiquement un automorphisme de E car, en posant

$g : P \mapsto P(X+1)$, on a aussi $g \in \mathcal{L}(E)$ et $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$ donc $g = f^{-1}$.

Par une récurrence simple on a $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k : P \mapsto P(X-k)$ et $g^n : P \mapsto P(X+n)$. L'énoncé nous propose donc d'exprimer $g^n = f^{-n}$ comme un polynôme en f de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Comme $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$, le polynôme caractéristique de f est de degré n et unitaire et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$. Il existe donc des coefficients $b_0, \cdots, b_n$ avec $b_n = 1$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k f^k = 0$. Pour être précis, comme la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ est $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n-1}$ qui est triangulaire supérieure et ne contient que des 1 sur la diagonale, on a $\chi_f = (X-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}X^k$ ce qui donne les valeurs des b_k.

On en déduit que $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^k = \mathrm{id}_E + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^k = 0$ donc $f \circ \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}f^{k-1}\Big) = \mathrm{id}_E$, et ceci prouve que $f^{-1} = A(f)$ avec $A = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}X^{k-1}$ avec $\deg(A) = n-1$.

Par conséquent, $g^n = f^{-n} = (f^{-1})^n = (A(f))^n = (A^n)(f)$ car on a $U(f) \circ V(f) = (UV)(f)$ d'après le cours pour des polynômes U et V. Effectuons la division euclidienne de A^n par χ_f, ce qui donne $A^n = Q \times \chi_f + R$ avec $\deg(R) < \deg(\chi_f) = n$ donc $\deg(R) \leqslant n-1$. Il existe donc des coefficients $a_0, \cdots, a_{n-1}$ réels tels que $R = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et on a $A^n(f) = Q(f) \circ \chi_f(f) + R(f) = R(f)$ donc $g^n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$. On évalue ceci en tout $P \in E$ et on a donc $g^n(P) = P(X+n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k(P) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k P(X-k)$.

15 **a.** Par le binôme de Newton, $\forall j \in [\![0;n]\!],\ (X+1)^j = \sum\limits_{i=0}^{j}\binom{j}{i}X^i$. Ainsi, A_n est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme $f_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f_n(P) = P(X+1)$ (clairement linéaire et allant de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$). Si on définit $g_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ par $g_n(P) = P(X-1)$, alors $f_n \circ g_n = g_n \circ f_n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $g_n = f_n^{-1}$. Par conséquent, $A_n^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(g_n)$ et, comme $\forall j \in [\![0;n]\!],\ (X-1)^j = \sum\limits_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}X^i$, $A_n^{-1} = B_n = \left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1;n]\!]$. On sait que $\mathrm{card}\,(S_n) = n!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_n selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{n,i}$ l'ensemble des permutations de S_n qui ont exactement i points fixes. Alors $S_n = \bigsqcup\limits_{i=0}^{n} S_{n,i}$ (réunion disjointe) avec $S_{n,n-1} = \emptyset$ car si une permutation de S_n a au moins $n-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait n points fixes. On a donc $\mathrm{card}\,(S_n) = n! = \sum\limits_{i=0}^{n}\mathrm{card}\,(S_{n,i})$. Pour dénombrer $S_{n,i}$, on choisit les i points fixes parmi les éléments de $[\![1;n]\!]$ ce qui fait $\binom{n}{i}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $n-i$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de d_{n-i} par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{n,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on “dérange”). On obtient donc $\mathrm{card}\,(S_{n,i}) = \binom{n}{i}d_{n-i}$. Par conséquent, on a $n! = \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}d_{n-i}$ et le changement d'indice $k = n-i$ donne bien le résultat attendu, à savoir $n! = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k$ car $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

c. Les relations trouvées à la question précédente s'écrivent matriciellement $A_n^T \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$.

d. Comme A_n est inversible et que $(A_n^T)^{-1} = (A_n^{-1})^T = B_n^T$, on a donc $\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = B_n^T \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$. On en déduit donc, en regardant la dernière ligne de ce produit, que $d_n = \sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j! = n! \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}$ et le changement d'indice $k = n - j$ permet d'écrire $d_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

e. Comme la loi sur S_n est la loi uniforme par hypothèse ("au hasard"), on a $p_n = \frac{\text{card}\,(S_{n,0})}{\text{card}\,(S_n)} = \frac{d_n}{n!}$ donc $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Avec le développement en série entière de $\exp$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \sim 0,36$.

16 **a.** L'ensemble $\mathcal{F}$ est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ par construction. De plus, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{F}$. Enfin, si $(f,g) \in \mathcal{F}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda f + g) \circ p = \lambda f \circ p + g \circ p = -\lambda p \circ f - p \circ g = -p \circ (\lambda f + g)$ donc, comme $\lambda f + g \in \mathcal{L}(E)$, on a $\lambda f + g \in \mathcal{F}$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ donc est un espace vectoriel.

b. • Soit $x \in \text{Im}\,(p)$, alors $p(x) = x$ donc $f(x) = f \circ p(x) = -p(f(x)) \in \text{Im}\,(p)$: $\text{Im}\,(p)$ est stable par f.

• Soit $x \in \text{Ker}(p)$, $p(f(x)) = -f \circ p(x) = -f(p(x) = -f(0_E) = 0_E$ donc $f(x) \in \text{Ker}(p)$: $\text{Ker}(p)$ est stable par f.

c. Pour $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \text{Im}\,(p)$, on a $f(x) = f(p(x)) = -p(f(x)) = -f(x)$ car $f(x) \in \text{Im}\,(p)$ donc $f(x)$ est un vecteur invariant par p puisque $\text{Im}\,(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = E_1(p)$. on en déduit que $2f(x) = 0_E$ donc que $f(x) = 0_E$. Ainsi, l'application induite par f sur $\text{Im}\,(p)$ est l'application nulle de $\text{Im}\,(p)$.

d. Soit $r = \text{rang}\,(p)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \amalg \mathcal{B}'' = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}\,(p) \oplus \text{Ker}(p)$ avec $\mathcal{B}' = (v_1, \cdots, v_r)$ une base de $\text{Im}\,(p)$ et $\mathcal{B}'' = (v_{r+1}, \cdots, v_n)$ une base de $\text{Ker}(p)$. On sait que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, d'après ce qui précède, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ si $f \in \mathcal{F}$ avec $K = \text{Mat}_{\mathcal{B}''}(f|_{\text{Ker}(p)})$ car $\text{Im}\,(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f et que f induit sur $\text{Im}\,(p)$ l'application nulle. L'application $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(f) = K$ est bien définie, elle est linéaire. Soit $f \in \mathcal{F}$ tel que $\varphi(f) = 0$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ donc $f = 0$ et φ est injective. Pour $K \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, si f est l'unique endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$, on a $AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = PA$ donc $AP = -PA$ et $f \circ p = -p \circ f$ d'où $f \in \mathcal{F}$. Par construction, on a $\varphi(f) = K$ donc φ est surjective. Ainsi, φ est un isomorphisme qui conserve donc les dimensions, ce qui assure que $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})) = (n-r)^2 = (\dim(\text{Ker}(p))^2$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 3 SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

17 **a.** Par construction, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$, ainsi, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{\alpha+n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell = 1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, le rayon R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vaut $R = \dfrac{1}{\ell} = 1$.

b. On a $v_n - v_{n-1} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{\alpha}{k}\right)\right) - \alpha\ln(n) - \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+\dfrac{\alpha}{k}\right)\right) - \alpha\ln(n-1)\right) = \ln\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right) - \alpha\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ pour tout entier $n \geqslant 2$ donc $v_n - v_{n-1} \underset{+\infty}{=} \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \alpha\left(-\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 2}(v_n - v_{n-1})$ converge absolument donc converge.

c. Par dualité suite-série, grâce à la question précédente, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel α. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+\alpha}{k}\right) - \ln(n^\alpha) = -\ln(n^\alpha a_n)$ donc $a_n = \dfrac{e^{-v_n}}{n^\alpha}$. Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-v_n} = \lambda = e^{-\alpha} > 0$ par continuité de l'exponentielle donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

d. <u>En 1</u> : d'après **c.**, comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$ et que les a_n sont positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge. Par critère de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

<u>En -1</u> : la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est alternée et la suite $(|a_n|)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 car $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$ et $\alpha > 0$. De plus, comme $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{\alpha+n+1} < 1$, la suite $(|a_n|)_{n\geqslant 0}$ est aussi décroissante. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge pour toutes les valeur de $\alpha > 0$.

18 **a.** La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est alternée et la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, ce qui justifie l'existence de $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

b. La suite $(|u_n x^{n+1}|)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{|x|^n}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ donc, par définition du rayon de convergence d'une série entière, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ vaut $R = 1$. Bien sûr, on aurait pu utiliser le critère de D'ALEMBERT. Ainsi, le domaine de définition D de I vérifie $]-1;1[\subset D \subset [-1;1]$.

$I(1)$ est bien définie car S existe d'après la question **a.**. Par contre, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2n+1}$ diverge car $\dfrac{1}{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n} > 0$ et la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. Ainsi, $I(-1)$ n'existe pas et on a $D =]-1;1]$.

c. <u>Soit $x \in]0;1[$</u> : on pose $y = \sqrt{x} \in]0;1[$ donc $I(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n y^{2n+2} = y \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1}$ et on reconnaît une série entière classique, à savoir $f(x) = y\,\mathrm{Arctan}(y) = \sqrt{x}\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$.

<u>Soit $x \in]-1;0[$</u> : on pose $y = \sqrt{-x} \in]0;1[$ donc $I(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(-1)^{n+1} y^{2n+2} = -y \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1} y^{2n+1}$ donc

$I(x) = -y\Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}y^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{2n}\Big) = -\frac{y}{2}\big(-2\ln(1-y) + \ln(1-y^2)\big) = \frac{y}{2}\ln\Big(\frac{1-y^2}{(1-y)^2}\Big) = \frac{y}{2}\ln\Big(\frac{1+y}{1-y}\Big)$ et on reconnaît $I(x) = y\,\text{Argth}\,(y) = \sqrt{-x}\,\text{Argth}\,(\sqrt{-x})$.

Posons $f_n : x \mapsto u_n x^{n+1}$ définie sur $[0;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(H_1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;1]$.

(H_2) Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $R_n : x \mapsto \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ sur $[0;1]$ (qui existe d'après **b.**), comme $(|f_k(x)|)_{k\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0 pour tout $x \in [0;1]$, le critère spécial des séries alternées montre que $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+2}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}$ donc R_n est bornée sur $[0;1]$ et $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant \frac{1}{2n+3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[0;1]} = 0$ par encadrement : $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément (pas normalement) sur $[0;1]$.

Par théorème, $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0;1]$ donc $I(1) = S = \lim\limits_{x\to 1^-} I(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{x}\,\text{Arctan}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4}$.

d. D'abord, I étant continue sur le segment $[0;1]$, l'intégrale $\int_0^1 I(x)dx$ converge.

Méthode 1 : on pose $u : x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2}$ et $v : x \mapsto \text{Arctan}(\sqrt{x})$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $]0;1]$ et, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ car $u(x)v(x) \underset{0}{\sim} \frac{2x^2}{3}$, on a $\int_0^1 I(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)dx$ ce qui donne $\int_0^1 I(x)dx = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+x}\Big)dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\big[x - \ln(1+x)\big]_0^1 = \frac{\pi}{6} - \frac{1-\ln(2)}{3} \sim 0,42$.

Méthode 2 : comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur le segment $[0;1]$ d'après **c.**, on peut intégrer terme à terme et avoir $\int_0^1 I(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big[\frac{(-1)^n x^{n+2}}{(2n+1)(n+2)}\Big]_0^1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+2)}$. Or on peut décomposer $\frac{1}{(2n+1)(n+2)} = \frac{2}{3(2n+1)} - \frac{1}{3(n+2)}$ et $\int_0^1 I(x)dx = \frac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Or il est classique (et c'est la même méthode qu'au **c.**) que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = 1 - \ln(2)$ et on trouve, comme avec la méthode précédente, $\int_0^1 I(x)dx = \frac{2S}{3} - \frac{1-\ln(2)}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{1-\ln(2)}{3}$.

19 **a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$. De plus, en posant $u : t \to \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt$, c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$. Or cette dernière intégrale converge absolument par comparaison aux intégrales de Riemann, donc elle converge, car $g : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et que $g(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge aussi.

b. On vient de voir que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui montre, par le théorème fondamental de l'intégration, que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f qui s'annule en 0. De plus, on sait que $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ et cette formule marche aussi pour $t = 0$ car $1 = \frac{(-1)^0 t^{2.0}}{(2.0+1)!}$. Comme le rayon de convergence de $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ vaut $R = +\infty$, on peut intégrer terme à terme sur $\widetilde{[0;x]}$ qui est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ pour avoir $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}\right)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \exp(-xe^{-it})$ est continue sur le segment $J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale $I(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt$ existe. On sait que $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ donc, en prenant $z = -xe^{-it}$, on obtient $\forall t \in J,\ \exp(-xe^{-it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $h_n : t \mapsto \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$.

Comme $\forall t \in J,\ |h_n(t)| = \frac{|x|^n}{n!}$, on a $||h_n||_{\infty,J} = \frac{|x|^n}{n!}$ et la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{|x|^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} h_n$ converge normalement vers h sur le segment J. Comme toutes les h_n et h sont continues sur J, le théorème d'intégration terme à terme sur segment montre que $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons l'intégrale $L_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}dt$. On a le cas particulier $L_0 = \int_0^{\pi/2} 1.dt = \frac{\pi}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $L_n = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \int_0^{\pi/2} e^{-int}dt = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi/2} = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \times \frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}$.

Comme on sait que $\mathrm{Re}\,(I(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\,(L_n)$ et que $\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = 0$ si $n \geqslant 2$ est pair et que l'on a $\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i(2k+1)\pi/2} - 1}{-i(2k+1)}\right) = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ si $n = 2k+1 \geqslant 1$ est impair, il ne reste dans la formule ci-dessus que $\mathrm{Re}\,(I(x)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

d. Par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|I(x)| = \left|\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})|dt$. Or $\exp(-xe^{-it}) = e^{-x\cos(t)}e^{ix\sin(t)}$ donc $|\exp(-xe^{-it})| = e^{-x\cos(t)}$.

Méthode 1 : la fonction $\cos$ est concave sur J car $\cos'' = -\cos \leqslant 0$ sur J donc $\forall t \in J,\ \cos(t) \geqslant 1 - \frac{2t}{\pi}$. Ainsi, $e^{-x\cos(t)} \leqslant e^{-x}e^{2xt/\pi}$ donc $\forall x > 0,\ \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})|dt \leqslant e^{-x} \int_0^{\pi/2} e^{2xt/\pi}dt$. On en déduit donc que $|I(x)| \leqslant e^{-x}\left[\frac{\pi}{2x}e^{2xt/\pi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi e^{-x}(e^x - 1)}{2x} = \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x} = 0$, par encadrement, on obtient la limite $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt = 0$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \exp(-xe^{-it})$ de sorte que $I(x) = \int_0^{\pi/2} g(x,t)dt$.

- (H_1) pour tout $t \in J$, on a $\lim_{x\to+\infty} g(x,t) = 0 = a(t)$ car $\cos(t) > 0$.
- (H_2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $h_x : t \mapsto g(x,t)$ et a sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
- (H_3) pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $|g(x,t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

D'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a $\lim_{x\to+\infty} I(x) = \int_0^{\pi/2} a(t)dt = 0$.

D'après les questions précédentes, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Re}\,(I(x)) = \frac{\pi}{2} - F(x)$. Comme $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0$, on a aussi $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Re}\,(I(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - F(x)\right) = 0$. Ceci assure l'existence d'une limite finie de F en $+\infty$ et sa valeur $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$ qu'on note $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet).

20 pas encore écrit

21 **a.** $x_1 > 0$ par hypothèse. Soit $n \geqslant 1$ tel que $x_n > 0$ est bien défini, alors $x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n} > 0$ est aussi bien défini. Par principe de récurrence, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et strictement positive. De plus, $\forall n \geqslant 1,\ x_{n+1} - x_n = \frac{n}{x_n} > 0$ donc $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. D'après le théorème de la limite monotone, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$, comme $\ell \geqslant x_1 > 0$ car $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n} = +\infty$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = \ell - \ell = 0$, ce qui est absurde. On en déduit donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

b. Soit $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \frac{n}{x}$ de sorte $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = f_n(x_n)$. Les fonctions f_n sont dérivables par théorèmes généraux sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x^2}$ donc, en traçant le tableau de variations de f_n, cette fonction est décroissante sur $\left]0; \sqrt{n}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{n}; +\infty\right[$. Ainsi, $\operatorname{Min}\limits_{\mathbb{R}_+^*} f_n = f_n(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n}$.

<u>Initialisation</u> : comme $x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} = f_1(x_1)$ et que $\operatorname{Min}\limits_{\mathbb{R}_+^*} f_1 = 2$, on a $x_2 = f_1(x_1) \geqslant 2\sqrt{1} = 2$.

<u>Hérédité</u> : soit un entier $n \geqslant 2$ tel que $x_n \geqslant n$, comme $n \geqslant \sqrt{n}$ et que la fonction f_n est croissante sur $[\sqrt{n}; +\infty[$, on obtient $x_{n+1} = f(x_n) \geqslant f(n) = n + 1$.

Par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall n \geqslant 2,\ x_n \geqslant n$.

De plus, comme on vient de montrer que $\forall k \geqslant 2,\ \frac{k}{x_k} \leqslant 1$, pour tout entier $n \geqslant 2$, on obtient la majoration $x_n - x_2 = \sum\limits_{k=2}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{k}{x_k} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n-1} 1 = n - 2$ par télescopage de sorte que $x_n \leqslant x_2 + n - 2$.

Comme $\forall n \geqslant 2,\ n \leqslant x_n \leqslant x_2 + n - 2$ et que $x_2 + n - 2 \underset{+\infty}{\sim} n$, on a $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$ par encadrement.

c. Posons $u_n = x_n - n$ pour tout entier $n \geqslant 2$. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive. Comme $u_{n+1} - u_n = x_{n+1} - x_n - 1 = \frac{n}{x_n} - 1 = \frac{n - x_n}{x_n} \leqslant 0$ d'après **b.** donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, par le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons $c = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}_+$, on a donc $u_n \underset{+\infty}{=} c + o(1)$ donc $x_n \underset{+\infty}{=} n + c + o(1)$ comme attendu.

d. On a $u_{n+1} - u_n = x_{n+1} - x_n - 1 = \frac{n - x_n}{x_n}$. Si on avait $c \neq 0$, alors on aurait $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{c}{n}$ donc, par comparaison à la série harmonique, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ divergerait et, par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ divergerait aussi, contredisant le résultat de la question précédente. On peut donc conclure que $c = 0$, ce qui s'écrit $x_n \underset{+\infty}{=} n + o(1)$.

22 Posons $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+3)2^n}{(n+1)(n+2)2^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \ell = \frac{1}{2}$ donc, d'après le cours et la règle de d'Alembert, $R = \frac{1}{\ell} = 2$.

Posons, pour $x \in]-2; 2[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2 - x}$ (série géométrique).

On peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire $]-2; 2[$, pour avoir $\forall x \in]-2; 2[,\ g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{(2-x)^2}$ puis $g''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2^{n+2}} = \frac{4}{(2-x)^3}$.

En prenant $x = 1$ dans cette dernière relation, on a directement $g''(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+2}} = 4$ donc

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2^n}=4\times 2^2=16.$

23 **a.** Analyse : supposons que la fonction paire $f=\dfrac{1}{\cos}$ est développable en série entière au voisinage de 0, il existe donc un réel $r>0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall x\in]-r;r[,\ f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n}$ (par parité). Comme le rayon R de $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ vérifie $R\geqslant r>0$ par l'existence de $f(x)$ pour $x\in]-r;r[$, et par produit de CAUCHY car le rayon de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$ vaut $+\infty$, on a $\forall x\in]-r;r[,\ \cos(x)\times\dfrac{1}{\cos(x)}=1$ donc $a_0=1$ et $\forall n\geqslant 1,\ \sum\limits_{k=0}^{n}a_{n-k}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}=0$ par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ce qui donne $a_n=-\sum\limits_{k=1}^{n}a_{n-k}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{n-k}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$.

Synthèse : il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0=1$ et $\forall n\geqslant 1,\ a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{n-k}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$. Calculons les premiers termes de cette suite : on a $a_1=\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{1}{2}$, $a_2=\dfrac{a_1}{2}-\dfrac{a_0}{24}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{24}=\dfrac{5}{24}$ et $a_3=\dfrac{a_2}{2}-\dfrac{a_1}{24}+\dfrac{a_0}{720}=\dfrac{5}{48}-\dfrac{1}{48}+\dfrac{1}{720}=\dfrac{61}{720}$. Il semble que l'on ait $|a_n|\leqslant 1$.

- Initialisation : on vient de montrer que $\forall n\in[\![0;3]\!]$, on a $|a_n|\leqslant 1$.
- Hérédité : soit $n\geqslant 4$, supposons que $\forall k\in[\![0;n-1]\!],\ |a_k|\leqslant 1$. Alors, $|a_n|=\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}a_{n-k}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}\Big|$ donc $|a_n|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|a_{n-k}|}{(2k)!}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k)!}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k)!}=\mathrm{ch}\,(1)-1\sim 0,54\leqslant 1$.

Par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leqslant 1$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^{2n}$, qui est donc supérieur, d'après le cours, à celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0}x^{2n}$ qui vaut 1. Ainsi, $R\geqslant 1$ et on peut définir $g:]-1;1[\to\mathbb{R}$ par $\forall x\in]-1;1[,\ g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n}$. Par produit de CAUCHY, comme avant, $\forall x\in]-1;1[,\ g(x)\cos(x)=\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n}\Big)\times\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}\Big)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n-k}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\Big)x^{2n}=1$ donc $g(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}=f(x)$ et $f=\dfrac{1}{\cos}$ est donc développable en série entière, au moins sur $]-1;1[$.

b. Si on avait $R>\dfrac{\pi}{2}$, avec le même calcul que précédemment, on aurait $\forall x\in]-R;R[,\ f(x)\times\cos(x)=1$. Mais comme $x=\dfrac{\pi}{2}\in]-R;R[$, on aurait $f(x)\cos(x)=0=1$. NON. Ou alors on pourrait dire que f est continue sur $]-R;R[$, notamment en $x=\dfrac{\pi}{2}$, ce qui contredit l'expression $f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$. Toujours est-il que $R\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. En fait, $R=\dfrac{\pi}{2}$ mais c'est une autre histoire.

24 **a.** Pour $n\geqslant 1$, on partitionne les involutions σ de $[\![1;n+2]\!]$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2)=n+2$ sont au nombre de I_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $[\![1;n+1]\!]$ une involution de $[\![1;n+1]\!]$.
- celles telles que $\sigma(n+2)=k\neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)I_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k)=\sigma(\sigma(n+2))=n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors I_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $[\![1;n+1]\!]\setminus\{k\}$ une involution de cet ensemble à n éléments.

Cette partition implique la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geqslant 1$ et, comme $I_2 = 2 = 1+1.1 = I_1 + 1.I_0$ avec la convention choisie pour I_0, on a bien : $\forall n \geqslant 0,\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Comme les involutions sont des permutations et qu'il y a $n!$ permutations de $[\![1;n]\!]$, on en déduit que $I_n \leqslant n!$ d'où $0 \leqslant \dfrac{I_n}{n!} \leqslant 1$. Comme la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ a pour rayon 1, par comparaison, on a $R \geqslant 1$.

c. Les calculs qui suivent sont valides car le rayon de convergence R est supérieur à 1, on sait qu'on peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence qui contient $]-1;1[$. Pour $x \in]-1\,;1[$, $(1+x)\varphi(x) = \varphi(x) + x\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{I_n}{n!}x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_n + nI_{n-1}}{n!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{n!}x^n = \varphi'(x)$.

d. On en déduit en intégrant cette équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1 + x$ est $x \mapsto x + \dfrac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $]-1;1[$, que l'on a $\forall x \in]-1\,;1[,\ \varphi(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $\varphi(0) = I_0 = 1$ par convention.

e. Alors $\forall x \in]-1;1[,\ \varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{i!}x^i\right) \times \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de Cauchy et obtenir $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}\Big)x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $S(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_n}{n!} = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{1}{i!j!2^j}$ donc $I_n = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}$. Puisque $2j \leqslant n$ et $i = n - 2j$, on a la formule $I_n = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!j!2^j}$.

Pour expliquer cette relation de manière combinatoire, on peut constater qu'une involution σ de $[\![1;n]\!]$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n, on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ.
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $[\![1;n]\!]$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n - 2j$ avec $0 \leqslant j \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où $A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n - 2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n - 2j$ éléments de $[\![1;n]\!]$ qui sont fixes par σ : $\dbinom{n}{n-2j} = \dbinom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \dbinom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \dfrac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \dfrac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \mathrm{card}\,(A_n) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.

25 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive car $f_0(x) = x > 0$ et, si $f_n(x) > 0$ est bien défini pour un entier $n \in \mathbb{N}$, le réel $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_n(x) + \dfrac{x}{f_n(x)}\right)$ est aussi bien défini et strictement positif. Si $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell_x \in \mathbb{R}_+$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation de récurrence $f_{n+1}(x)=\frac{1}{2}\Big(f_n(x)+\frac{x}{f_n(x)}\Big)$, $\ell_x=\frac{1}{2}\Big(\ell_x+\frac{x}{\ell_x}\Big)\Longleftrightarrow \ell_x^2=x\Longleftrightarrow \ell_x=\sqrt{x}$ car $\ell_x\geqslant 0$.

Convergence simple : soit $x>0$, $f_{n+1}(x)-\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Big(f_n(x)+\frac{x}{f_n(x)}-2\sqrt{x}\Big)=\frac{(f_n(x)-\sqrt{x})^2}{2f_n(x)}\geqslant 0$ donc on a la minoration $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(x)\geqslant\sqrt{x}$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N},\ f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{f_n(x)}-f_n(x)\Big)$ qui se transforme en $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{(\sqrt{x}-f_n(x))(\sqrt{x}+f_n(x))}{2f_n(x)}\leqslant 0$ dès que $n\geqslant 1$ donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minore par $\sqrt{x}$ donc elle converge et on a vu précédemment que sa limite est forcément $\sqrt{x}$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x}$.

Convergence uniforme : la fonction $f_0-f:x\mapsto x-\sqrt{x}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_0(x)-f(x))=+\infty$. De même, $f_1-f:x\mapsto\frac{x+1}{2}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x)-f(x))=+\infty$. Si on suppose que $f_n(x)-f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{x}{2^n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, alors $f_n(x)=(f_n(x)-f(x))+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}\underset{+\infty}{=}o(x)$ donc, par somme, $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{x}{2^n}$ et la relation $f_{n+1}(x)-\sqrt{x}=\frac{(f_n(x)-\sqrt{x})^2}{2f_n(x)}$ montre, par quotient, que $f_{n+1}(x)-f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\frac{x^2}{2^{2n}}}{2\frac{x}{2^n}}=\frac{x}{2^{n+1}}$. Par principe de récurrence, on a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x)-f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{x}{2^n}$ donc f_n-f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-f(x))=+\infty$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x}$.

26 corrigé en TD et pas encore rédigé

27 **a.** D'après le cours, la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour $x\in\mathbb{R}$, on a $h(x)=e^{-2x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2x^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^nx^{2n}}{n!}$. La fonction $g:t\mapsto e^{t^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2t^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^nt^{2n}}{n!}$ est développable en série entière donc continue sur $\mathbb{R}$, ainsi la fonction $G:x\mapsto\int_0^x e^{2t^2}dt=\int_0^x g(t)dt$ est, d'après le théorème fondamental de l'intégration, sa primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On sait que G est développable en série entière en intégrant terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence qui est $\mathbb{R}$ et on a donc $\forall x\in\mathbb{R},\ G(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^nx^{2n+1}}{(2n+1).n!}$ et G est impaire (ce qu'on pouvait directement voir avec l'expression intégrale de G). Comme h et G sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, par produit de Cauchy, $f=h\times G$ l'est aussi et on a $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}2^{n-k}2^k}{(2k+1).k!(n-k)!}\Big)x^{2n+1}$.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=h'(x)G(x)+h(x)G'(x)=-4xf(x)+e^{-2x^2}e^{2x^2}$ donc f est solution de $(E)\ :\ y'=-4xy+1$. Ainsi, si on écrit $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}$ (car f est impaire), on a $\forall x\in\mathbb{R}\ f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}$ donc, en reportant dans l'équation différentielle (E) vérifiée par f, on obtient $f'(x)+4xf(x)-1=-1+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}+4\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+2}=-1+a_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}((2n+1)a_n+4a_{n-1})x^{2n}=0$. Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a $a_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (2n+1)a_n+4a_{n-1}=0$. On a donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=-\frac{4}{2n+1}a_{n-1}=\frac{16}{(2n+1)(2n-1)}a_{n-2}=\cdots=\frac{(-1)^n4^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3.1}a_0$, ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{(-1)^n 4^n 2^n n!}{(2n+1)!} = \dfrac{(-1)^n 2^{3n} n!}{(2n+1)!}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{3n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Par unicité des coefficients du développement en série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{n-k} 2^{n-k} 2^k}{(2k+1).k!(n-k)!} = \dfrac{(-1)^n 2^{3n} n!}{(2n+1)!}$.

c. ???

28 **a.** • Pour $x = 0$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(0)$ converge et $S(0) = 0$.

• Si $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de Riemann.

Par conséquent, la fonction somme S est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, comme toutes les fonctions u_n sont impaires, on en déduit (par convergence simple) que S est aussi impaire.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, après calculs, $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n'(x) = \dfrac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2}$ donc u_n est décroissante sur $]-\infty; n]$ et $[n; +\infty[$ et croissante sur $[-n; n]$. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} u_n(x) = 0$, le tableau de variations de u_n montre que $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}} = |u_n(-n)| = u_n(n) = \dfrac{1}{2n}$. Ainsi, la série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 1} ||u_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge et il n'y a pas converge normale de $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$.

c. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(H_2) La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après **a.**.

(H_3) Soit $a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a; a]$, $|u_n'(x)| = \dfrac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2} \leqslant \dfrac{n^2 + x^2}{(x^2+n^2)^2} = \dfrac{1}{(x^2+n^2)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ par inégalité triangulaire donc $||u_n'||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} ||u_n'||_{\infty,[-a;a]}$ converge par comparaison aux séries de Riemann donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par le théorème évoqué ci-dessus, S est de classe C^1 et $\forall x \in \mathbb{R},\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2}$.

d. Comme $S(0) = 0$ et $S'(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$ d'après la question précédente, puisque S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a $S(x) \underset{0}{=} S(0) + xS'(0) + o(x)$ par le théorème de Taylor-Young. On a donc $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi^2 x}{6}$.

Pour être plus précis, pour $x \in \mathbb{R}$, $\left|S(x) - \dfrac{\pi^2 x}{6}\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+n^2} - \dfrac{x}{n^2}\right)\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^3}{n^2(x^2+n^2)}\right|$ donc on a $|S(x)| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x|^3}{n^2(x^2+n^2)} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x|^3}{n^4} = \zeta(4)|x|^3 = \dfrac{\pi^4 |x|^3}{90}$ ce qui prouve que $S(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi^2 x}{6} + O(x^3)$ ce qui montre que $S(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi^2 x}{6} + o(x)$ et, à nouveau, $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi^2 x}{6}$.

e. On effectue une comparaison série/intégrale, en posant, pour $x > 0$ fixé, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. φ_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k) = u_k(x) \leqslant \int_{k-1}^{k} \varphi_x(t)dt$. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ (tout converge) et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)dt$ donc $\left[\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} = \left[\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

f. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si on avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la double limite, on aurait $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x)) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. Comme

$\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \frac{\pi}{2}$ d'après la question précédente, on n'a pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ vers f sur $\mathbb{R}$ (ni sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$ pour la même raison).

29 Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, $u_n r^n \underset{+\infty}{=} O(r^n)$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} r^n$ converge (série géométrique) car $|r| < 1$ donc, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n r^n$ converge absolument donc converge. Ainsi, l'application x est bien définie.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \neq v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, notons $p = \text{Min}\left(\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; u_n \neq v_n\right\}\right)$, cet entier existe car la partie $A = \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; u_n \neq v_n\right\}$ de $\mathbb{N}$ est non vide puisque $u \neq v$ donc, par propriété fondamentale des entiers, A admet un minimum.

Prenons par exemple $u_p = -1$ et $v_p = 1$ (l'autre cas est analogue et on le traite par symétrie), alors $x(v) - x(u) = r^p - (-r^p) + \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} (v_n - u_n) r^n$. Posons $y = \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} (v_n - u_n) r^n$ de sorte que $x(v) - x(u) = 2r^p + y$. Par convergence absolue des séries, $\left|\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} (v_n - u_n) r^n\right| \leqslant \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} |v_n - u_n| r^n \leqslant 2 \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} r^n = \frac{2r^{p+1}}{1 - r}$ par inégalité triangulaire d'où $x(v) - x(u) - 2r^p \geqslant -\frac{2r^{p+1}}{1 - r}$ qui devient $x(v) - x(u) \geqslant 2r^p - \frac{2r^{p+1}}{1 - r} = \frac{2r^p(1 - 2r)}{1 - r} > 0$.

Par conséquent, $x(u) \neq x(v)$ dès que $u \neq v$, ce qui est la définition de l'injectivité de x.

On peut constater que x n'est pas forcément injective dès que $r \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[$, par exemple pour $r = \frac{1}{2}$, car puisque $1 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(1/2)}{1 - (1/2)}$, on a $x(1, -1, \cdots, -1, \cdots) = x(-1, 1, \cdots, 1, \cdots)$.

30 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, pour que $S(x)$ existe, on doit au moins avoir $\forall n \in \mathbb{N}$, $n + x \neq 0$, c'est-à-dire $x \notin (-\mathbb{N})$. Soit donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{a^n}{n + x}$. Traitons alors quatre cas :

- Si $|a| < 1$, alors $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$ et la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} a^n$ converge car $|a| < 1$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison aux séries géométriques.
- Si $|a| > 1$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x)| = +\infty$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $a = 1$, alors $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(x)$ diverge par comparaison à la série harmonique.
- Si $a = -1$, alors $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + (x/n)} \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\frac{1}{1 + (x/n)} \underset{+\infty}{=} 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(f_n(x) - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge par comparaison aux séries de Riemann, par somme, $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(x)$ converge (mais pas absolument).

Le domaine de définition de S vaut donc $D_S = \emptyset$ si $|a| > 1$ ou $a = 1$, $D_S = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ si $|a| < 1$ ou $a = -1$.

b. Tout d'abord, les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 1 : soit $0 < \alpha < \beta$, alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\alpha; \beta]$, comme $|f_n| : x \mapsto \frac{|a|^n}{n + x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $|f_n(x)| \leqslant |f_n(\alpha)|$ donc f_n est bornée sur $[\alpha; \beta]$ et $||f_n||_{\infty, [\alpha; \beta]} = |f_n(\alpha)| \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$. Comme $\sum\limits_{n \geqslant 0} |a|^n$ converge, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement vers S sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. On sait d'après le cours que ceci implique la continuité de S sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 2 : f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre, pour $n \geqslant 1$, comme $|f_n|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \lim\limits_{x\to 0^+} |f_n(x)| = \dfrac{|a|^n}{n} \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a|^n$ converge car $|a| < 1$ par hypothèse, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $T : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le cours. Comme $S = T + f_0$ et que f_0 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $x > 0$, $a\,S(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} af_n(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{n+1}}{n+x+1} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{a^p}{p+x}$ en effectuant le changement d'indice $p = n+1$. Ainsi, $aS(x+1) = S(x) - f_0(x) = S(x) - \dfrac{1}{x}$.

d. $\forall x > 0,\ S(x) = \dfrac{1}{x} + a\,S(x+1)$ or S est continue en 1 d'après **b.** donc $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x+1) = S(1)$. Ainsi, S est bornée au voisinage de 1 et $S(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + O(1) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ ce qui montre bien que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

e. <u>Méthode 1</u> : la borne β n'est pas intervenue dans les calculs de la question **b.** donc $||f_n||_{\infty,[\alpha;+\infty[} = |f_n(\alpha)|$ à nouveau et on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[\alpha;+\infty[$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, par théorème de la double limite, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

<u>Méthode 2</u> : Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **b.** et que $\forall n \geqslant 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$, par double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} T(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0 + 0 = 0$.

f. Comme $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a^n}{x}$, si on admet pouvoir sommer les équivalents, on aurait $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{x} = \dfrac{1}{(1-a)x}$.
Pour le montrer rigoureusement, on écrit $x\,S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ avec $g_n(x) = \dfrac{a^n x}{n+x} = a^n - \dfrac{na^n}{n+x}$, la fonction $|g_n| : x \mapsto |a|^n - \dfrac{n|a|^n}{n+x}$ est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} |g_n(x)| = |a|^n$ donc $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = |a|^n$.
Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a|^n$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème de la double limite, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$. Par conséquent, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(1-a)x}$.
Pour être plus précis, pour $x > 0$, $\Big|S(x) - \dfrac{1}{(1-a)x}\Big| = \Big|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\dfrac{a^n}{n+x} - \dfrac{a^n}{x}\Big)\Big|$ car $\dfrac{1}{1-a} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ donc, par inégalité triangulaire, on a $\Big|S(x) - \dfrac{1}{(1-a)x}\Big| = \Big|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{na^n}{x(n+x)}\Big| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n|a|^n}{x^2} = \dfrac{A}{x^2}$ en posant $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n|a|^n$.
Ainsi, $S(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ ce qui est plus précis que ce qu'on a obtenu avant.

31 **a.** Soit $x \in [-1;1]$, traitons deux cas :

- Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2} = 0 = \ell$ car $x^2 > 0$ donc, par continuité de la fonction $\sin$ en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin(\ell) = 0$.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $F : x \to 0$ sur $[-1;1]$.

b. Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a;1]$, alors $0 \leqslant nxe^{-nx^2} \leqslant ne^{-na^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-na^2} = 0$ par croissances comparées, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ ne^{-na^2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Par croissance de $\sin$ sur $\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$, $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sin(ne^{-na^2})$ donc $||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = ||f_n||_{\infty,[a;1]} \leqslant \sin(ne^{-na^2})$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(ne^{-na^2}) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = 0$ d'où, par définition, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction F sur tout $[a;1]$ avec $a \in]0;1[$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(e^{-1/n}\right) \geqslant \sin(e^{-1})$ car $\sin$ est croissante sur $[e^{-1};1[$ donc, comme $||f_n||_{\infty,[-1;1]} \geqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant \sin(e^{-1})$ puisque $\frac{1}{n} \in [-1;1]$, la suite $\left(||f_n||_{\infty,[-1;1]}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 et la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers la fonction F sur $[-1;1]$.

32 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, comme $\ln(1+nx^2) = \ln(n) + \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} O(1)$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc, par comparaison à une série de RIEMANN convergente car $\frac{3}{2} > 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument donc converge. Ainsi, S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ par opérations. De plus, pour $a > 0$, comme u_n est paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall x \in [-a;a]$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a)$ donc $||u_n||_{\infty,[-a;a]} = u_n(a)$ et on vient de voir en **a.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(a)$ converge. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, ce qui assure, d'après le cours, la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

c. Les fonctions u_n tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc ne sont même pas bornées sur $\mathbb{R}$. On n'a donc pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$.

d. Toutes les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \frac{2x}{n(1+nx^2)}$ et on se rappelle que $2ab \leqslant a^2 + b^2$ pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ donc $1 + nx^2 \geqslant 2\sqrt{n}|x|$. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $0 \leqslant |u_n'(x)| \leqslant \frac{2|x|}{2n\sqrt{n}|x|} = \frac{1}{n^{3/2}}$ donc $||u_n'||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$ et, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On pouvait bien sûr dériver u_n' pour en faire son tableau de variations. Ainsi, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, d'après le cours, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

e. $S(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $u_n(x) \geqslant \frac{\ln(nx^2)}{n^2} = \frac{2\ln(x)}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}$ (1). Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge car $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, en notant $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$, on obtient en sommant les inégalités (1) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S(x) \geqslant \frac{\pi^2 \ln(x)}{3} + A$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, par minoration, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

f. On vient de voir que $\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n(1+nx^2)} = 2x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$. Soit $x > 0$, on définit $g_x : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $g_x(t) = \frac{1}{t(1+tx^2)}$. Alors g_x est continue sur $[1;+\infty[$ et y est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_x(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n)$ (2). Comme $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$, par comparaison à une intégrale de RIEMANN convergente, g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$. En sommant (1) pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient $2x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_x(n+1) = S'(x) - 2xg_x(1) = S'(x) - \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 2x \int_1^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant S'(x) = 2x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_x(n)$ (tout converge). Comme $g_x(t) = \frac{1 + tx^2 - tx^2}{t(1+tx^2)} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$, $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt = \Big[\ln(t) - \ln(1+tx^2)\Big]_1^{+\infty}$ donc $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt = \left[\ln\left(\frac{t}{1+tx^2}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x^2) - 2\ln(x)$. En réorganisant les termes, on arrive à l'encadrement $2x\ln(1+x^2) - 4x\ln(x) \leqslant S'(x) \leqslant 2x\ln(1+x^2) - 4x\ln(x) + \frac{2x}{1+x^2}$. Or on a les équivalents

$2x\ln(1+x^2)-4x\ln(x)\underset{0^+}{\sim}-4x\ln(x)$ et $2x\ln(1+x^2)-4x\ln(x)+\dfrac{2x}{1+x^2}\underset{0^+}{\sim}-4x\ln(x)$ donc, par encadrement, on obtient $S'(x)\underset{0^+}{\sim}-4x\ln(x)$. Ceci montre, par exemple, que S n'est pas deux fois dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{S'(x)-S'(0)}{x-0}=+\infty$ car $\dfrac{S'(x)-S'(0)}{x-0}\underset{0^+}{\sim}-4\ln(x)$ puisque $S'(0)=0$.

33 **a.** Le domaine de définition D de S vaut $D=\mathbb{R}_+$ car :

Si $x=0$, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n(0)=\dfrac{(-1)^n}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n(0)$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0.

Si $x>0$, on a $u_n(x)\underset{+\infty}{=}o(e^{-nx})\underset{+\infty}{=}o((e^{-x})^n)\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n(x)$ converge absolument par le critère de RIEMANN car $2>1$ ou par comparaison aux séries géométriques.

Si $x<0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n(x)|=+\infty$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n(x)$ diverge grossièrement.

b. Pour $x\geqslant 0$, la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et tend vers 0 donc, d'après le critère spécial des séries alternées, en posant les restes $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)$, on a $|R_n(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)|\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ donc R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+}\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$. La convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ est donc uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Comme les u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit d'après le cours que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Les fonctions u_n sont toutes dérivables sur D et on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in D,\ u_n'(x)=(-1)^{n+1}e^{-nx}$ donc $||u_n'||_{\infty,D}=|u_n'(0)|=1$ et, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}1$ diverge, on n'a pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n'$ sur D. On n'a même pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n'$ sur D car la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_un'(0)$ diverge grossièrement. On ne peut donc pas conclure facilement que S est de classe C^1 sur D.

d. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$:

(H_1) On a vu en **a.** la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ sur $D=\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et, pour $n\geqslant 1$ et $x>0$, $u_n'(x)=(-1)^{n+1}e^{-nx}$.

(H_3) Soit $a>0$ et $n\geqslant 1$, comme $|u_n|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $||u_n'||_{\infty,[a;+\infty[}=|u_n'(a)|=e^{-na}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}e^{-na}$ converge (série géométrique avec $0<e^{-a}<1$) donc on a convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n'$ sur $[a;+\infty[$ donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le fameux théorème, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0,\ S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-nx}=e^{-x}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(-e^{-x})^p$ donc $S'(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\big(-\ln(1+e^{-x})\big)'$.

e. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe donc $k\in\mathbb{R}$ telle que $\forall x>0,\ S(x)=k-\ln(1+e^{-x})$. Pour déterminer la valeur de k, plutôt que d'évaluer en une valeur particulière de x, on va faire tendre x vers $+\infty$:

(H_1) D'après la question **b.**, on a convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=0=\ell_n$.

Par théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ell_n=0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(1+e^{-x})=0$, on en déduit que $k=0$ donc que $\forall x>0,\ S(x)=-\ln(1+e^{-x})$.

Comme S est continue en 0 d'après **b.**, on a $S(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} S(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln(1+e^{-x}))=-\ln(2)=-\ln(1+e^{-0})$ donc on peut conclure que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ S(x)=-\ln(-e^{-x})$.

On pouvait constater, ce qui rend ces dernières questions inutiles, que si $x>0$, on a $-e^{-x}\in]-1;1[$ donc, comme on reconnaît le développement en série entière de $x\mapsto\ln(1+x)$ qui est de rayon de convergence 1, on a directement $\ln(1+e^{-x})=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(e^{-x})^n}{n}=-S(x)$.

34 **a.** La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et l'équation caractéristique associée est $r^2-3r+2=(r-1)(r-2)$. Ainsi, d'après le cours, il existe deux constantes A et B telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=A+B.2^n$. Comme $a_0=A+B=1$ et $a_1=3=A+2B$, on trouve sans peine $A=-1$ et $B=2$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=2^{n+1}-1$.

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $|a_n|=a_n=2^{n+1}-1\leqslant 2^{n+1}\leqslant 2^{2n}=4^n$ car $n+1\leqslant 2n$. Comme on a aussi $a_0=1\leqslant 4^0=1$, on a bien $\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leqslant 4^n$.

c. D'après le cours, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0}4^nx^n$ qui vaut $\dfrac{1}{4}$ car $(4^nx^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $|x|\leqslant\dfrac{1}{4}$. Par conséquent $R\geqslant\dfrac{1}{4}$. Comme $a_n\underset{+\infty}{\sim}2^{n+1}$ et que le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0}2^{n+1}x^n$ vaut $\dfrac{1}{2}$ pour les mêmes raisons, on peut conclure tout de suite que $R=\dfrac{1}{2}$.

d. Pour $x\in]-R;R[\supset\left]-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right[$, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2})x^n=0$ par hypothèse donc, comme les trois séries convergent, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_nx^n-3\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_{n-1}x^n+2\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n=0$. Posons $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ pour des x convenables, ce qui donne $(S(x)-a_1x-a_0)-3(xS(x)-a_0x)+2x^2S(x)=0$ ou encore $S(x)-3x-1-3xS(x)+3x+2x^2S(x)=0$ et on a la relation $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\dfrac{1}{2x^2-3x+1}$ comme attendu.

e. <u>Méthode 1</u> : comme $P=2X^2-3X+1=(2X-1)(X-1)$, la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{P}$ se décompose en éléments simples sous la forme $F=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{2X-1}=\dfrac{a(2X-1)+b(X-1)}{(2X-1)(X-1)}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ qui vérifie donc le système linéaire $(2a+b=0=a+b+1)\iff(a=1,b=-2)$. Ainsi, $\forall x\in\left]-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right[,\ S(x)=\dfrac{2}{1-2x}-\dfrac{1}{1-x}$ donc $S(x)=2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2^nx^n-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$ et on a bien $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2^{n+1}-1)x^n$. Par unicité des coefficients du développement en série entière d'une fonction, on a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=2^{n+1}-1$ donc $a_n\underset{+\infty}{\sim}2^{n+1}$ et on conclut, comme on l'a déjà fait, que $R=\dfrac{1}{2}$.

<u>Méthode 2</u> : comme $P=2X^2-3X+1=(2X-1)(X-1)$, on a $\forall x\in]-R;R[\cap\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[,\ S(x)=\dfrac{1}{1-2x}\times\dfrac{1}{1-x}$ donc, par produit de CAUCHY, $S(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)\times\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}2^k\right)x^n$. Par unicité des coefficients du développement en série entière d'une fonction, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}2^k=\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$ et on conclut à nouveau que $R=\dfrac{1}{2}$.

35 **a.** Comme l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est stable par la fonction $\sin$ car $\sin\left(\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]0;1[\subset\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $u_0\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et on a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \frac{\pi}{2}$. Par stricte concavité de la fonction $\sin$ sur $u_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 < \sin(x) < x$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \sin(u_n) = u_{n+1} < u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \in [0; u_0]$. Or $\sin$ est aussi continue donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $\sin(u_n) = u_n$, on a $\sin(\ell) = \ell$ donc $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, par dualité suite-série, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge. De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}u_n^3 < 0$. Par conséquent, par comparaison de séries de termes de signe constant, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge.

c. Comme la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car elle tend vers $-\infty$ d'après **a.**, par dualité suite-série à nouveau, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge. Or, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{+\infty}{=} \ln\left(\frac{u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\left(\frac{u_n^3}{6}\right)}{u_n}\right)$ ce qui donne $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{6}\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{6}u_n^2 < 0$. Par comparaison encore, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.

d. En élevant au carré, $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$, on a $\sin(u_n)^2 \underset{+\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^2$ qui se réduit en $\sin(u_n)^2 \underset{+\infty}{=} u_n^2\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^2 \underset{+\infty}{=} u_n^2\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right) \underset{+\infty}{=} u_n^2 - \frac{u_n^4}{6} + o(u_n^4)$. Par conséquent, $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\sin(u_n)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2}\left(\frac{u_n^2}{\sin(u_n)^2} - 1\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{u_n^2}\left(\frac{u_n^2}{u_n^2 - \frac{u_n^4}{3} + o(u_n^4)} - 1\right)$ donc, en simplifiant, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$ car $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{u_n^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n)} - 1\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{u_n^2}\left(1 + \frac{u_n^2}{3} - 1 + o(u_n^2)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3}$ avec le développement limité $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$. Par le théorème de Cesaro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3}$ après télescopage d'où $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ et $u_n = \sqrt{u_n^2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Bien sûr, ceci rend plus facile les questions précédentes car on a alors $u_n^3 \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$.

36 **a.** • S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = -\frac{1}{n}$, f_n n'est pas définie en x donc f ne peut pas l'être non plus.

• Si $x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$ et la série harmonique diverge donc f n'est pas définie en 0.

• Pour $x \in D = \mathbb{R}^* \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\left\{-\frac{1}{n}\right\}$, $f_n(x)$ est bien défini pour tout entier n et $f_n(x) = \frac{1}{n + n^2x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x} > 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de Riemann $(2 > 1)$.

Par conséquent, le domaine de définition de f est exactement $D = \mathbb{R}^* \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\left\{-\frac{1}{n}\right\}$.

b. Les f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f aussi (la convergence simple suffit). En effet, si $0 < x \leqslant y$, comme $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_k(x) \geqslant f_k(y)$, en sommant, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(y) = S_n(y)$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ (les limites existent), on a donc $f(x) \geqslant f(y)$.

Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^* \subset D$.

(H_2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonctions f_n est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall x > 0,\ f_n'(x) = -\dfrac{1}{(1+nx)^2}$.

(H_2) Soit $a > 0$, comme $|f_n'|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{1}{(1+na)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2a^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN, ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le cours, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+nx)^2} < 0$ et on retrouve le fait que f est décroissante (et même strictement) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $x > 0$, $\left|f(x) - \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2x+n} - \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2x+n} - \dfrac{1}{n^2x}\right)\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n^2x+n)n^2x}$ et, comme $n^2x \geqslant 0$, $\left|f(x) - \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(nx+1)n^2x} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3x^2} = \dfrac{\zeta(3)}{x^2} = \dfrac{a}{x^2}$ en posant $a = \zeta(3) \sim 1,2$.

d. On vient de voir que $f(x) - \dfrac{\zeta(2)}{x} = f(x) - \dfrac{\pi^2}{6x} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ce qui montre que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

e. Pour $x > 0$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx)}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$ donc, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_x(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k)$ par comparaison série-intégrale. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ ($f(x)$ existe et φ_x est continue sur $[1;+\infty[$ et $\varphi_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{xt^2}$ donc φ_x est intégrable sur $[1;+\infty[$) et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi_x(k+1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - \varphi_x(1) \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t(1+tx)} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi_x(k) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ donc on a l'encadrement $\displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t(1+tx)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{1+x} + \displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t(1+tx)}$. Or $\dfrac{1}{t(1+tx)} = \dfrac{1+tx-tx}{t(1+tx)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t(1+tx)} = \Big[\ln(t) - \ln(1+tx)\Big]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\dfrac{t}{1+tx}\right) = -\ln(x)$ donc on a l'encadrement $\ln(1+x) - \ln(x) \leqslant f(x) \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) + \dfrac{1}{1+x}$ qui donne $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ par le théorème des gendarmes car $\ln(1+x) - \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(1+x) - \ln(x) + \dfrac{1}{1+x} \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

37 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ où elle est de classe C^∞ par opérations.

Comme on sait que $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$. la fonction f ainsi prolongée est maintenant continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1 - \cos(x) - \dfrac{x^2}{2}}{x^3}$ mais on sait aussi que $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ ce qui donne $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{0}{=} o(1)$ et on a donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(0) = 0$ ce qui logique car f est paire donc f' (quand elle existe) est impaire.

Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \dfrac{x^2\sin(x) - 2x(1 - \cos(x))}{x^4} = \dfrac{x\sin(x) - 2(1 - \cos(x))}{x^3}$ mais on a le développement limité $x\sin(x) - 2(1 - \cos(x)) \underset{0}{=} x(x + o(x^2)) - 2\left(1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right) \underset{0}{\sim} x^2 - x^2 + o(x^3) \underset{0}{=} o(x)$ donc $f'(x) \underset{0}{=} o(1)$ ce qui montre que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc que f' est continue en 0. Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Mais on sait que $\cos$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+2)!}$. En prenant

$x=0$ dans cette somme, on obtient $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k 0^{2k}}{(2k+2)!}=\dfrac{(-1)^0}{(2.0+2)!}=\dfrac{1}{2}$ donc on retrouve la valeur de $f(0)$ trouvée ci-dessus. Par conséquent, f est en fait développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+2)!}$ et f est donc de classe C^∞ sur sont intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R}$.

38 **a.** Pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{1}{n!(x+n)}$ qui est bien défini car $x+n>0$. Pour $x>0$, comme $f_n(x)\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$ et que la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}$ converge, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0}f_n(x)$ converge donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 1 : pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, $0\leqslant f_n(x)\leqslant \lim\limits_{t\to 0^+}f_n(t)=\dfrac{1}{n.n!}$ car f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=\dfrac{1}{n.n!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n.n!}$ converge car $\dfrac{1}{n.n!}\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci assure, par théorème de continuité des séries de fonctions, puisque toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, que la fonction $f-f_0=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais $f_0: x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est elle-même continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par somme, $f=f_0+(f-f_0)=f_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 2 : soit $a>0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme f_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[}=f_n(a)$ et on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 0}f_n(a)$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Par théorème de continuité des séries de fonctions, puisque toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Pour $x>0$, $g(x)=xf(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x}{n!(x+n)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}g_n(x)$ avec $g_n(x)=\dfrac{x}{n!(x+n)}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, g_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)=\dfrac{1}{n!}=\ell_n$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Par théorème de la double limite, comme g_n admet une limite finie $\ell_n=\dfrac{1}{n!}$ en $+\infty$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ell_n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}=e$. Ainsi, $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{e}{x}$.

On écrit, pour $x>0$, $h(x)=x^2\Big(f(x)-\dfrac{e}{x}\Big)=x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\dfrac{1}{n!(x+n)}-\dfrac{1}{n!x}\Big)$ donc $h(x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx^2}{n!(x+n)x}$. Posons $h_n(x)=\dfrac{nx^2}{n!(x+n)x}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, comme $0\leqslant h_n(x)=\dfrac{nx}{n!(x+n)}=\dfrac{n}{n!(1+(n/x))}\leqslant\dfrac{n}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}$, on a $||h_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}\leqslant\dfrac{1}{(n-1)!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{(n-1)!}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}h_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h_n(x)=\dfrac{1}{(n-1)!}=\ell'_n$, par le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ell'_n=-\dfrac{1}{e}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\Big(f(x)-\dfrac{e}{x}\Big)=-\dfrac{1}{e}$ donc $x^2\Big(f(x)-\dfrac{e}{x}\Big)\underset{+\infty}{=}-\dfrac{1}{e}+o(1)$ ou encore $f(x)\underset{+\infty}{=}\dfrac{1}{ex}-\dfrac{1}{ex^2}+o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$.

On pouvait, mais c'est plus simple a posteriori, majorer la quantité $\Big|f(x)-\dfrac{1}{ex}+\dfrac{1}{ex^2}\Big|$ en l'écrivant sous la forme $\Big|f(x)-\dfrac{1}{ex}+\dfrac{1}{ex^2}\Big|=\Big|\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!(x+n)}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!x}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n}{n!x^2}\Big|=\Big|\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^2-x(x+n)+n(x+n)}{n!(x+n)x^2}\Big|$ et on a donc $\Big|f(x)-\dfrac{1}{ex}+\dfrac{1}{ex^2}\Big|=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2}{n!(x+n)x^2}\leqslant\dfrac{1}{x^3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}$ donc on a mieux qu'avec la méthode précédente puisqu'on peut conclure que $f(x)\underset{+\infty}{=}\dfrac{1}{ex}-\dfrac{1}{ex^2}+O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)$.

39 **a.** Si $R = 0$, il n'y a rien à démontrer car $]-R;R[$ est vide.

Si $R > 0$, par produit de CAUCHY, comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est de rayon R donc que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge absolument pour $x \in]-R;R[$ par le lemme d'ABEL, $S(x)^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big)x^n = a_0^2 + 2a_0a_1x + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$ par hypothèse, ce qui donne $S(x)^2 = S(x) - x$ ou encore $S(x) = x + S(x)^2$.

b. À nouveau, si $R = 0$, il n'y a pas d'expression de $S(x)$ à trouver car $]-R;R[$ est vide.

Sinon, pour $x \in]-R;R[$, $S(x)^2 - S(x) + x = 0$ donc $S(x)$ est une racine réelle du polynôme $P_x = X^2 - X + x$. Comme le discriminant Δ_x du polynôme P_x vaut $\Delta_x = 1 - 4x$, et que $S(x)$ est un réel par construction, on a forcément $1 - 4x \geqslant 0$ donc $R \leqslant \frac{1}{4}$ et $\forall x \in]-R;R[$, $S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ ou $S(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}$. Comme $f : x \mapsto 2S(x) - 1$ est développable en série entière sur $]-R;R[$, elle y est continue et on sait d'après ce qui précède que $\forall x \in]-R;R[$, $f(x) = \pm\sqrt{1-4x}$. La continuité de f et le fait que f ne s'annule pas sur $]-R;R[$ montre que l'on a soit $\forall x \in]-R;R[$, $f(x) = \sqrt{1-4x}$ soit $\forall x \in]-R;R[$, $f(x) = -\sqrt{1-4x}$. Mais comme f vaut -1 en 0, elle est négative sur $]-R;R[$ et on a donc $\forall x \in]-R;R[$, $f(x) = -\sqrt{1-4x}$ donc $S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.

D'après le cours, on sait que $x \mapsto \sqrt{1-4x}$ est développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ car $u \mapsto \sqrt{1-u}$ l'est sur $]-1;1[$. Ainsi, il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, $T(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On a bien sûr $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, $T(x)^2 - T(x) + x = \frac{1-2\sqrt{1-4x}+(1-4x)}{4} - \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} + x = 0$. En effectuant un produit de CAUCHY sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, et en identifiant les coefficients (les calculs ont déjà été faits ci-dessus), on trouve que $v_0 = T(0) = 0$, $v_1 = T'(0) = 1$ et $\forall n \geqslant 2$, $b_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}$. Ainsi, les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence donc, par récurrence forte, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$ est bien de rayon $R = \frac{1}{4}$ comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$.

c. D'après le cours $\forall u \in]-1;1[$, $\sqrt{1+u} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!u^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ (on le retrouve assez vite avec le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$) donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, $\sqrt{1-4x} = 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!x^n}{(2n-1)(n!)^2}$ ce qui montre que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, $S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!x^n}{2(2n-1)(n!)^2}$. Comme $R = \frac{1}{4} > 0$ et que $\forall x \in]-R;R[$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!x^n}{2(2n-1)(n!)^2}$, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière, on a a_0 (on le savait déjà) et $\forall n \geqslant 1$, $a_n = \frac{(2n)!}{2(2n-1)(n!)^2} = \frac{(2n)(2n-2)!}{2n^2((n-1)!)^2} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Il vient $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 14$, $a_6 = 42$: ce sont les nombres de CATALAN.

40 **a.** Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n + x\sqrt{n} - 1$. La fonction polynomiale f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\forall x \geqslant 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + \sqrt{n} \geqslant \sqrt{n} > 0$. Ainsi, la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $f(0) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ donc, par le théorème de la bijection continue, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-1;+\infty[$ donc il existe un unique $x_n \in]0;+\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b. Comme $f_1(x) = 2x - 1$, on a $x_1 = \frac{1}{2}$. Puisque $f_2(x) = x^2 + x\sqrt{2} - 1$, on a $x_2 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \sim 0,52$.

La monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ne peut donc pas servir ici, ou alors à partir d'un certain rang. Par contre, comme $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > 0 = f_n(x_n) > -1 = f_n(0)$, on en déduit que $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ par stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ par encadrement.

c. Par construction, $f_n(x_n) = 0$ donc $\sqrt{n}\, x_n = 1 - x_n^n$. Mais $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $0 < x_n^n < \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ ce qui prouve que $x_n^n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Par conséquent, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{x_n^n}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ce qui montre que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par comparaison aux séries de Riemann, la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ diverge car $\frac{1}{2} \leqslant 1$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 4
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

41 pas fait

42 corrigé en TD et pas encore rédigé

43 pas fait

44 On va d'abord montrer que pour $A \subset \mathbb{R}$, $(A \text{ dense dans } \mathbb{R}) \iff \big(\forall [\alpha;\beta],\ \alpha < \beta \implies (\exists a \in A,\ a \in [\alpha;\beta])\big)$.

($\implies$) Si A est dense, $\overline{A} = \mathbb{R}$ donc tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A. Soit $[\alpha;\beta]$ avec $\alpha < \beta$, en posant par exemple $x_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{\beta-\alpha}{2} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |a_n - x_0| \leqslant \varepsilon \iff a_n \in [\alpha;\beta]$. Ainsi, $a_{n_0} \in A \cap [\alpha;\beta]$.

($\impliedby$) Supposons que $A \cap [\alpha;\beta] \neq \emptyset$ dès que $\alpha < \beta$. Soit un réel x_0 et $n \in \mathbb{N}$, prenons $\alpha_n = x_0 - \dfrac{1}{2^n}$ et $\beta_n = x_0 + \dfrac{1}{2^n} > \alpha_n$, alors il existe $a_n \in [\alpha_n;\beta_n] \cap A$ et l'encadrement $-\dfrac{1}{2^n} \leqslant x_0 - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ montre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x_0. Ainsi, $\overline{A} = \mathbb{R}$ et A est dense dans $\mathbb{R}$.

On a montré par double inclusion que $(A \text{ dense dans } \mathbb{R}) \iff (\forall [\alpha;\beta],\ \alpha < \beta \implies \big(\exists a \in A,\ a \in [\alpha;\beta])\big)$.

Montrons que $A = \big\{f(m) - f(n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\big\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit un segment $[\alpha;\beta] \subset \mathbb{R}$ non réduit à un point. On cherche un élément de A dans $[\alpha;\beta]$. Traitons plusieurs cas :

<u>$\alpha \leqslant 0 \leqslant \beta$</u> Prenons $n = m = 0$, alors $0 = f(0) - f(0) \in A \in [\alpha;\beta]$.

<u>$0 < \alpha < \beta$</u> Posons $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant M,\ |f'(x)| \leqslant \varepsilon$. Posons $n = \lfloor M \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ et $m = \mathrm{Min}(\{k \geqslant n \mid f(k) \geqslant f(n) + \alpha\})$. Cet entier m existe bien par propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ car la partie $X = \{k \geqslant n \mid f(k) \geqslant f(n) + \alpha\} \subset \mathbb{N}$ est non vide puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrons que $f(m) - f(n) \in [\alpha;\beta]$:

- Comme $m \in X$, on a $f(m) \geqslant f(n) + \alpha$ donc $f(m) - f(n) \geqslant \alpha$.
- On ne peut pas avoir $m = n$ car on aurait $f(m) - f(n) = 0$ contredisant $f(m) - f(n) \geqslant \alpha > 0$. Ainsi, $m > n$ donc $m - 1 \geqslant n$ et, par minimalité de m, $m - 1 \notin X$ donc $f(m-1) < f(n) + \alpha$. D'après le théorème des accroissements finis, comme f est dérivable sur $[m-1;m]$, il existe un réel $c \in]m-1;m[$ tel que $f(m) - f(m-1) = f'(c)(m - (m-1)) = f'(c)$. Or $c > m - 1 \geqslant n$ donc $|f'(c)| \leqslant \varepsilon$ et $f(m) = f(m-1) + f'(c) < f(n) + \alpha + \varepsilon = f(n) + \beta$ d'où $f(m) - f(n) \leqslant \beta$.

Le réel $f(m) - f(n)$ appartient donc à $[\alpha;\beta]$ et aussi à A par construction car $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

<u>$\alpha < \beta < 0$</u> D'après le cas précédent, comme $0 < -\beta < a$, $A \cap [-\beta;-\alpha] \neq \emptyset$ donc il existe $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(m) - f(n) \in [-\beta;-\alpha]$ et $f(n) - f(m) = -\big(f(m) - f(n)\big) \in A \cap [\alpha;\beta]$.

Ainsi, $A = \big\{f(m) - f(n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\big\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $A \cap [\alpha;\beta]$ est non vide dès que $\alpha < \beta$.

45 pas fait

46 **a.** Soit $f \in P$, comme $P = \bigcup_{T>0} P_T$ par définition, il existe $T > 0$ tel que $f \in P_T$. La fonction f est continue sur le segment $[0;T]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes et $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in [0;T]$, $|f(t)| \leqslant M$. Soit $t \in \mathbb{R}$, notons $n = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ de sorte que $n \leqslant \frac{t}{T} < n+1$ et $nT \leqslant t < nT + T$ d'où $x = t - nT \in [0;T[$. Comme f est T-périodique, on a $f(x) = f(t - nT) = f(t)$ mais $|f(x)| \leqslant M$ car $x \in [0;T]$ et on a donc $|f(t)| \leqslant M$. La fonction f est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f \in E$. On a bien établi que $P \subset E$.

b. Cas P_T : soit $T > 0$ fixé et $f \in P_T$. Pour tout réel $r > 0$, la fonction $g_r : t \mapsto f(t) + r\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ n'est pas T-périodique car $g_r(t+T) = f(t+T) + r\sin\left(\pi + \frac{\pi t}{T}\right) = f(t) - r\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \neq g_r(t)$ dès que $t \notin T\mathbb{Z}$. Ainsi, $B(f,s)$ n'est inclus dans P_T pour aucune valeur $s > 0$ donc aucune $f \in P_T$ n'est intérieure à P_T, ce qui montre que P_T est très loin d'être ouvert.

Cas P : la fonction nulle est périodique de toute période. Pour $r > 0$, soit la fonction affine par morceaux $a_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $a_r(0) = 0$, $a_r(-1) = -r$, $a_r(1) = r$, $a_r(-2) = 0$, $a_r(2) = 0$ et $\forall x \notin [-2;2]$, $a_r(x) = 0$. Alors $a_r \in E$ et $||a_r||_{\infty,\mathbb{R}} = r$. Comme a_r n'est pas périodique, encore une fois, $B(0,s)$ n'est inclus dans P pour aucune valeur $s > 0$, ce qui montre que P n'est pas ouvert.

c. Cas P_T : soit $T > 0$ fixé et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de P_T qui converge vers une fonction $f \in E$. Par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x+T) = f_n(x-T) = f_n(x)$ on a $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. Ainsi, f est aussi T-périodique donc $f \in P_T$. Ainsi, par caractérisation séquentielle des fermés, P_T est fermé.

Cas P : ???.

47 **a.** Dans le calcul de $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 3 \\ 5 & X-2 & -1 \\ -5 & 1 & X+6 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de Gauss $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ pour avoir $\chi_A = \begin{vmatrix} X+2 & -1 & 3 \\ X+2 & X-2 & -1 \\ X+2 & 1 & X+6 \end{vmatrix} = (X+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & 1 & X+6 \end{vmatrix}$ par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne. On effectue ensuite $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et on trouve l'expression $\chi_A = (X+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & X-1 & -4 \\ 0 & 2 & X+3 \end{vmatrix} = (X+2)\begin{vmatrix} X-1 & -4 \\ 2 & X+3 \end{vmatrix} = (X+2)\big((X-1)(X+3)+8\big) = (X+2)(X^2+2X+5)$ après avoir développé par rapport à la première colonne.

b. Comme $\chi_A = (X+2)\big((X+1)^2+4\big) = (X+2)(X+1+2i)(X+1-2i)$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-2, -1-2i, -1+2i\}$ et A est diagonalisable car χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Il existe donc une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$. Il est alors classique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et, comme $|-1 \pm 2i| = \sqrt{5} > 2 = |-2|$, on a $||D^n||_\infty = (\sqrt{5})^n$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, posons le réel positif $||M||_0 = ||P^{-1}MP||_\infty$. Comme $||\,.\,||_\infty$ est une norme d'après le cours :
Séparation : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $||M||_0 = 0$, alors $||P^{-1}MP||_\infty = 0$ donc $P^{-1}MP = 0$ d'où $M = 0$.

Homogénéité : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $||\lambda M||_0 = ||P^{-1}(\lambda M)P||_\infty = |\lambda|\,||P^{-1}MP||_\infty = |\lambda|\,||M||_0$.

Inégalité triangulaire : soit $(M, M') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $||M+M'||_0 = ||P^{-1}(M+M')P||_\infty = ||P^{-1}MP+P^{-1}M'P||_\infty$ donc $||M + M'||_0 \leqslant ||P^{-1}MP||_\infty + ||P^{-1}M'P||_\infty = ||M||_0 + ||M'||_0$.

Ainsi, l'application $M \mapsto ||M||_0$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque toutes les normes sont équivalentes sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\alpha||M||_0 \leqslant ||M|| \leqslant \beta||M||_0$. On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha||A^n||_0 \leqslant ||A^n|| \leqslant \beta||A^n||_0$ et, d'après le cours, en notant R (resp. R_0) le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||A^n||z^n$ (resp. $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||A^n||_0 z^n$), on a $R_0 \geqslant R \geqslant R_0$ car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Comme le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||A^n||_0 z^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} ||D^n||_\infty z^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (\sqrt{5}z)^n$ vaut clairement $R_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ car $\big((\sqrt{5}|z|)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|z| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, on a $R = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

48 **a.** Comme $x \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$, il existe $y \in E$ tel que $x = (u - \mathrm{id}_E)(y) = u(y) - y$ ce qui s'écrit $u(y) = x + y$.

b. Comme $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$, on a $u(x) = x$. Ainsi, par une récurrence facile, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = x$. Soit $n \in \mathbb{N}$, en composant l'égalité $u(y) = x + y$ par u^k pour $k \in [\![0; n - 1]\!]$, on a $u^{k+1}(y) = u^k(x) + u^k(y)$ donc $u^{k+1}(y) - u^k(y) = u^k(x) = x$. Ainsi, par télescopage, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u^{k+1}(y) - u^k(y)) = u^n(y) - y = nx$ donc $u^n(y) = nx + y$ (et même pour $n = 0$ car $u^0(y) = \mathrm{id}_E(y) = y = 0.x + y$).

c. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x = \dfrac{u^n(y) - y}{n}$. Or $||u(y)|| \leqslant ||y||$ et, là encore par une récurrence simple, on montre que $\forall m \in \mathbb{N}$, $||u^m(y)|| \leqslant ||y||$, ce qui montre que $0 \leqslant ||x|| \leqslant \dfrac{||u^n(y)|| + ||y||}{n} \leqslant \dfrac{2||y||}{n}$ par inégalité triangulaire donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2||y||}{n} = 0$, en passant à la limite, $||x|| = 0$ donc $x = 0_E$.

d. On vient de voir avec **c.** que $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe mais, avec la formule du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)) = \dim(E)$. Ainsi, on a $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = E$ et les sous-espaces $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 5 RÉDUCTION

49 pas fait

50 pas fait

51 pas fait

52 **a.** ($\Longrightarrow$) Supposons que F est stable par M. Montrons que $F^{\perp}$ est stable par M^{T}. Soit $X \in F^{\perp}$ et $Y \in F$, alors $(M^{T}X|Y) = (Y|M^{T}X) = Y^{T}M^{T}X = (MY)^{T}X = (MY|X) = 0$ car $X \in F^{\perp}$ et $MY \in F$ car F est stable par M. Ainsi, $F^{\perp}$ est stable par M^{T}. On vient de montrer que, pour tout sous-espace F de E et toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a F stable par $M \Longrightarrow F^{\perp}$ stable par M^{T}.

($\Longleftarrow$) On applique ce qui précède à $(F^{\perp}, M^{T})$ et $F^{\perp}$ stable par $M^{T} \Longrightarrow (F^{\perp})^{\perp} = F$ stable par $(M^{T})^{T} = M$.

Par double implication, F est stable par M si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par M^{T}.

b. On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-(1/2) & 0 & -(1/2) \\ 0 & X-1 & 0 \\ (1/2) & 0 & X-(3/2) \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-(1/2) & -(1/2) \\ (1/2) & X-(3/2) \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la deuxième colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-1)\left[\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}\right] = (X-1)^3$. Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^3$:
.

<u>$\dim(F)=0$</u> Alors $F = \{0\}$ est stable par A.

<u>$\dim(F)=1$</u> Alors F est une droite et F est stable par A si et seulement si F est engendrée par un vecteur propre de A. Or, comme $A - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathbb{E}_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (0,1,0)$. Ainsi, toutes les droites stables F par A sont les droites $F = \mathrm{Vect}(v)$ avec $v = av_1 + b_2$ et $(a,b) \neq (0,0)$. Il y en a une infinité.

<u>$\dim(F)=2$</u> Alors F^{T} est une droite et F est stable par A si et seulement si F^{T} est stable par A^{T}. Or $A^{T} - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $E_1(A^{T}) = \mathrm{Ker}(A^{T} - I_3) = \mathrm{Vect}(v_3, v_2)$ avec $v_3 = (1,0,-1)$.
Ainsi, F est un plan stable par A si et seulement si $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(\alpha v_3 + \beta v_2)$ avec $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, c'est-à-dire si et seulement si F a pour équation $F\ :\ \alpha x + \beta y - \alpha z = 0$ avec $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Il y en a aussi une infinité.

<u>$\dim(F)=3$</u> Alors $F = \mathbb{R}^3$ est stable par A.

53 **a.** Si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ par définition. Soit λ une valeur propre de A, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}\ \mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. On a donc $PBP^{-1}X = \lambda X$ donc $BY = \lambda Y$ en posant $Y = P^{-1}X$. Comme $X \neq 0$ et P inversible, $Y \neq 0$ donc λ est une valeur propre de B. On vient de montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(B)$. Par symétrie, $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathrm{Sp}(A)$ et, par double inclusion, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.

b. Supposons que M admette une valeur propre λ non nulle. D'après la question **a.**, λ est une valeur propre de $2M$, ce qui fait que $\frac{\lambda}{2}$ est une valeur propre de M. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\frac{\lambda}{2^n}$ est une valeur propre de M. Cela ferait une infinité de valeurs propres de M, ce qui est absurde car les valeurs propres de M sont les racines de χ_M, et il y en a au maximum n.

On vient de montrer que M ne peut avoir que 0 comme valeur propre. Comme M admet au moins une valeur propre avec le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, on a $Sp(M) = \{0\}$. Toujours d'après ce théorème, on a donc $\chi_M = (X-0)^n$ car χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, unitaire et de degré n. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, il vient $M^n = 0$ donc M est nilpotente.

c. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} \neq 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de sorte que $2M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $M^2 = 0$ donc M est nilpotente et non nulle. Si on prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a P inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et on vérifie facilement que $2M = P^{-1}MP$ donc que M et $2M$ sont semblables.

d. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $\text{rang}\,(M) = 1$.

<u>Méthode 1</u> : comme la matrice M est de rang 1, il existe une matrice colonne $C \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et une matrice ligne $L \neq 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ telles que $M = CL$. Ainsi, $M^2 = C(LC)L = (LC)(CL) = LCM$. Or $LC = \text{Tr}\,(LC) = \text{Tr}\,(CL) = \text{Tr}\,(M)$ de sorte que $M^2 = \text{Tr}\,(M)M$. Mais si λ est une valeur propre de M, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$ et $M^3X = \lambda^3 X = 0$ donc $\lambda^3 = 0$ et $\lambda = 0$. Ainsi, $Sp(M) = \{0\}$ donc, comme M est trigonalisable donc semblable à une matrice triangulaire avec des 0 sur la diagonale, on a $\text{Tr}\,(M) = 0$ donc $M^2 = 0$. Ainsi, comme $M \times M = 0$, on a $\text{Im}\,(M) \subset \text{Ker}(M)$.

<u>Méthode 2</u> : soit $X_2 \neq 0$ un vecteur de $\text{Im}\,(M)$ de sorte que $\text{Im}\,(M) = \text{Vect}(X_2)$ car $\text{Im}\,(M)$ est une droite. Comme $\text{Im}\,(M)$ est stable par M, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $MX_2 = \alpha X_2$. Mais comme M est nilpotente, 0 est à nouveau la seule valeur propre de M donc $\alpha = 0$ car $X_2 \neq 0$. Ainsi, $X_2 \in \text{Ker}(M)$ donc $\text{Im}\,(M) \subset \text{Ker}(M)$.

Dans les deux cas, on a prouvé que $\text{Im}\,(M) \subset \text{Ker}(M)$. Si (X_2) est une base de $\text{Im}\,(M)$, par le théorème de la base incomplète, il existe $X_1 \in \mathbb{C}^3$ tel que (X_1, X_2) est une base de $\text{Ker}(M)$ car $\text{Ker}(M)$ est un plan d'après la formule du rang. Soit $X_3 \in \mathbb{C}^3$ un antécédent de $X_2 \in \text{Im}\,(M)$ par M de sorte que $MX_3 = X_2$. La famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est de cardinal $3 = \dim(\mathbb{C}^3)$ et elle est libre car (X_1, X_2) est elle-même libre et que $X_3 \notin \text{Vect}(X_1, X_2) = \text{Ker}(M)$ puisque $X_2 \neq 0$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et, en notant m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à M, on a $E_{2,3} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(m)$ par construction. Comme $E_{2,3}$ et M représente le même endomorphisme dans deux bases différentes, M est semblable à $E_{2,3}$.

Comme M et $2M$ sont nilpotentes et de même rang 1, ce qui précède montre que M et $2M$ sont semblables à $E_{2,3}$. Comme la relation de similitude est une relation d'équivalence, M est semblable à $2M$.

e. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n, alors $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$. Il existe donc $X \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $M^{n-1}X \neq 0$. Si $(X, MX, \cdots, M^{n-1}X)$ était liée, il existerait une famille $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{C}^n$ telle que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k M^k X = 0$. On pourrait définir l'entier $i = \text{Min}(\{k \in [\![0; n-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}) \in [\![0; n-1]\!]$ de sorte que l'on aurait $\sum\limits_{k=i}^{n-1} \lambda_k M^k X = 0$. On multiplierait (1) par M^{n-1-i} à gauche pour avoir $\sum\limits_{k=i}^{n-1} \lambda_k M^{n-1-i+k} X = 0$ et il ne resterait que $\lambda_i M^{n-1} X = 0$ car $M^n = 0$. Or ceci est impossible car $\lambda_i \neq 0$ et $M^{n-1}X \neq 0$ par hypothèse.

On a montré par l'absurde que $\mathcal{B} = (X, MX, \cdots, M^{n-1}X)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{C}^n$ car son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{C}^n$. En notant m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M, on a $M = PJP^{-1}$ avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et $J = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(m) = (\delta_{i,j+1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice avec des 0 partout sauf sur la sous-diagonale où il y a des 1. Comme $2M$ est aussi nilpotente d'indice n, ce qui précède montre que $2M$ est aussi semblable à J donc, par transitivité et symétrie de la relation binaire de similitude, M et $2M$ sont semblables.

54 **a.** Comme χ_A est unitaire par construction et scindé sur $\mathbb{C}$ par D'ALEMBERT-GAUSS, si $a_1, \cdots, a_r$ sont les valeurs propres distinctes de A, on peut écrire $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^{r}(X - a_i)^{m_{a_i}(A)}$ d'où $\chi_A(B) = \prod\limits_{i=1}^{r}(B - a_iI_n)^{m_{a_i}(A)}$. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe multiplicatif, on a $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ B - a_iI_n \in GL_n(\mathbb{C})$. On peut aussi le justifier par le déterminant (qui est une fonction multiplicative), en écrivant que l'on a $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \det(\chi_A(B)) \neq 0 \iff \prod\limits_{i=1}^{r}(\det(B - a_iI_n))^{m_{a_i}(A)} \neq 0 \iff \forall i \in [\![1;r]\!],\ \det(B - a_iI_n) \neq 0$. Or $B - a_iI_n \in GL_n(\mathbb{C})$ car $\det(B - a_iI_n) = (-1)^n\chi_B(a_i) \neq 0$ puisque a_i étant une valeur propre de A, elle ne peut pas être une valeur propre de B car on a supposé $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. On a donc bien $\chi_A(B)$ inversible.

b. Par hypothèse, $AX = XB$. Alors $A^2X = A(AX) = A(XB) = (AX)B = XB^2$. Par une récurrence facile, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^kX = XB^k$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kX^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kA^kX = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kXB^k = XP(B)$. En prenant $P = \chi_A$, on obtient donc $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$ ce qui donne, avec CAYLEY-HAMILTON, $X\chi_A(B) = 0$. Or on a vu en **b.** que $\chi_A(B)$ est inversible. Il ne reste donc plus que $X = 0$.

c. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(X) = AX - XB$. Comme φ est visiblement linéaire, φ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, donc φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective. Soit $X \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $AX = XB$ et, avec la question précédente, $X = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ce qui montre que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La bijectivité de φ permet de conclure que, comme attendu, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = \varphi(X) = M$.

55 pas fait

56 **a.** $P(2) = 2^5 - 4.2^4 + 2.2^3 + 8.2^2 - 8.2 = 32 - 64 + 16 + 32 - 16 = 0$ et, comme $P' = 5X^4 - 16X^3 + 6X^2 + 16X - 8$, on a aussi $P'(2) = 5.2^4 - 16.2^3 + 6.2^2 + 16.2 - 8 = 80 - 128 + 24 + 32 - 8 = 0$. Ainsi, 2 est racine au moins double de P et 0 est clairement racine de P ce qui montre que $P = X(X-2)^2Q$ avec $\deg(Q) = 2$ d'où $Q = aX^2 + bX + c$. En identifiant le terme en X^5, on a $a = 1$, celui en X donne $c = -2$ et celui en X^2 permet d'avoir $b = 0$. Par conséquent, $P = X(X-2)^2(X^2-2) = X(X-2)^2(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$.

b. Analyse : si $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(M) = 0$ et $\text{Tr}\,(M) = 0$, comme P est annulateur de M, on sait d'après le cours que $Sp(M) \subset \{0, 2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Puisque $Sp_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, $\text{Tr}\,(M) = m_0(M).0 + m_2(M).2 + m_{\sqrt{2}}(M).\sqrt{2} + m_{-\sqrt{2}}(M).(-\sqrt{2}) = 2a + (b-c)\sqrt{2}$ en notant $a = m_2(M) \in \mathbb{N}$, $b = m_{\sqrt{2}}(M) \in \mathbb{N}$ et $c = m_{-\sqrt{2}}(M) \in \mathbb{N}$. Comme $\text{Tr}\,(M) = 0$, on a $2a + (b-c)\sqrt{2} = 0$. Si on avait $a \neq 0$, on aurait $\sqrt{2} = \dfrac{c-b}{a} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car on sait que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Ainsi, $a = 0$ donc $\text{Tr}\,(M) = (b-c)\sqrt{2}$ et $b = c$. Comme $m_2(M) = 0$, 2 n'est pas valeur propre de M

donc $M-2I_n$ est inversible et la relation $M(M^2-2I_n)(M-2I_n)^2=0$ se résume à $M(M^2-2I_n)=0$ en multipliant par $(M-2I_n)^{-2}$ (tout commute). Le polynôme $R=X(X^2-2)=X^3-2X=X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ est scindé à racines simples et annulateur de M qui est donc une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $m_0(M)+m_{\sqrt{2}}(M)+m_{-\sqrt{2}}(M)=n$, on a $m_0(M)=n-2b$ et, en notant $D=\begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{b,n-2b} & \sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -\sqrt{2}I_b \end{pmatrix}$ (par blocs), il existe une matrice $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M=PDP^{-1}$ (P est la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de M (dans le bon ordre).

Synthèse : si $n\in\mathbb{N}^*$, $b\in\mathbb{N}$ tel que $2b\leqslant n$ et $M=P\begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{n-2b,b} & \sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -\sqrt{2}I_b \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P\in GL_n(\mathbb{R})$, on a $M^3=P\begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{n-2b,b} & \sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -\sqrt{2}I_b \end{pmatrix}^3 P^{-1}=P\begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{n-2b,b} & 2\sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -2\sqrt{2}I_b \end{pmatrix}P^{-1}=2M$ donc $R(M)=0$ d'où $P(M)=(M-2I_n)^2R(M)=0$ et $\mathrm{Tr}\,(M)=(\sqrt{2}-\sqrt{2})b=0$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, les matrices $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P(M)=0$ et $\mathrm{Tr}\,(M)=0$ sont donc toutes les matrices de la forme précédente, ça en fait beaucoup !

57 pas fait

58 **a.** La construction par blocs montre qu'on multiplie par 2 la taille de la matrice à chaque étape, et comme la taille vaut 1 quand n vaut 0, par une récurrence simple, la taille de A_n vaut 2^n pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

b. La matrice $A_0=(1)$ est de rang 1, $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ est inversible donc de rang 2. Pour tout $n\geqslant 1$, si on effectue l'opération de Gauss $C_2\longleftarrow C_2-C_1$ (par blocs) pour le calcul du déterminant de A_{n+1}, on a $\det(A_{n+1})=\begin{vmatrix}A_n & 0\\ A_n & -A_n\end{vmatrix}$ donc $\det(A_{n+1})=\det(A_n)\det(-A_n)=(-1)^{2^n}\det(A_n)^2=\det(A_n)^2$. Par récurrence, on a donc $\det(A_0)=1$, $\det(A_1)=-1$ et $\forall n\geqslant 2,\ \det(A_n)=1\neq 0$ donc A_n est inversible ce qui montre que son rang vaut 2^n.

c. Par une récurrence simple, on établit que toutes les matrices A_n sont réelles et symétriques donc, par le théorème spectral, A_n est diagonalisable. $Sp(A_0)=\{1\}$ et, comme $\chi_{A_1}=X^2-X-1$, $Sp(A_1)=\{\alpha,\beta\}$ avec $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ qui vérifient $\alpha+\beta=1$ et $\alpha\beta=-1$ (relations coefficients/racines). Après calculs, on trouve $\chi_{A_2}=X^4-X^3-4X^2-X+1=(X+1)^2\Big(X-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(X-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)$ donc $Sp(A_2)=\{-1,\alpha^2,\beta^2\}$. Comme $\alpha\beta=-1$, on a donc $Sp(A_2)=\{\alpha^2,\alpha\beta,\beta^2\}$. La récurrence arrive :

Initialisation : on vient de voir que $Sp(A^n)=\{\alpha^i\beta^j\mid i+j=n\}$ pour $n=0,1,2$.

Hérédité : soit $n\geqslant 2$ tel que $Sp(A^n)=\{\alpha^i\beta^j\mid i+j=n\}$.

($\subset$) Soit λ une valeur propre de A_{n+1}. On sait que $\lambda\neq 0$ d'après **b.** car A_n inversible. Il existe un vecteur colonne $V=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ non nul (écrit pas blocs 2^n+2^n) tel que $A_{n+1}V=\lambda V$, ce qui équivaut à $A_nX+A_nY=\lambda X$ (1) et $A_nX=\lambda Y$ (2). En reportant (2) multiplié à gauche par A_n dans (1) multiplié par λ, on obtient $\lambda A_nX+A_n^2X-\lambda^2X=0=\Big(A_n-\dfrac{\lambda}{\alpha}I_{2^n}\Big)\Big(A_n-\dfrac{\lambda}{\beta}I_{2^n}\Big)X$ (car $\alpha\beta=-1$

et $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{-1}=-1$). Si on avait $X=0$, on aurait aussi $Y=0$ d'après (1) car $\lambda\neq 0$ et on aurait alors $V=0$: NON ! Ainsi, $X\neq 0$ donc $\left(A_n-\dfrac{\lambda}{\alpha}I_{2^n}\right)\left(A_n-\dfrac{\lambda}{\beta}I_{2^n}\right)$ n'est pas inversible ce qui prouve que $A_n-\dfrac{\lambda}{\alpha}I_{2^n}\notin GL_{2^n}(\mathbb{R})$ ou $A_n-\dfrac{\lambda}{\beta}I_{2^n}\notin GL_{2^n}(\mathbb{R})$ (car $GL_{2^n}(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif). Par hypothèse de récurrence, on a donc $\dfrac{\lambda}{\alpha}\in Sp(A_n)=\{\alpha^i\beta^j\mid i+j=n\}$ ou $\dfrac{\lambda}{\beta}\in Sp(A_n)=\{\alpha^i\beta^j\mid i+j=n\}$. Dans les deux cas, que $\lambda=\alpha^{i+1}\beta^j$ ou $\lambda=\alpha^i\beta^{j+1}$ avec $i+j=n$, on a $(i+1)+j=n+1$ ou $i+(j+1)=n+1$ et on a bien $\lambda\in\{\alpha^{i'}\beta^{j'}\mid i'+j'=n+1\}$.

($\supset$) Réciproquement, soit $\lambda\in\{\alpha^{i'}\beta^{j'}\mid i'+j'=n+1\}$. Considérons deux cas :

- Si $i'=0$, $j'=n+1$ et $\lambda=\beta^{n+1}$. Comme $\beta^n\in Sp(A_n)$ par hypothèse de récurrence, soit un vecteur propre $X\in E_{\beta^n}(A_n)$ (donc $X\neq 0$), en posant $V=\begin{pmatrix}X\\ \dfrac{A_nX}{\beta^{n+1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ \dfrac{X}{\beta}\end{pmatrix}\neq 0$, alors $A_{n+1}V=\begin{pmatrix}A_nX+\dfrac{A_nX}{\beta}\\ A_nX\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\beta^n+\beta^{n-1})X\\ \beta^nX\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta^{n+1}X\\ \beta^nX\end{pmatrix}=\beta^{n+1}V$ car $\beta^2=\beta+1$ donc $\lambda=\beta^{n+1}\in Sp(A_{n+1})$ car V est un vecteur non nul tel que $A_{n+1}=\beta^{n+1}V$.
- Si $i'\in[\![1;n+1]\!]$, on a $\lambda=\alpha^{i'}\beta^{j'}$. Comme $\alpha^{i'-1}\beta^{j'}\in Sp(A_n)$ par hypothèse de récurrence, soit un vecteur propre $X\in E_{\alpha^{i'-1}\beta^{j'}}(A_n)$ (donc $X\neq 0$), en posant $V=\begin{pmatrix}X\\ \dfrac{A_nX}{\alpha^{i'}\beta^{j'}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ \dfrac{X}{\alpha}\end{pmatrix}\neq 0$, alors $A_{n+1}V=\begin{pmatrix}A_nX+\dfrac{A_nX}{\alpha}\\ A_nX\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha^{i'-1}\beta^{j'}+\alpha^{i'-2}\beta^{j'})X\\ \alpha^{i'-1}\beta^{j'}X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^{i'}\beta^{j'}X\\ \alpha^{i'-1}\beta^{j'}X\end{pmatrix}=\alpha^{i'}\beta^{j'}V$ car $\alpha^2=\alpha+1$ donc $\lambda=\alpha^{i'}\beta^{j'}\in Sp(A_{n+1})$ car V est un vecteur non nul tel que $A_{n+1}=\alpha^{i'}\beta^{j'}V$.

Dans les deux cas, $\lambda\in Sp(A_{n+1})$ et, par double inclusion, on a bien $Sp(A_{n+1})=\{\alpha^{i'}\beta^{j'}\mid i'+j'=n+1\}$.

Par principe de récurrence, on a établi que $\forall n\in\mathbb{N},\ Sp(A_n)=\{\alpha^i\beta^j\mid i+j=n\}$.

59 **a.** Posons $F=\{f_{a,b}:z\mapsto az+b\overline{z}\mid (a,b)\in\mathbb{C}^2\}$ et vérifions que $E=F$.

($\subset$) : soit $f\in E$, alors $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=f(\mathrm{Re}(z).1+\mathrm{Im}(z).i)=\mathrm{Re}(z)f(1)+\mathrm{Im}(z)f(i)$ car f est $\mathbb{R}$-linéaire et que $(\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z))\in\mathbb{R}^2$ et $(1,i)\in\mathbb{C}^2$. Avec les formules d'Euler, $f(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}f(1)+\dfrac{z-\overline{z}}{2i}f(i)=az+b\overline{z}$ avec $a=\dfrac{f(1)}{2}+\dfrac{f(i)}{2i}\in\mathbb{C}$ et $b=\dfrac{f(1)}{2}-\dfrac{f(i)}{2i}\in\mathbb{C}$. Par conséquent, $f=f_{a,b}$ et $E\subset F$.

($\supset$) : soit $f\in F$, il existe $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=f_{a,b}(z)=az+b\overline{z}$. Pour $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $f(\lambda z+\mu z')=a(\lambda z+\mu z')+b\overline{(\lambda z+\mu z')}=\lambda az+\mu az'+\lambda b\overline{z}+\mu b\overline{z'}=\lambda(az+b\overline{z})+\mu(az'+b\overline{z'})=\lambda f(z)+\mu f(z')$ donc f est $\mathbb{R}$-linéaire et $f\in E$. Ainsi, $F\subset E$.

Par double inclusion, on a bien établi que $E=F=\{f_{a,b}:z\mapsto az+b\overline{z}\mid (a,b)\in\mathbb{C}^2\}$.

b. Soit $\mathcal{B}=(1,i)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, comme $f(1)=a+b$ et $f(i)=ai-bi$ donc $f(1)=(\mathrm{Re}(a)+\mathrm{Re}(b)).1+(\mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(b)).i$ et $f(i)=(-\mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(b)).1+(\mathrm{Re}(a)-\mathrm{Re}(b)).i$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{a,b})=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(a)+\mathrm{Re}(b) & -\mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(b)\\ \mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(b) & \mathrm{Re}(a)-\mathrm{Re}(b)\end{pmatrix}$ d'où $\mathrm{Tr}\,(f_{a,b})=2\mathrm{Re}(a)$ et $\det(f_{a,b})=|a|^2-|b|^2$.

c. D'après la question précédente, $\chi_{f_{a,b}}=X^2-\mathrm{Tr}\,(f_{a,b})X+\det(f_{a,b})=X^2-2\mathrm{Re}(a)X+|a|^2-|b|^2$. Soit Δ le discriminant de $\chi_{f_{a,b}}$, comme $\Delta=4\mathrm{Re}(a)^2-4(|a|^2-|b|^2)=4(|b|^2-\mathrm{Im}(a)^2)$, on traite trois cas :

Si $|b| > |\mathrm{Im}\,(a)|$, $\Delta > 0$ donc $\chi_{f_{a,b}}$ admet deux racines simples réelles ce qui prouve que $f_{a,b}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Si $|b| < |\mathrm{Im}\,(a)|$, $\Delta < 0$ donc $\chi_{f_{a,b}}$ admet deux racines simples complexes non réelles (et conjuguées) ce qui prouve que $f_{a,b}$ n'est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car $\chi_{f_{a,b}}$ n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $|b| = |\mathrm{Im}\,(a)|$, $\Delta = 0$ et $\chi_{f_{a,b}} = (X - \mathrm{Re}\,(a))^2$ donc $\mathrm{Sp}(f_{a,b}) = \{\mathrm{Re}\,(a)\}$. Or, d'après le cours, $f_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $f_{a,b} - \mathrm{Re}\,(a)\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{a,b}) - \mathrm{Re}\,(a)I_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(b) & -\mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Im}\,(b) \\ \mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Im}\,(b) & -\mathrm{Re}\,(b) \end{pmatrix} = 0$. Cette condition impose $\mathrm{Re}\,(b) = \mathrm{Im}\,(a) = \mathrm{Im}\,(b)$, c'est-à-dire $b = 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $f_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si ($|b| \neq |\mathrm{Im}\,(a)|$ ou ($b = 0$ et $a \in \mathbb{R}$)). Dans ce dernier cas, $f_{a,0}$ est l'homothétie de rapport a.

60 pas fait

61 **a.** Méthode 1 : soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_N[A]$ est la matrice A. Par définition, $f(1) = X$, $\forall k \in [\![1; N-1]\!]$, $f(X^k) = \dfrac{k}{N}X^{k-1} + \dfrac{N-k}{N}X^{k+1}$ et $f(X^N) = X^{N-1}$. Pour $P = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{R}_N[X]$, par linéarité de f, on a $f(P) = a_0 f(1) + \Big(\sum\limits_{k=0}^{N} a_k f(X^k)\Big) + a_N f(X^N)$ donc $f(P) = a_0 X + a_N X^{N-1} + \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k\Big(\dfrac{k}{N}X^{k-1} + \dfrac{N-k}{N}X^{k+1}\Big) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k X^{k-1} + \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^{k+1} - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N-1} k a_k N X^{k+1}$ ce qui donne $f(P) = \dfrac{P'}{N} + XP - \dfrac{X^2P}{N} = XP + \dfrac{1-X^2}{N}P'$.

Méthode 2 : $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se reconnaît aisément, c'est la matrice de l'endomorphisme $f_1 : P \mapsto \dfrac{P'}{N}$ de l'espace $E = \mathbb{R}_N[X]$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^N)$ car $\forall k \geqslant 1$, $f_1(X^k) = \dfrac{k}{N}X^{k-1}$.

La matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}$ est obtenue à partir de A_1 en échangeant l'ordre des lignes et des colonnes. Ceci signifie que $A_2 = PA_1P$ où P est la matrice qui contient des 1 sur la "seconde" diagonale et des 0 partout ailleurs : $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant N+1}$ avec $p_{i,j} = 1$ si $i + j = N + 2$ et $p_{i,j} = 0$ sinon. Or P est la matrice de l'endomorphisme g de E qui envoie X^k sur X^{N-k} et on constate que l'on a l'expression $g : P \mapsto X^N P\Big(\dfrac{1}{X}\Big)$. Ainsi, A_2 est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E de $f_2 = g \circ f_1 \circ g$. Or, pour un polynôme $P \in E$, il vient $f_1 \circ g(P) = \dfrac{1}{N}\Big(X^N P\Big(\dfrac{1}{X}\Big)\Big)' = X^{N-1}P\Big(\dfrac{1}{X}\Big) - \dfrac{X^{n-2}}{N}P'\Big(\dfrac{1}{X}\Big)$, ce qui donne finalement $f_2(P) = g((f_1 \circ g)(P)) = X^N\Big(X^{1-N}P(X) - \dfrac{X^{2-N}}{N}P'(X)\Big) = XP(X) - \dfrac{X^2}{N}P'(X)$.

Au final, comme $A = A_1 + A_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $f = f_1 + f_2 : P \mapsto XP + \dfrac{1-X^2}{N}P'$.

b. Cherchons les éléments propres de f.

<u>Analyse</u> : soit un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et un polynôme $P \in E$ tels que $f(P) = \lambda P$, on a donc $(1-X^2)P' - N(\lambda - X)P = 0$. La fonction polynomiale P est donc solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ (1-t^2)y' = N(\lambda - t)y$. Or $\dfrac{\lambda - t}{1-t^2} = \dfrac{\lambda+1}{2}.\dfrac{1}{1+t} + \dfrac{\lambda-1}{2}.\dfrac{1}{1-t}$. Ainsi les solutions de (E) (sur l'intervalle $]-1;1[$ par exemple) sont les $y : t \mapsto \alpha(1+t)^{\frac{N(\lambda+1)}{2}}(1-t)^{\frac{N(1-\lambda)}{2}}$ qui sont des fonctions polynomiales non nulles si $\alpha \neq 0$ et $\dfrac{N(\lambda+1)}{2} = k$ et $\dfrac{N(1-\lambda)}{2} = k'$ sont des entiers naturels avec $k + k' = N$. Ainsi, il existe $k \in [\![0;N]\!]$ tel que $\lambda = \dfrac{2k}{N} - 1$ est valeur propre de A associé au vecteur propre $P_k = (1+X)^k(1-X)^{N-k} \in \mathbb{R}_N[X]$. A est bien diagonalisable.

<u>Synthèse</u> : pour tout $k \in [\![0;N]\!]$, posons $\lambda_k = \dfrac{2k}{N} - 1$ et $P_k = (1+X)^k(1-X)^{N-k} \in \mathbb{R}_N[X]$, les calculs précédents montrent que $f(P_k) = \lambda_k P_k$ avec $P_k \neq 0$ donc λ_k est une valeur propre de f.

<u>Conclusion</u> : A est diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ admet $N+1$ valeurs propres distinctes, on peut même affirmer que tous les sous-espaces propres $E_{\lambda_k}(A)$ sont des droites et $E_{\lambda_k}(f) = \text{Vect}(P_k)$.

De plus, comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, on a $\text{Tr}\ (A) = \sum\limits_{k=0}^{N} \lambda_k$ donc $\text{Tr}\ (A) = \sum\limits_{k=0}^{N}\left(\dfrac{2k}{N} - 1\right) = \dfrac{2}{N} \times \dfrac{N(N+1)}{2} - (N+1) = 0$ (ce qu'on savait déjà car il n'y a que des 0 sur la diagonale de A) et $\det(A) = \prod\limits_{k=0}^{N}\left(\dfrac{2k}{N} - 1\right)$ donc $\det(A) = 0$ si $N = 2p$ est pair car $\lambda_p = \dfrac{2p}{2p} - 1 = 0$ et $\det(A) = \prod\limits_{k=0}^{N}\left(\dfrac{2k}{2p+1} - 1\right) = \prod\limits_{k=0}^{N}\dfrac{2k-2p-1}{2p+1} = (-1)^{p+1}\prod\limits_{i=0}^{p}\dfrac{2i+1}{2p+1} = \dfrac{(2p+1)!}{2^p(2p+1)^{p+1}p!}$ (calcul classique en faisant intervenir les termes pairs manquants) si $N = 2p+1$ est impair.

62 **a.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$. Soit $\lambda \in Sp(M)$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ M^kX = \lambda^kX$. Pour $k = p$, on a donc $M^pX = 0 = \lambda^pX$ donc $\lambda^p = 0$ car $X \neq 0$ d'où $\lambda = 0$. Ainsi, la seule valeur propre de M est 0 et, comme χ_M est scindé dans $\mathbb{C}$ par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, on a $\chi_M = X^n$.

Seul nous intéresse le fait que χ_M soit scindé dans $\mathbb{C}$, ce qui montre d'après le cours que M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure avec des 0 (seule valeur propre) sur la diagonale telles que $M = PTP^{-1}$. Alors $\det(I_n + M) = \det(I_n + PTP^{-1}) = \det(P(I_n + T)P^{-1}) = \det(I_n + T)$ car $I_n + T$ et $P(I_n + T)P^{-1}$ sont semblables. Comme $I_n + T$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, on a $\det(I_n + T) = 1 = \det(I_n + M)$.

On pouvait aussi dire que $-M$ est aussi nilpotente donc $\chi_{-M} = X^n$ et $\det(I_n + M) = \chi_{-M}(1) = 1^n = 1$.

b. Si U est inversible, on a $U + V = U(I_n + U^{-1}V)$ donc, par multiplicativité du déterminant, on obtient $\det(U + V) = \det(U)\det(I_n + U^{-1}V) = \det(U)\det(I_n + M)$ en posant $M = U^{-1}V$. Comme $UV = VU$, on a aussi $U^{-1}V = VU^{-1}$ en multipliant par U^{-1} à gauche et à droite donc $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = U^{-k}V^k$ par récurrence simple et, comme V est nilpotente, M est aussi nilpotente car $V^n = M^n = 0$ par le théorème de CAYLEY-HAMILTON puisque $\chi_V = \chi_M = X^n$. D'après **a.**, $\det(I_n + M) = 1$ donc $\det(U + V) = \det(U)$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(U,V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $UV = VU$ et V nilpotente. Traitons trois cas :

- Si U inversible : dans ce cas, d'après **b.**, $\det(U+V) = \det(U)$.
- Si $U = 0$: dans ce cas, $\det(U+V) = \det(V) = 0 = \det(U)$ car V est nilpotente donc non inversible.
- Si U n'est pas inversible et $U \neq 0$: on a $\det(U) = 0$. Comme U et V commutent par hypothèse, $\operatorname{Ker}(U)$ est stable par V. Proposons deux approches :
  - Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\operatorname{Ker}(U)$, $\operatorname{Ker}(U) \neq \{0\}$ car U n'est pas inversible, $\dim(\operatorname{Ker}(U)) = p \geqslant 1$. On complète $\mathcal{B}_1$ en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ et, si on note u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés à U et V, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix}$ car $\operatorname{Ker}(U)$ est stable par v. $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $(B,E) \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$ avec $p \geqslant 1$ et $n - p = \operatorname{rang}(U) \geqslant 1$. Comme v est nilpotent, C et E sont nilpotentes car $V^n = 0 = \begin{pmatrix} C^n & * \\ 0 & E^n \end{pmatrix}$ implique $C^n = 0$ et $E^n = 0$. Ainsi, $\det(C) = 0$ et, comme $U + V = \begin{pmatrix} C & A+D \\ 0 & B+E \end{pmatrix}$, $\det(U+V) = \det(C)\det(B+E) = 0 = \det(U)$.
  - Comme v est nilpotent, $w = v_{\operatorname{Ker}(u)}$ (l'endomorphisme induit par v dans $\operatorname{Ker}(u)$) est aussi nilpotent donc non inversible et il existe un vecteur $x \in \operatorname{Ker}(u)$ tel que $w(u) = v(u) = 0$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v)$ donc $(u+v)(x) = 0$ et, comme $x \neq 0$, $u + v$ n'est pas inversible donc $\det(u+v) = \det(U+V) = 0 = \det(U) + \det(V)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $(U,V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ vérifie $UV = VU$ et V nilpotente, alors $\det(U+V) = \det(U)$.

63 **a.** Soit u un endomorphisme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

CNS 1 : u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$, annulateur de u et scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

CNS 2 : u est diagonalisable si et seulement s'il existe χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si pour toute valeur propre λ de u, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$ vat l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme χ_u.

b. Dans la calcul de $\chi_A = \begin{vmatrix} X+2 & -4 & -1 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 3 & -3 & X-2 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de Gauss $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$ pour avoir $\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & -X-1 & 0 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 3 & -3 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 3 & -3 & X-2 \end{vmatrix}$ par linéarité du déterminant par rapport à la première ligne. Ensuite, avec $C_2 \longleftarrow C_2 + C_1$ et en développant par rapport à la première colonne, $\chi_A = (X+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 3 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)(X-2)^2$. Ainsi, $\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 2\}$.

c. -1 est valeur propre simple de A donc $E_{-1}(A)$ est une droite. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2 car ses deux dernières sont non colinéaires et ses deux premières forment une famille liée, par la formule du rang, $\dim(E_2(A)) = 3 - 2 = 1 \neq 2$ alors que 2 est la multiplicité algébrique de 2 en tant que valeur propre de A : ceci montre que A n'est pas diagonalisable.

d. La valeur de $A - 2I_3$ montre que $E_2(A) = \text{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1,1,0)$. Comme $A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, on voit que $E_{-1}(A) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,0,1)$ car la somme de la première et de la troisième colonne de $A+I_3$ est nulle. On cherche un vecteur v_3 tel que $Av_3 = 2v_3 + v_2$ (par exemple), c'est-à-dire $(A - 2I_3)v_3 = v_2$. Or il est clair que le vecteur e_3 est un antécédent de v_2 par A (la troisième colonne de $A - 2I_3$ vaut v_2). On choisit donc $v_3 = e_3 = (0,0,1)$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. Comme $\det(P) = 1 \neq 0$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et, par construction, $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (réduction de JORDAN).

64 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M, il existe donc $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. Par une récurrence simple, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k X = \lambda^k X$ donc $(M^3 - 4M)X = M^3X - 4MX = \lambda^3 X - 4\lambda X = (\lambda^3 - 4\lambda)X = 0$ alors que $X \neq 0$ donc $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda = 0$ et λ est une racine de P.

b. Comme $P = X(X^2 - 4) = X(X-2)(X+2)$, on a donc $\text{Sp}(M) \subset \{-2, 0, 2\}$ d'après la question précédente. Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et que P est annulateur de M, la matrice M est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Elle est donc semblable à une matrice D contenant dans sa diagonale les valeurs propres de M. Mais $\text{Tr}\ (M) = \text{Tr}\ (D) = 0$ donc la multiplicité de 2 est égale à celle de -2. Il y a donc trois cas :

- Les valeurs propres de M sont $0,0,0,0$ donc $D = 0$ et $M = 0$.
- Les valeurs propres de M sont $0,0,2,-2$ donc il existe une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0,0,2,-2)$.
- Les valeurs propres de M sont $2,2,-2,-2$ donc il existe une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(2,2,-2,-2)$ (et M est alors inversible).

Réciproquement, les matrices évoquées ci-dessus vérifiant bien $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ avec $M^3 - 4M = 0$ et $\text{Tr}\ (M) = 0$.

65 **a.** Dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -2 \\ -2 & X+2 & -4 \\ -3 & 3 & X-6 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de GAUSS $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2$ et, par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on obtient $\chi_A = \begin{vmatrix} X & 1 & -2 \\ X & X+2 & -4 \\ 0 & 3 & X-6 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & X+2 & -4 \\ 0 & 3 & X-6 \end{vmatrix}$. On effectue $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et on développe par rapport à la première colonne pour obtenir la factorisation $\chi_A = X \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & X+1 & -2 \\ 0 & 3 & X-6 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X+1 & -2 \\ 3 & X-6 \end{vmatrix} = X((X+1)(X-6)+6) = X^2(X-5)$.

Comme 5 est une valeur propre simple de A, $E_5(A)$ est une droite. On a clairement A de rang 1 car ses deux premières colonnes sont opposées et non nulles et que sa troisième colonne est deux fois la première. Par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = \dim(E_0(A)) = 3 - 1 = 2 = m_0(A)$ donc, par un théorème du cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Comme $XI_6 - C = \begin{pmatrix} XI_3 - A & -A \\ 0 & XI_3 - A \end{pmatrix}$, on a $\chi_C = \det(XI_3 - A)^2 = \chi_A^2$ avec les propriétés du déterminant par blocs. Comme le spectre de C est l'ensemble des racines de χ_C, on a donc $\text{Sp}(C) = \text{Sp}(A)$.

c. Dans $\chi_B = \begin{vmatrix} XI_3 - \alpha A & -\beta A \\ -\gamma A & XI_3 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de GAUSS par blocs $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2$, et ensuite $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, on arrive à $\chi_B = \begin{vmatrix} XI_3 - (\alpha+\beta)A & -\beta A \\ XI_3 - \gamma A & XI_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_3 - \gamma A & -\beta A \\ 0 & XI_3 + \beta A \end{vmatrix}$ car $\alpha + \beta = \gamma$. Par blocs, on obtient dont $\chi_B = \det(XI_3 - \gamma A) \times \det(XI_3 + \beta A) = \gamma^n (-\beta)^n \det((X/\gamma)I_3 - A) \times \det((-X/\beta)I_3 - A)$ donc $\chi_B = (-1)^n \beta^n \gamma^n \chi_A\left(\frac{X}{\gamma}\right)\chi_A\left(-\frac{X}{\beta}\right)$. Par conséquent, $\mathrm{Sp}(B) = (-\beta\,\mathrm{Sp}(A)) \cup (\gamma\,\mathrm{Sp}(A)) = \{0, -5\beta, 5\gamma\}$ car $\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \Longleftrightarrow \chi_B(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \left(\chi_A\left(\frac{X}{\gamma}\right) = 0 \text{ ou } \chi_A\left(-\frac{X}{\beta}\right) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\gamma} \in \mathrm{Sp}(A) \text{ ou } -\frac{\lambda}{\beta} \in \mathrm{Sp}(A)\right)$.

On pouvait aussi expliciter $\chi_B = X^4(X + 5\beta)(X - 5\gamma)$ mais ce qui précède est plus général.

d. Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(A)$ et $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$. En effectuant un produit par blocs, $BY = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $AX = 0$ donc $Y \in \mathrm{Ker}(B)$. De même, $\forall X \in \mathrm{Ker}(A)$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B)$. Considérons les parties $F = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; X \in \mathrm{Ker}(A) \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} \;\middle|\; X \in \mathrm{Ker}(A) \right\}$. Comme $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on montre que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{2n}$ isomorphes à $\mathrm{Ker}(A)$ par l'intermédiaire des applications linéaires $\phi : \mathrm{Ker}(A) \to F$ et $\psi : \mathrm{Ker}(A) \to G$ définies par $\phi(X) = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\psi(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$. Or F et G sont en somme directe car si $Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in F \cap G$, on a $X_1 = 0$ car $Y \in G$ et $X_1 = 0$ car $Y \in F$. Par conséquent, avec ce qui précède, $F \oplus G \subset \mathrm{Ker}(B)$ donc $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 2\dim(\mathrm{Ker}(A)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(B))$.

e. Avec $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 3$, on a bien $\gamma = \alpha + \beta$ donc on déduit de **d.** que $\dim(\mathrm{Ker}(B)) \geqslant 4$. Or la multiplicité de 0 dans χ_B est égale à 4 donc, d'après le cours, $\dim(\mathrm{Ker}(B)) \leqslant 4$ et on a donc $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 4$ et, avec l'inclusion précédente, on a $\mathrm{Ker}(B) = F \oplus G$ avec, puisque $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ avec les vecteurs $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}(\phi(w_1), \phi(w_2)) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(\psi(w_1), \psi(w_2)) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi(w_1)$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi(w_2)$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi(w_1)$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \psi(w_2)$. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est donc une base de $\mathrm{Ker}(B)$.

Les autres valeurs propres de B dans ce cas sont -10 et 15 et sont simples car $\chi_B = X^4(X + 10)(X - 15)$. On peut chercher des vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres de manière classique en raisonnant par blocs et en résolvant les systèmes $BY = -10Y$ et $BY = 15Y$ en posant $Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ par blocs. Mais on peut aussi voir la matrice B comme le produit de KRONECKER des deux matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et de la matrice A, noté $B = M \otimes A$ (c'est un cas particulier de produit tensoriel). Comme $A - 5I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, on constate que $E_5(A) = \mathrm{Vect}(w_3)$ avec $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ou on le prouve en résolvant un système linéaire. De plus, $\chi_M = X^2 - \mathrm{Tr}\,(M)X + \det(M) = X^2 - X - 6 = (X-3)(X+2)$ donc $\mathrm{Sp}(M) = \{-2, 3\}$. Comme $M + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$E_{-2}(M) = \mathrm{Vect}(a_1)$ avec $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Puisque $M - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $E_3(M) = \mathrm{Vect}(a_2)$ avec $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec le produit de Kronecker, on considère $v_5 = a_1 \otimes w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $v_6 = a_2 \otimes w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $Bv_5 = (-2) \times 5v_5 = -10v_5$ et $Bv_6 = 3 \times 5v_6 = 15v_6$ de sorte que $E_{-10}(B) = \mathrm{Vect}(v_5)$ et $E_{15}(B) = \mathrm{Vect}(v_6)$. Ainsi, $B = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(0, 0, 0, 0, -10, 15)$ et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ à la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

66 **a.** Si U et V sont semblables, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $U = QVQ^{-1}$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ U^k = QV^kQ^{-1}$ donc, pour un polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(U) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k U^k$ donc $P(U) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k QV^kQ^{-1} = Q\Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k V^k\Big)Q^{-1} = QP(V)Q^{-1}$ donc $P(U)$ et $P(V)$ sont aussi semblables.

b. On a $M^1 = M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et on calcule $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$. On conjecture et on démontre par une récurrence facile que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$.

c. Alors, pour $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $P(M) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k M^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k a_k A^k \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k \end{pmatrix}$ qui s'écrit plus simplement $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

d. Si M est diagonalisable, il existe d'après le cours un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(M) = 0$ donc $P(A) = 0$ d'après la relation de la question précédente (voir le bloc en haut à gauche par exemple). Ainsi, le polynôme scindé à racines simples P annule A ce qui prouve que A est aussi diagonalisable.

e. Si A est inversible et diagonalisable, montrons que M n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, il existerait un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(M) = 0$. Avec les calculs précédents, on aurait donc $P(A) = AP'(A) = 0$ ce qui donne $P(A) = P'(A) = 0$ car A est inversible. Comme A est inversible, il existe une valeur propre $\lambda \neq 0$ (éventuellement complexe) de A, et on aurait donc $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$ ce qui est absurde car λ est racine simple de P. Ainsi, si A est diagonalisable et inversible, M n'est pas diagonalisable.

f. Avec le même polynôme P qu'en **d.**, on a aussi $AP'(A) = 0$ donc XP' est annulateur de A. Si λ est une valeur propre de A, comme P et XP' annulent A, on sait d'après le cours que $P(\lambda) = 0 = \lambda P'(\lambda)$. Mais comme les racines de P sont simples par hypothèse, P et P' n'ont pas de racine commune d'où $\lambda = 0$ et 0 est la seule valeur propre de A. En effet, 0 est valeur propre de A car A n'est pas inversible. Comme A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, la matrice A est semblable à la matrice nulle donc $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, alors $M = 0$ donc M est diagonalisable. Par conséquent, la conclusion de cet exercice est que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

67 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Une récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X$. Ainsi, $(A^3 - A^2 + A - I_n)X = 0X = 0 = A^3X - A^2X + AX + X$ donc $(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1)X = 0$ et, comme $X \neq 0$, on a $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = P(\lambda) = 0$ et λ est bien une racine de P.

b. Comme $P = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X+i)(X-i)$, la question précédente montre que $Sp(A) \subset \{1, i, -i\}$. Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et que P est annulateur de A, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on sait qu'alors $\det(A) = \prod\limits_{\lambda \in Sp(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$. Posons $a = m_1(A)$, $b = m_i(A)$ et $c = m_{-i}(A)$. Comme $-i$ est le conjugué de i et que A est une matrice réelle, on sait d'après le cours que $b = c$. On a donc $\det(A) = 1^a i^b (-i)^c = 1$ car $i(-i) = 1$.

c. De même, comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Tr}\ (A) = \sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda = a \times 1 + b \times (i) + b \times (-i)$ car $b = c$ donc $\mathrm{Tr}\ (A) = a \in \mathbb{N}$.

68 **a.** Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme annulateur de A, alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = 0$. Soit λ une valeur propre de A, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X$, ce qui montre que $P(A)X = 0X = 0 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k X = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k X = P(\lambda)X$. Comme $P(\lambda)X = 0$ et $X \neq 0$, on a donc $P(\lambda) = 0$ donc λ est une racine de P : $Sp(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P.

b. $A^0 U = U = UB^0$ et $A^2 U = A(AU) = A(UB) = (AU)B = (UB)B = UB^2$ car on a $AU = UB$ par hypothèse. Par le même principe et par une récurrence simple, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k U = UB^k$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ qu'on écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, alors $P(A)U = \Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k\Big)U = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k U = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k UB^k = U\Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k B^k\Big) = UP(B)$.

c. Si on prend $P = \chi_A$, d'après **b.**, on a $\chi_A(A)U = U\chi_A(B)$ et, comme $\chi_A(A) = 0$ par CAYLEY-HAMILTON, on a $U\chi_A(B) = 0$. Or la matrice U est non nulle donc cela implique que $\chi_A(B)$ n'est pas inversible ; en effet, si elle l'était, on aurait $U\chi_A(B)(\chi_A(B))^{-1} = U = 0$ ce qui est absurde. Par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et on peut écrire $\chi_A = \prod\limits_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A)}$, ce qui montre que $\prod\limits_{\lambda \in Sp(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda(A)} = 0$. Ceci implique qu'il existe $\lambda \in Sp(A)$ tel que $B - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Or $\lambda I_n - B$ non inversible se traduit par $\det(\lambda I_n - B) = \chi_B(\lambda) = 0$ donc λ est à la fois une valeur propre de A et de B.

d. Soit $\lambda \in Sp(C) \cap Sp(D)$. On sait que $Sp(D^T) = Sp(D)$ car $\chi_D = \chi_{D^T}$ donc il existe deux vecteurs colonnes X et Y non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $CX = \lambda X$ et $D^T Y = \lambda Y$. Posons $M = XY^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $CM = CXY^T = (CX)Y^T = \lambda XY^T$ et $MD = XY^T D = X(Y^T D) = X(D^T Y)^T = X(\lambda Y)^T = \lambda XY^T$ donc $CM = MD$. Or, en notant $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $Y = (y_j)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ et $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$ par hypothèse. Ainsi, si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $m_{i,j} = x_i y_j$ donc $m_{i_0,j_0} = x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$ et on a bien $M \neq 0$.

69 **a.** Comme $XI_3 - A$ est triangulaire inférieure, on a $\chi_A = \det(XI_3 - A) = (X-1)(X-4)(X-9)$ donc $Sp(A) = \{1, 4, 9\}$ car les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique.

Comme χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, on sait qu'alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que ses sous-espaces propres sont des droites. Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ et on constate que $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ et on a clairement $E_4(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $A - 9I_3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et on voit que $E_9(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(1,4,9) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

b. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc, comme A et M commutent, on sait d'après le cours que les sous-espaces propres de A sont stables par M. Ainsi, comme $v_1 \in E_1(A)$, on a $Mv_1 \in E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ donc il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $Mv_1 = \lambda_1 v_1$ ce qui fait de v_1 un vecteur propre de M aussi. De même, v_2 et v_3 sont aussi des vecteurs propres de M associés respectivement aux valeurs propres λ_2 et λ_3. Ainsi, on a $M = PD'P^{-1}$ avec $D' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ donc M est diagonalisable.

c. <u>Analyse</u> : si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, on a vu à la question précédente que $P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ donc $P^{-1}M^2P = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) = P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(1,4,9)$ d'après **b.** donc $\lambda_1^2 = 1$, $\lambda_2^2 = 4$ et $\lambda_3^2 = 9$ en identifiant. Ainsi, $M = P\ \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 2 \pm 3)P^{-1}$.

<u>Synthèse</u> : si $M = P\ \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 2 \pm 3)P^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a clairement $M^2 = P\ \mathrm{diag}(1, 49)P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Comme $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que les 8 matrices $\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$ sont distinctes, il existe exactement 8 matrices M qui vérifient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ et ce sont les matrices $P\ \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 2, \pm 3)P^{-1}$. On peut les expliciter avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mais est-ce bien nécessaire ?

70 **a.** Déjà f est bien un endomorphisme de E car on sait d'après le cours qu'une application linéaire de E dans F est entièrement caractérisée par les images par f des vecteurs d'une base de E, ici la base $\mathcal{B}$.

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. On cherche les éléments propres de f avec la suite d'équivalences $f(x) = \lambda x \iff \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \iff \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) + su = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda x_i) e_i$ en posant $s = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ ce qui s'écrit aussi $f(x) = \lambda x \iff (\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i + s = \lambda x_i)$ en identifiant les coordonnées sur la base $\mathcal{B}$. Deux cas :

- Si $\lambda = 1$, on a donc $f(x) = x \iff \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ donc, en posant $H = \Big\{x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \ \Big|\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\Big\}$ qui est un hyperplan de E car $\varphi : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ est une forme linéaire non nulle sur E (car $f(u) = n \neq 0$) et que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $E_1(f) = H$ donc 1 est valeur propre de f car $n \geqslant 2$ donc $\dim(H) = n - 1 \geqslant 1$.
- Si $\lambda \neq 1$, on a donc $f(x) = \lambda x \iff (\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = \dfrac{s}{\lambda - 1}) \iff x = \dfrac{s}{\lambda - 1} u$. Les seuls autres vecteurs propres de f, à part les vecteurs non nuls de H vus ci-dessus, sont donc des vecteurs de la forme αu avec $\alpha \neq 0$. Or $f(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(e_i) = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i\Big) + nu = (n+1)u$ donc il n'y a qu'une autre valeur propre à part 1 et c'est $n+1$ avec $E_{n+1}(f) = \mathrm{Vect}(u)$ d'après ce qui précède.

b. Comme $\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) = n = \dim(E)$ et que $E_1(f)$et $E_{n+1}(f)$ sont en somme directe, on $E = E_1(f) \oplus E_{n+1}(f)$ donc f est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}() = \{1, n+1\}$ et $\chi_f = (X-1)^{n-1}(X - n - 1)$.

c. Comme χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, on sait d'après le cours que $\det(f) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} \lambda^{m_\lambda(f)} = n+1$ et qu'on a aussi $\text{Tr}\,(f) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} m_\lambda(f)\lambda = (n-1) \times 1 + 1 \times (n+1) = 2n$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 6 THÉORÈMES DE DOMINATION

71 corrigé en TD et pas encore rédigé

72 **a.** Pour $n \geqslant 1$, $a_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right) = \alpha \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ donc, avec l'hypothèse de l'énoncé, $a_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et, par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Par dualité suite-série, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge ce qui donne l'existence d'un réel k tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n^\alpha u_n) = k$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \lambda = e^k > 0$ donc que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

b. Soit $x \in]-1;0[$, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1-(1-t)^x}{t}$ est continue sur $]0;1[$.

<u>En 1^-</u> Comme $x < 0$, $\lim\limits_{t\to 1^-} (1-t)^x = +\infty$ donc $g_x(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^{-x}}$ et, comme $-x < 1$, g_x est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$ par comparaison aux intégrales de Riemann.

<u>En 0^+</u> On sait que $(1-t)^x \underset{0}{=} 1 - xt + o(t)$ donc $g_x(t) \underset{0}{=} \dfrac{xt+o(t)}{t} \underset{0}{=} x + o(1)$ donc g_x se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x$. Ainsi, g_x est intégrable sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Par conséquent, g_x est intégrable sur $]0;1[$ (même $[0;1[$) donc f est bien définie sur $]-1;0[$.

Pour $t \in [0;1[$, on a $(1-t)^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}(-t)^n$ d'après le cours sur les séries entières donc $g_x(t) = \dfrac{1}{t}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^n$ pour $t \in]0;1[$, ce qui se simplifie en (relation vraie pour $t=0$ car on a posé $g_x(0) = x$) $g_x(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$.

Posons donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $u_n : t \mapsto (-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$.

(H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers g_x sur $[0;1[$ (on vient de le voir).

(H_2) Les u_n sont continues et intégrables sur $[0;1[$ si $n \in \mathbb{N}$ car elles sont polynomiales sur le segment $[0;1]$.

(H_3) La fonction g_x est continue sur $[0;1[$.

(H_4) Posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 |u_n| = \dfrac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n!}\left[\dfrac{t^n}{n}\right]_0^1 = \dfrac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n.n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
On calcule $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n-x)n.n!}{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n+1).(n+1)!} = \dfrac{n(n-x)}{(n+1)^2} = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2}$ ce qui donne, par développements limités, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{+\infty}{=} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ et il vient donc $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{x+2}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit d'après la question précédente qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^{x+2}}$ donc, toujours par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1} I_n$ converge car $x+2 > 1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a l'intégrabilité de g_x (on le savait déjà) et surtout la relation $\displaystyle\int_0^1 g_x(t)dt = \int_0^1 \dfrac{1-(1-t)^x}{t}dt = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n$.

73 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $g_x :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = |\ln(t)|^x = e^{x\ln(|\ln(t)|)}$. La fonction g_x est continue sur $]0;1[$ par opérations. Comme $\ln(t) \underset{1^-}{\sim} t-1$, on a $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^x = \dfrac{1}{(1-t)^{-x}}$. Traitons plusieurs cas :

- Si $x < 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} |\ln(t)| = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g_x(t) = 0$ et g_x se prolonge par continuité en 0 avec $g_x(0) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc g_x est intégrable en 0.
- Comme $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^x = \dfrac{1}{(1-t)^{-x}}$, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g_x est intégrable en 1 si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$.

Ainsi, g_x est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $x > -1$. Comme la fonction g_x est positive sur $]0;1[$, g_x est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 g_x$ converge. Par conséquent, $D =]-1;+\infty[$.

b. Posons $g :]1;+\infty[\times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = |\ln(t)|^x = e^{x\ln(|\ln(t)|)}$ de sorte que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)dt$.

(H_1) Pour $t \in]0;1[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^∞ sur D et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \big(\ln(|\ln(t)|)\big)^k g(x,t)$.

(H_2) Pour $x \in D$, $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ d'après **a.**.

(H_3) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0;1[$.

(H_4) Pour $[a;b] \subset D$, $t \in]0;1[$ et $x \in [a;b]$, on a $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{x\ln(|\ln(t)|)}$. Comme on a $\ln(|\ln(t)|) \leqslant 0 \iff t > \dfrac{1}{e}$, on a $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ en définissant $\varphi_{k,a,b} :]0;1[\to \mathbb{R}_+$ par $\varphi_{k,a,b}(t) = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{b\ln(|\ln(t)|)}$ si $t \leqslant \dfrac{1}{e}$ et $\varphi_{k,a,b}(t) = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{a\ln(|\ln(t)|)}$ si $t \geqslant \dfrac{1}{e}$. La fonction $\varphi_{k,a,b}$ est continue par morceaux sur $]0;1[$ et elle y est intégrable car on a comme à la question **a.** $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées et $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k}{(1-t)^{-b}}$ d'où $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\big|\ln(1-t)\big|^k}{(1-t)^{-b}} \underset{1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{1-b}{2}}}\right)$ par croissances comparées et $\dfrac{1-b}{2} < 1$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^∞ sur D et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in D$, on a $f^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(|\ln(t)|)\big)^k e^{x\ln(|\ln(t)|)}dt$.

c. ???

d. ???

74 **a.** Pour $n \geqslant 2$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison à une intégrale de RIEMANN car $n > 1$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ converge pour $n \geqslant 2$ et la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est bien définie.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H_1) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in [0;1[$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ si $x \in]1;+\infty[$.

(H_2) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H$_3$) Pour tout $n \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0;1[$ et $\varphi(x) = f_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ si $x \in [1;+\infty[$ avec φ qui est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

D'après le théorème évoqué, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 dx = 1 = \ell$.

c. Pour $n \geqslant 2$, $I_n - \ell = I_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 (f_n(x)-1)dx + \int_1^{+\infty} f_n(x)dx = -\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ avec la relation de CHASLES. On pose $x = u^{1/n} = \varphi_n(u)$ dans les deux intégrales car $u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;1]$ mais aussi de $[1;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$, ce qui donne la relation $I_n - 1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{1/n}du}{1+u} + \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{u^{1/n}du}{u(1+u)}$ donc $n(I_n-1) = \displaystyle\int_0^1 g_n(u)du + \int_1^{+\infty} h_n(u)du$ en posant $g_n(u) = \dfrac{u^{1/n}}{1+u}$ et $h_n(u) = \dfrac{u^{1/n}}{u(1+u)}$.

(H$_1$) $(g_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers $g :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(u) = \dfrac{1}{1+u}$ et $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers $h : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \dfrac{1}{u(1+u)}$.

(H$_2$) Les fonctions g_n et g sont continues sur $]0;1]$ et les h_n et h sont continues sur $[1;+\infty[$.

(H$_3$) Pour tout $n \geqslant 2$, $\forall u \in]0;1]$, $|g_n(u)| \leqslant \alpha(u) = 1$ et $\forall u \in [1;+\infty[$, $|h_n(u)| \leqslant \beta(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}(1+u)}$ avec α continue et intégrable sur $]0;1]$ et β continue et intégrable sur $[1;+\infty[$ car $\beta(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{3/2}}$.

D'après le théorème de convergence dominée appliqué deux fois, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 g_n(u)du = \int_0^1 g(u)du = \ln(2)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} h_n(u)du = \int_1^{+\infty} h(u)du = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)du = \left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln(2)$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(I_n-1) = -\ln(2)+\ln(2) = 0$ d'où $I_n - 1 \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ne donne pas d'équivalent de $I_n - 1$: damned ! Changeons de stratégie. Dans $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, on pose $x = \dfrac{1}{u} = \psi(u)$ avec ψ une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $]0;1]$ dans $[1;+\infty[$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \int_1^0 \frac{1}{1+(1/u)^n}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{1+u^n}du$. Ainsi, pour $n \geqslant 2$, $I_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{1+x^n}dx$ et on pose $x = u^{1/n} = \varphi_n(u)$ car φ_n est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;1]$ pour avoir $I_n - 1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{\frac{n-2}{n}} - u}{1+u} \times u^{(1/n)-1}du$ et on obtient $I_n - 1 = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{-(1/n)}}{1+u}\left(u^{2/n}-1\right)du$. Comme $\forall u \in]0;1]$, $u^{2/n} - 1 = \exp\left(\dfrac{2\ln(u)}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(u)}{n}$ car $e^t \underset{0}{=} 1 + t + o(t)$, on écrit plutôt $I_n - 1 = -\dfrac{2}{n^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{-(1/n)}}{1+u} \times \frac{u^{2/n}-1}{\frac{2\ln(u)}{n}} \times \ln(u)du$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, posons $h_n : u \mapsto \dfrac{u^{-(1/n)}}{1+u} \times \dfrac{u^{2/n}-1}{\frac{2\ln(u)}{n}} \times \ln(u)$:

(H$_1$) $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers la fonction $h :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \dfrac{\ln(u)}{1+u}$.

(H$_2$) Les fonctions h_n et h sont continues sur $]0;1]$.

(H$_3$) Pour tout $n \geqslant 2$, $\forall u \in]0;1]$, $|h_n(u)| \leqslant \theta(u)$ avec $\theta(u) = \dfrac{u^{-1/2}\ln(u)}{1+u}$ si $u \in]0;1]$ car $n \geqslant 2$ et qu'il est classique que $\forall t \in \mathbb{R}_-^*$, $e^t - 1 \geqslant t$ donc $\forall u \in]0;1[$, $\dfrac{u^{2/n}-1}{\frac{2\ln(u)}{n}} \leqslant 1$ en prenant $t = \dfrac{2\ln(u)}{n} < 0$. De plus, θ est continue et intégrable sur $]0;1]$ par comparaison à une intégrale de RIEMANN $\left(\frac{3}{4}<1\right)$ car on a $\theta(u)\underset{0}{\sim}\frac{\ln(u)}{\sqrt{u}}\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{u^{3/4}}\right)$ par croissances comparées.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2}(1-I_n)=\int_0^1 h(u)du=J$.

Or $\forall u\in]0;1[,\ h(u)=\ln(u)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n\ln(u)$. Si $a_n:u\to(-1)^n u^n\ln(u)$ pour $n\in\mathbb{N}$:

- (H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n$ converge simplement vers h sur $]0;1]$ car $h(1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(1)=0$.
- (H_2) Les fonctions a_n sont continues et intégrables sur $]0;1]$ pour $n\in\mathbb{N}$ car elles se prolongent par continuité en 0 avec $a_n(0)=0$ dès que $n\geqslant 1$ et $a_0(u)=\ln(u)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$ par croissances comparées.
- (H_3) La fonction h est continue sur $]0;1]$.
- (H_4) Pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n:u\mapsto\frac{u^{n+1}}{n+1}$ et $v:u\mapsto-\ln(u)$ sont de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{u\mapsto 0}u_n(u)v(u)=0$ par croissances comparées donc $J_n=\int_0^1|a_n|=\int_0^1 u_n'(u)v(u)du=[u_n(u)v(u)]_0^1-\int_0^1 u_n(u)v'(u)du$ donc $J_n=\int_0^1\frac{u^n}{n+1}du=\frac{1}{(n+1)^2}$. La série de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2}$ converge car $2>1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $J=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 a_n(u)du=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$. En séparant termes d'indices pairs et impairs, $J=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+2)^2}=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+2)^2}$ et il vient $J=-\zeta(2)+\frac{\zeta(2)}{2}=-\frac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2}(I_n-1)=-J=\frac{\pi^2}{12}$ donc $I_n-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{\pi^2}{6n^2}$.

d. Par comparaison à une série de RIEMANN convergente car $2>1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}(I_n-1)$ converge.

75 **a.** Posons $u_n=H_n-\ln(n)$ si $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\geqslant 2$, $u_n-u_{n-1}=(H_n-H_{n-1})-(\ln(n)-\ln(n-1))$ donc $u_n-u_{n-1}=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 2}(u_n-u_{n-1})$ converge absolument donc converge et, par dualité suite-série, $(u_n)_{n\geqslant 1}=\big(H_n-\ln(n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers un réel $\gamma\sim 0,577$ appelé constante d'EULER.

b. $f:t\mapsto\ln(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(t)\underset{0}{\sim}\ln(t)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $f(t)\underset{+\infty}{=}e^{-t/2}$ par croissances comparées donc, par comparaison à des intégrales de référence, f est intégrable en 0^+ et $+\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$ est donc absolument convergente donc convergente, ainsi I existe.

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n:t\mapsto\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)$ est continue sur $]0;n]$ et $f_n(t)\underset{0}{\sim}\ln(t)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc, comme avant, f_n est intégrable sur $]0;n]$ donc I_n existe.

Dans l'intégrale I_n, on effectue le changement de variable $t=nu=\varphi_n(u)$ avec φ_n qui est bijective et de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;n]$, et on obtient $I_n=\int_0^1\left(1-\frac{nu}{n}\right)^{n-1}\ln(nu)(ndu)$ donc, par linéarité de l'intégrale, comme tout converge, $I_n=n\ln(n)\int_0^1(1-u)^{n-1}du+n\int_0^1(1-u)^{n-1}\ln(u)du$. Or il vient $\int_0^1(1-u)^{n-1}du=\left[-\frac{(1-u)^n}{n}\right]_0^1=\frac{1}{n}$ et, en posant $a:u\mapsto\frac{1-(1-u)^n}{n}$ et $b:u\mapsto\ln(u)$ qui sont de classe C^1 sur $]0;1]$, comme $\lim\limits_{u\to 0^+}a(u)b(u)=0$ par croissances comparées car $1-(1-u)^n\underset{0}{\sim}nu$, on obtient $I_n = \ln(n) + \left[\dfrac{(1-(1-u)^n)\ln(u)}{n}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-(1-u)^n}{u}du = \ln(n) + \int_0^1 \dfrac{1-(1-u)^n}{1-(1-u)}du$. On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $1-u \neq 1$ et on a donc la relation $I_n = \ln(n) - \displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n-1}(1-u)^k\Big)du = \ln(n) - \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k+1} = \ln(n) - H_n = -u_n$.

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = f_n(t)$ si $t \leqslant n$ et $g_n(t) = 0$ si $t > n$. Alors g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n = \int_0^n f_n = I_n$ d'après la question précédente.

- (H_1) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, dès que $n \geqslant t$, on a $g_n(t) = f_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t) = \ln(t)\exp\left((n-1)\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = f(t) = \ln(t)e^{-t}$ par continuité de l'exponentielle car $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{t}{n}$. Ainsi, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_2) Les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et y sont intégrables d'après ce qui précède et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_3) Par concavité de $\ln$, $\forall n \geqslant 2$, $|g_n(t)| = |f_n(t)| \leqslant |\ln(t)|e^{(n-1)(-t/n)} = |\ln(t)|e^{-t}e^{t/n}$ donc $|g_n(t)| \leqslant |\ln(t)|e^{-t}e^{t/2} = |\ln(t)|e^{-t/2} = \varphi(t)$ si $t \leqslant n$ et $|g_n(t)| = 0 \leqslant \varphi(t)$ sinon. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(t)| \leqslant \varphi(t) + |f_1(t)| = \psi(t)$ et la fonction ψ est continue et intégrable (comme somme de fonctions intégrables) sur $\mathbb{R}_+^*$ avec les mêmes arguments qu'avant.

Par le théorème de convergence dominée, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ donc, avec la question **a.**, on a donc $I = -\gamma$.

76 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0;1[$. $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ car $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ donc f est intégrable sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ par comparaison aux intégrales de Riemann. De plus, f est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$ car $f(x) \underset{1^-}{\sim} (x-1)\ln(1-x)$ car $\ln(x) \underset{1}{\sim} x-1$ donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$ par croissances comparées. Comme on sait que $\forall x \in]0;1[$, $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$, il vient, avec $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par avec $f_n(x) = -\dfrac{x^{n-1}\ln(x)}{n}$, la relation $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Le fonctions f_n sont continues sur $]0;1]$ et, comme $f_1(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f_n(x) = 0$ par croissances comparées donc que f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$ en posant $f_n(0) = 0$ si $n \geqslant 2$, les fonctions f_n sont intégrables sur $]0;1]$.

D'abord, en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(x)$, les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $n \geqslant 1$ donc, par intégration par parties, on obtient la relation $\displaystyle\int_0^1 f_n = \left[-\dfrac{x^n \ln x}{n^2}\right]_0^1 + \dfrac{1}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}dx = \dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{x^n}{n}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n^3}$ si $n \geqslant 1$.

<u>Méthode 1</u> : par linéarité de l'intégrale, comme la fonction $f_1 : x \mapsto -\ln(x)$ est intégrable sur $]0;1]$, et donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = f - f_1$ aussi d'après ce qui précède, on a $I = \displaystyle\int_0^1 f_1 + \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Pour $n \geqslant 2$, f_n est continue sur $[0;1]$ en posant $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$. De plus, f_n est dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0;1]$, $f_n'(x) = -\dfrac{1}{n}\Big((n-1)x^{n-2}\ln(x) + x^{n-2}\Big)$ donc, avec le tableau de variations de f_n, on trouve $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\left(e^{-\frac{1}{(n-1)}}\right) = \dfrac{1}{en(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n^2}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant2} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ par

RIEMANN. Par convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ sur le segment $[0;1]$, d'après le cours, $\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) - 1$. Comme $\int_0^1 f_1 = 1$, on obtient la valeur $I = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$.

Méthode 2 : utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

(H_1) La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ (on en vient).

(H_2) Les f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ (déjà vu).

(H_3) La fonction f est continue sur $]0;1[$.

(H_4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^3}$ converge.

Par le fameux théorème, on conclut que f est intégrable sur $]0;1[$ (on le savait déjà) et surtout la relation $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1,202$.

77 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \mathrm{Arctan}(xt)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ car Arctan est bornée sur $\mathbb{R}$. Comme $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, par comparaison, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $f(x)$ existe. Ainsi, le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}$. De plus, comme Arctan est impaire, f est aussi impaire.

b. Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \mathrm{Arctan}(xt)e^{-t}$:

(H_1) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (voir **a.**).

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{te^{-t}}{1+(xt)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_4) Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{te^{-t}}{1+(xt)^2} \leqslant \varphi(t) = te^{-t}$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par critère de RIEMANN car $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+(xt)^2}dt$.

c. Comme f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ car $t \mapsto \frac{te^{-t}}{1+(xt)^2}$ est positive, continue et non nulle, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 0$, on a $\forall x > 0$, $f(x) > 0$ donc $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f. Comme $u_0 > 0$, cette stabilité montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < f'(x) < \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ car la fonction $t \mapsto te^{-t} - \frac{te^{-t}}{1+(xt)^2}$ est continue positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+$. Or $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = [-(t+1)e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ donc $\forall x > 0$, $0 < f'(x) < 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, par le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il existe $c_n \in]0;u_n[$ tel que $f(u_n) - f(0) = f'(c_n)(u_n - 0)$ d'où $u_{n+1} = f'(c_n)u_n < u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}_+$.

Enfin, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en ℓ, on a $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = 0$. En effet, si on avait $\ell > 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un réel $c \in]0;\ell[$ tel que $f(\ell) - f(0) = f'(c)(\ell - 0)$ et on aurait $\ell < \ell$, BOF !

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

d. ???

78 **a.** Pour $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle vérifie $f_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ donc f_x est intégrable en 0 par comparaison aux intégrales de RIEMANN et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_x est aussi intégrable en $+\infty$ toujours par critère de RIEMANN. Ainsi, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\Gamma(x)$ existe : Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f_x est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) \geqslant 0$.

De plus, si on avait $\Gamma(x) = 0$, comme f_x est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait $f_x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui est absurde car f_x reste strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, Γ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$:

(H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_2) Pour $x > 0$, la fonction $f_x ; t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir).

(H_3) Pour $x > 0$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)t^{x-1}e^{-t}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_4) Pour $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [a;b]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ avec $\varphi_{a,b}(t) = (\ln(t))^2 t^{a-1}e^{-t}$ si $t \in]0;1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = (\ln(t))^2 t^{b-1}e^{-t}$ si $t \in [1;+\infty[$ et $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} (\ln(t))^2 t^{a-1} \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\Big)$ avec $1 - \dfrac{a}{2} < 1$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{=} o(t^b e^{-t}) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a les expressions des dérivées $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Γ est de classe C^2 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la question **a.**, $\forall x > 0$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}dt \geqslant 0$ donc, d'après le cours, Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, comme Γ et $\ln$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que Γ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, $g = \ln \circ \Gamma$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ donc $g''(x) = \dfrac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma^2(x)}$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour les intégrales, comme $|\Gamma'(x)| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} |\ln(t)|t^{x-1}e^{-t}dt = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{|\ln(t)|t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}} \times \sqrt{t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}}dt$, on a par inégalité triangulaire $|\Gamma'(x)|^2 \leqslant \Big(\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sqrt{|\ln(t)|t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}}\Big)^2 dt\Big) \times \Big(\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sqrt{t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}}\Big)^2 dt\Big)$ ce qui donne $|\Gamma'(x)|^2 = \Gamma'(x)^2 \leqslant \Gamma''(x) \times \Gamma(x)$ puis $g'(x) \geqslant 0$. Ainsi, $g = \ln \circ \Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $g_n(t) = t^{x-1}\Big(1 - \dfrac{t}{n}\Big)^n$ si $t \in [0;n]$ et $g_n(t) = 0$ si $t > n$. La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_n(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc g_n est intégrable en 0 donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN car g_n est nulle au voisinage de $+\infty$. De plus, on a $J_n = \displaystyle\int_0^n t^{x-1}\Big(1 - \dfrac{t}{n}\Big)^n dt = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\Big(1 - \dfrac{t}{n}\Big)^n dt$.

(H_1) La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ car $g_n(t) = t^{x-1}\Big(1 - \dfrac{t}{n}\Big)^n = t^{x-1}\exp\Big(n\ln\Big(1 - \dfrac{t}{n}\Big)\Big)$ dès que $n \geqslant t$, que $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) = -t$ puisque $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$.

(H_2) Les fonctions g_n et la fonction f_x sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, si $t \leqslant n$, $|g_n(t)| = t^{x-1}\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leqslant f_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$ car $\exp$ est croissante et que, par concavité de $\ln$, on a $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$. De plus, f_x est bien continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.

D'après le théorème de convergence dominée, on a $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

d. Dans l'intégrale convergente $\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$, on pose $t = nu = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $]0;1]$ dans $]0;n]$ et on a $J_n = \int_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n n du$ par changement de variable donc $J_n = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^x\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

e. Posons $K_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ (elle existe même si $n = 0$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, dans l'intégrale $K_n(x)$, on pose $a : u \mapsto \frac{u^x}{x}$ et $b : u \mapsto (1-u)^n$ de sorte que a et b sont de classe C^1 sur $]0;1]$ et que $a(1)b(1) = \lim\limits_{u\to0^+} a(u)b(u) = 0$ car $x > 0$. Par intégration par parties, on a donc $K_n(x) = -\int_0^1 \frac{u^x}{x}(-n(1-u)^{n-1})du = \frac{n}{x}K_{n-1}(x+1)$. Par une récurrence facile, comme $K_0(x) = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$, on a $K_n(x) = \frac{n}{x}\times\frac{n-1}{x+1}\times\cdots\times\frac{1}{x+n-1}\times K_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$. Ainsi, comme $J_n = n^x K_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$ avec **d.** et que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ avec **c.**, on obtient la relation $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ pour tout $x > 0$.

79 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \mapsto \frac{te^{-xt}}{e^t-1}$, la fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t}$. De plus, comme $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$, on a $\lim\limits_{t\to0^+} f_x(t) = 1$ quelle que soit la valeur de x ce qui fait que f_x est toujours intégrable en 0^+.

- Si $x \leqslant -1$, on a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f_x(t) = +\infty$ et f_x n'est donc pas intégrable en $+\infty$.
- Si $x > -1$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f_x est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > -1$, et comme f_x est positive, $\int_0^{+\infty} f_x$ converge si et seulement si $x > -1$. Par conséquent, le domaine de définition D de f est $D =]-1;+\infty[$.

b. Méthode 1 : la fonction $g : t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La convexité de la fonction exponentielle montre que $\forall t > 0$, $e^t > t+1$ donc $e^t - 1 > t$ et on a $\forall t > 0$, $g(t) \leqslant 1$. Par conséquent, par croissance de l'intégrale, comme $e^{-xt} > 0$, $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Ainsi, puisque $\forall x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{te^{-xt}}{e^t-1}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$:

(H_1) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,t) = 0 = h(t)$.

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et h l'est aussi.

(H_3) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $|g(x,t)| \leqslant \frac{t}{e^t-1} = f_0(t)$ et on a vu que f_0 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} h(t)dt = 0$.

c. Pour $x > 0$, $x - 1 \in D$ donc $f(x-1)$ et $f(x)$ existent et, par linéarité de l'intégrale, on a la relation $f(x-1) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t(e^{-(x-1)t} - e^{-xt})}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} te^{-xt} dt$. On pose $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $f(x-1) - f(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ donc $f(x-1) - f(x) = \frac{1}{x}\Big[-\frac{-e^{-xt}}{x}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$.

d. Soit $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \big(f(x+k-1) - f(x+k)\big) = f(x) - f(x+n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$ par télescopage donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim_{n \to +\infty} f(x+n) = 0$ d'après **b.** et que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{1}{(x+k)^2}$ converge par comparaison aux séries de Riemann, on a $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.

e. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_x(t) = \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} = \frac{te^{-(x+1)t}}{1 - e^{-t}} = te^{-(x+1)t} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n$ car $|e^{-t}| < 1$ (série géométrique). Ainsi, $f_x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$ avec $g_n(t) = te^{-(x+1+n)t}$.

- (H_1) La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f_x (on vient de le voir).
- (H_2) Les fonctions g_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car elles se prolongent par continuité en 0 en posant $g_n(0) = 0$ et qu'on a $g_n(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées.
- (H_3) La fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} |g_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ en posant $u : t \mapsto -\frac{e^{-(x+1+n)t}}{x+1+n}$ et $v : t \mapsto t$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim_{t \to 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées car $x+1+n > 0$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1+n)t}}{x+1+n}dt = \frac{1}{(x+1+n)^2}$ et la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |g_n(t)|dt$ converge par comparaison car $\frac{1}{(x+1+n)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et on a $\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1+n)^2} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$ en posant $k = n+1$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 7
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

80 **a.** La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral et il existe donc une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Comme A et D sont semblables, on a $\text{Tr }(A) = \text{Tr }(D) = D_1 + D_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = \det(D) = D_1D_2 - a^2 = \lambda_1\lambda_2$.

Méthode 1 : comme (E_1, E_2) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, on sait que $D_1 = (E_1|AE_1)$ et $D_2 = (E_2|AE_2)$. Soit (V_1, V_2) la base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ telle que V_1 est la première colonne de $P \in O(2)$ et V_2 sa seconde. Les vecteurs colonnes V_1 et V_2 sont donc des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2. On peut décomposer $E_1 = x_1V_1 + x_2V_2$ dans la base (V_1, V_2), ce qui revient à poser $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P^{-1}E_1 = P^TE_1$, ce qui équivaut à $E_1 = PX$ (formule de changement de coordonnées). Ainsi, $D_1 = (E_1|AE_1) = (x_1V_1 + x_2V_2|A(x_1V_1 + x_2V_2)) = (x_1V_1 + x_2V_2|\lambda_1x_1V_1 + \lambda_2x_2V_2) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$, ce qui donne $D_1 \leqslant \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) = \lambda_1$ car $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$ et $x_2^2 \geqslant 0$ et que $x_1^2 + x_2^2 = 1$ car $||E_1||^2 = 1$. On pouvait aussi écrire $D_1 = (E_1|AE_1) = E_1^TAE_1 = E_1^TPDP^TE_1 = X^TDX$ et effectuer directement le calcul matriciel.

On a donc $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, $\lambda_1 \geqslant D_1$ et $\lambda_2 = D_2 - (\lambda_1 - D_1) \leqslant D_2$.

Méthode 2 : en posant $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $PD = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 & \beta\lambda_2 \\ \gamma\lambda_1 & \delta\lambda_2 \end{pmatrix}$ donc $PDP^T = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 & * \\ * & \lambda_1\gamma^2 + \lambda_2\delta^2 \end{pmatrix} = A$ et, en identifiant, $D_1 = \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 \leqslant \lambda_1\alpha^2 + \lambda_1\beta^2 = \lambda_1(\alpha^2 + \beta^2) = \lambda_1$ car $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ car $PP^T = I_2$. De même, $D_2 = \lambda_1\gamma^2 + \lambda_2\delta^2 \geqslant \lambda_2\gamma^2 + \lambda_2\delta^2 = \lambda_2$ car $\gamma^2 + \delta^2 = 1$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique telle que λ_1 et λ_2 soient ses deux valeurs propres réelles (pas forcément distinctes - grâce au théorème spectral) et $D_1 \geqslant D_2$ des réels tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, $\lambda_1 \geqslant D_1$, on va montrer qu'il existe un réel a tel que A soit orthosemblable à la matrice $\begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix}$.

Posons $m = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \dfrac{D_1 + D_2}{2}$ le milieu commun des segments $[\lambda_2; \lambda_1]$ et $[D_2; D_1]$ car $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, le réel $\alpha = D_1 - m \geqslant 0$ car $D_1 \geqslant D_2$ et $\beta = \lambda_1 - m \geqslant \alpha$ car $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ et $\lambda_1 \geqslant D_1$ (tracer $\lambda_2 \leqslant D_2 \leqslant D_1 \leqslant \lambda_1$). Alors, $D_1D_2 - \lambda_1\lambda_2 = (m + \alpha)(m - \alpha) - (m + \beta)(m - \beta) = m^2 - \alpha^2 - (m^2 - \beta^2) = \beta^2 - \alpha^2 \geqslant 0$. On peut donc poser $a = \sqrt{D_1D_2 - \lambda_1\lambda_2}$ de sorte que $D_1D_2 - a^2 = \lambda_1\lambda_2$. Comme on a $D_1D_2 - a^2 = \lambda_1\lambda_2$ et $D_1 + D_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, on est en bonne voie pour montrer que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix}$ sont semblables car $\text{Tr }(M) = \text{Tr }(D)$ et $\det(M) = \det(D)$.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ car λ_1, λ_2 sont les deux valeurs propres de A. Or $\chi_M = X^2 - \text{Tr }(M)X + \det(M) = X^2 - (D_1 + D_2)X + D_1D_2 - a^2$ donc $\chi_M = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Traitons deux cas :

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors A et M sont orthosemblables à $D = \lambda_1I_2$ donc $A = M = \lambda_1I_2$ et on a $\lambda_2 = D_2 = D_1 = \lambda_1$

dans ce cas avec $a=0$ donc $M=I_2AI_2^T$ avec $I_2\in O_2(\mathbb{R})$.

Si $\lambda_1>\lambda_2$, A et M étant symétriques réelles avec $\chi_A=\chi_M=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$, il existe deux matrices P,Q orthogonales telles que $A=PDP^T$ et $M=QDQ^T$ donc $M=(QP^T)D(QP^T)^T$ avec $QP^T\in O_2(\mathbb{R})$ par stabilité e $O_2(\mathbb{R})$ par produit donc A et M sont orthosemblables.

Ainsi, M et D sont orthosemblables dans les deux cas. Il suffisait de montrer que A et D (resp. M et D) sont orthosemblables, et comme la relation binaire d'orthosimilitude est une relation d'équivalence car $O_2(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, M et A sont elles aussi orthosemblables.

Pour aller plus loin : si on veut expliciter une matrice $P\in O_2(\mathbb{R})$ telle que $M=PDP^T$, on peut chercher P sous la forme d'une matrice R_θ (le faire aussi avec des S_θ). Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on pose $M_\theta=R_\theta DR_\theta^T=R_\theta DR_{-\theta}$ donc $M_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\cos^2\theta+\lambda_2\sin^2\theta & (\lambda_1-\lambda_2)\sin\theta\cos\theta\\ (\lambda_1-\lambda_2)\sin\theta\cos\theta & \lambda_1\sin^2\theta+\lambda_2\cos^2\theta\end{pmatrix}$.

Traitons deux cas :

Si $\lambda_1=\lambda_2$, alors A est semblable à $D=\lambda_1I_2$ donc $A=\lambda_1I_2$. De plus, comme $\lambda_2\leqslant D_2\leqslant D_1\leqslant\lambda_1$, on a $D_1=D_2=\lambda_1$ donc $a=0$ et $M=D$ et on peut prendre $P=I_2=R_0$.

Si $\lambda_1>\lambda_2$, avec le calcul précédent, on veut prendre $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $(\lambda_1-\lambda_2)\sin\theta\cos\theta=a$, ce qui s'écrit aussi $\sin(2\theta)=\dfrac{2a}{\lambda_1-\lambda_2}$. Il faut donc vérifier que $2a\leqslant\lambda_1-\lambda_2$. Ces quantités étant positives, $2a\leqslant\lambda_1-\lambda_2\iff 4a^2\leqslant(\lambda_1-\lambda_2)^2\iff 4(D_1D_2-\lambda_1\lambda_2)\leqslant\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2$ donc on a encore $2a\leqslant\lambda_1-\lambda_2\iff 4D_1D_2\leqslant(\lambda_1+\lambda_2)^2=(D_1+D_2)^2$. Or, il est classique que $4D_1D_2\leqslant(\lambda_1+\lambda_2)^2=(D_1+D_2)^2\iff(D_1-D_2)^2\geqslant 0$ est vrai. Ainsi, $\dfrac{2a}{\lambda_1-\lambda_2}\in[0;1]$, posons donc $\theta=\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{2a}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ d'où $\sin(2\theta)=\dfrac{2a}{\lambda_1-\lambda_2}$. Comme $2\theta\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(2\theta)\geqslant 0$ donc $\cos(2\theta)=\sqrt{1-\sin^2(2\theta)}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2a}{\lambda_1-\lambda_2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2-4a^2}}{\lambda_1-\lambda_2}$ et on trouve $\lambda_1\cos^2\theta+\lambda_2\sin^2\theta=\lambda_1\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}+\lambda_2\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}+\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\cos(2\theta)$, ce qui donne $\lambda_1\cos^2\theta+\lambda_2\sin^2\theta=\dfrac{D_1+D_2}{2}+\dfrac{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2-4a^2}}{2}=\dfrac{D_1+D_2}{2}+\dfrac{\sqrt{(D_1-D_2)^2}}{2}=D_1$ (voir ci-dessus). On obtient, par un calcul analogue, $\lambda_1\sin^2\theta+\lambda_2\cos^2\theta=D_2$. Par conséquent, on a $M_\theta=M=\begin{pmatrix}D_1 & a\\ a & D_2\end{pmatrix}=R_\theta DR_\theta^T$.

81 **a.** La norme $|.|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, elle est donc définie, pour X tel que $X^T=(x_1\ \cdots\ x_n)$, par $|X|_2=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

Soit $E=\left\{\dfrac{|MX|_2}{|X|_2}\ \Big|\ X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\right\}$ et $F=\left\{|MX|_2\ \big|\ |X|_2=1\right\}$, ce sont deux parties non vides de $\mathbb{R}_+$ car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\neq\emptyset$. De plus, comme M représente un endomorphisme en dimension finie, d'après le cours, M est lipschitzienne donc continue, ce qui montre que E est majorée. Ainsi, $||M||_2=\mathrm{Sup}(E)$ est bien défini. De plus, comme la sphère unité $S_2(0,1)=\{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\mid |X|_2=1\}$ est incluse dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, on a $F\subset E$ donc F est aussi majorée et on a $\mathrm{Sup}(F)\leqslant\mathrm{Sup}(E)$. Enfin, si $r\in E$, il existe $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ tel que $r=\dfrac{|MX|_2}{|X|_2}$, alors en posant $Y=\dfrac{X}{|X|_2}$, on a $Y\in S_2(0,1)$ et $|MY|_2=\dfrac{|MX|_2}{|X|_2}=r$, ce qui justifie que $E\subset F$. On a donc $E = F$ donc $||M||_2 = \mathrm{Sup}(E) = \mathrm{Sup}(F) = \underset{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{|MX|_2}{|X|_2} = \underset{|X|_2=1}{\mathrm{Sup}} |MX|_2$.

b. <u>Séparation</u> : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $||M||_2 = 0 = \mathrm{Sup}(E)$. On a $E \subset \mathbb{R}_+$, $E \neq \emptyset$ et $\mathrm{Sup}(E) = 0$, ce qui implique que $E = \{0\}$. On a donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{|MX|_2}{|X|_2} = 0$ donc $|MX|_2 = 0$ d'où $MX = 0$ car $|.|_2$ est elle-même une norme. Comme $MX = 0$ si $X = 0$, il vient $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0$, ce qui montre que $M = 0$.

<u>Homogénéité</u> : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Traitons deux cas :

- Si $\lambda = 0$, il est clair que $||\lambda M||_2 = 0 = |\lambda|.||M||_2$.
- Si $\lambda \neq 0$, en notant $F = \{|MX|_2 \mid |X|_2 = 1\}$ et $F' = \{|\lambda MX|_2 \mid |X|_2 = 1\} = \{|\lambda|.|MX|_2 \mid |X|_2 = 1\}$, on a $F' = |\lambda| F$ donc, d'après le cours, $||\lambda M||_2 = \mathrm{Sup}(F') = |\lambda|\,\mathrm{Sup}(F) = |\lambda|.||M||_2$.

Dans les deux cas, on a la relation attendue, $||\lambda M||_2 = |\lambda|.||M||_2$.

<u>Inégalité triangulaire</u> : .

On peut donc bien conclure que $M \mapsto ||M||_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on distingue deux cas :

- Si $M_2X = 0$, on a $\dfrac{|M_1M_2X|_2}{|X|_2} = 0 \leqslant ||M_1||_2||M_2||_2$.
- Si $M_2X \neq 0$, on a $\dfrac{|M_1M_2X|_2}{|X|_2} = \dfrac{|M_1(M_2X)|_2}{|M_2X|_2} \times \dfrac{|M_2X|_2}{|X|_2} \leqslant ||M_1||_2||M_2||_2$.

Ainsi, $E' = \left\{\dfrac{|M_1M_2X|_2}{|X|_2} \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ est majoré par $||M_1||_2||M_2||_2$ donc, comme $||M_1M_2||_2$ est le plus petit des majorants de E' par définition, on a $||M_1M_2||_2 \leqslant ||M_1||_2||M_2||_2$.

c. L'application $f : X \mapsto |MX|_2$ est continue par composition car $X \mapsto MX$ est linéaire en dimension finie donc continue et $Y \mapsto |Y|_2$ est 1-lipschitzienne donc continue. Comme $S_2(0,1)$ est un fermé borné en dimension finie, f est bornée sur $S_2(0,1)$ et y atteint ses bornes et il existe donc un vecteur $X_0 \in S_2(0,1)$ tel que $\underset{S_2(0,1)}{\mathrm{Max}}(f) = f(X_0) = |MX_0|_2 = \underset{|X|_2=1}{\mathrm{Sup}}(|MX|_2) = ||M||_2$. Pour tout vecteur $X = \lambda X_0$ avec $\lambda \neq 0$, on a donc $||M||_2 = |MX_0|_2 = \dfrac{|MX_0|_2}{|X_0|_2} = \dfrac{\lambda|MX_0|_2}{\lambda|X_0|_2} = \dfrac{|MX|_2}{|X|_2}$. Il existe donc même une infinité de vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $|MX|_2 = ||M||_2|X|_2$.

d. La matrice A^TA est symétrique car $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$. De plus, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on a $X^T(A^TA)X = (AX)^T(AX) = |AX|_2^2 > 0$ car $AX \neq 0$ puisque A est inversible donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et $X \neq 0$ par hypothèse. Ainsi, A^TA est bien symétrique définie positive.

e. Puisque $A^TA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, ses valeurs propres λ sont toutes strictement positives et on a $\sigma_1 \leqslant \lambda \leqslant \sigma_n$ d'après l'énoncé. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ telles que $A^TA = PDP^T$. Ainsi, pour $X \in S_2(0,1)$ tel que $X^T = (x_1 \cdots x_n)$, on a $|AX|_2^2 = (AX)^T(AX) = X^T(A^TA)X = X^TPDP^TX = Y^TDY$ en posant $Y = P^TX$ et on a aussi $|Y|_2^2 = Y^TY = X^TPP^TX = X^TX = |X|_2^2 = 1$ donc $|Y|_2 = 1$ et $Y \in S_2(0,1)$. Par conséquent, $|AX|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k y_k^2$ (par calcul matriciel) d'où $\sigma_1 = \sigma_1 \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant |AX|_2^2 \leqslant \sigma_n \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = \sigma_n$ et on a $|AX|_2 \leqslant \sqrt{\sigma_n}$. On en déduit que $\sqrt{\sigma_n}$ est un majorant de $F = \{|AX|_2 \mid |X|_2 = 1\}$ mais c'est aussi un élément de F car en prenant un vecteur propre unitaire X de A^TA associé à la valeur propre σ_n, on a

$|AX|_2^2 = X^T A^T AX = X^T(\sigma_n X) = \sigma_n |X|_2^2 = \sigma_n$ donc $|AX|_2 = \sqrt{\sigma_n}$. Ainsi, $||A||_2 = \mathrm{Sup}(F) = \mathrm{Max}(F) = \sqrt{\sigma_n}$.
Les matrices $A^T A$ et AA^T sont toutes les deux symétriques définies positives (mêmes arguments pour AA^T) et elles sont les mêmes valeurs propres. En effet, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^T A)$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^T AX = \lambda X$ d'où $(AA^T)(AX) = \lambda(AX)$ et le vecteur AX est non nul car A est inversible et X non nul ce qui fait de AX un vecteur propre de AA^T associé à la valeur propre λ. On vient d'établir que $\mathrm{Sp}(A^T A) \subset \mathrm{Sp}(AA^T)$ et, par symétrie en remplaçant A par A^T, on a $\mathrm{Sp}(AA^T) \subset \mathrm{Sp}(A^T A)$. Au final, $\mathrm{Sp}(AA^T) = \mathrm{Sp}(A^T A)$.
Puisque $(A^{-1})^T A^{-1} = (AA^T)^{-1}$ et que les valeurs propres de $(AA^T)^{-1}$ sont les inverses de celles de AA^T, donc les inverses de celles de $A^T A$ d'après ce qui précède, et que la plus grande de ces valeurs propres est σ_1^{-1}, on a comme avant $||A^{-1}||_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_1}}$.
On a bien, par définition, $\kappa(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2 = \sqrt{\dfrac{\sigma_N}{\sigma_1}}$.

f. Si A est symétrique définie positive, d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^T$. Alors, $A^T A = A^2 = PD^2P^T$ avec $0 < \lambda_1^2 < \cdots < \lambda_n^2$. D'après la question précédente, $||A||_2 = \sqrt{\lambda_n^2} = \lambda_n$ et $||A^{-1}|| = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1^2}} = \dfrac{1}{\lambda_1}$ donc $\kappa(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2 = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

g. ???

h. ???

i. ???

j. ???

82 D'abord, f_a est clairement un endomorphisme de E pour tout réel a.

a. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in E$, $f_a \circ f_b(x) = f_a(x + b(x|u)u) = f_a(x) + b(x|u)f_a(u)$ par linéarité de u. Or $f_a(u) = (1 + a||u||^2)u = (1+a)u$ car u est unitaire, donc on a bien la relation $f_a \circ f_b = f_{a+b+ba}$ car on a $f_a \circ f_b(x) = x + a(x|u)u + b(1+a)(x|u)u = x + (a+b+ba)(x|u)u = f_{a+b+ba}(x)$.

b. Comme $a + b + ba = b + a + ab$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ par commutativité de la somme et du produit dans $\mathbb{R}$, on a bien $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a bien $f_a^0 = \mathrm{id}_E = f_0 = f_{(a+1)^0-1}$ et $f_a^1 = f_a = f_{(a+1)-1}$. Soit un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $f_a^p = f_{(a+1)^p-1}$, alors d'après la question **a.** et par hypothèse de récurrence, on obtient $f_a^{p+1} = f_a \circ f_a^p = f_a \circ f_{(a+1)^p-1} = f_{a+(a+1)^p-1+((a+1)^p-1)a} = f_{(a+1)^{p+1}-1}$.
Par principe de récurrence, on a $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{N},\ f_a^p = f_{(a+1)^p-1}$.

d. Si $a \neq -1$, il existe b tel que $a + b + ba = 0$, c'est $b = -\dfrac{a}{a+1}$ on a $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a = f_0 = \mathrm{id}_E$ donc f_a est un automorphisme de E. Si $a = -1$, $f_{-1}(u) = u - ||u||^2 u = 0_E$ donc $\mathrm{Ker}(f_{-1}) \neq \{0_E\}$ donc $f_{-1} \notin GL(E)$. Ainsi, f_a est inversible si et seulement si $a \neq -1$.

e. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in E^2$, on a $(f_a(x)|y) = (x + a(x|u)u|y) = (x|y) + a(x|u)(u|y) = (x|y) + a(x|u)(y|u)$ donc $(f_a(x)|y) = (x|y + a(y|u)u) = (x|f_a(y))$ par symétrie du produit scalaire, donc f_a est autoadjoint.

f. <u>Analyse</u> : soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f_a \in O(E)$. Alors $f_a(u)$ est unitaire car u l'est. Comme $f_a(u) = (1+a)u$, on en déduit que $||f_a(u)|| = |+a|||u|| = |1+a| = 1$. Ainsi, $1 + a = \pm 1$ ce qui donne $a = 0$ ou $a = -2$.
<u>Synthèse</u> : • Si $a = 0$, $f_a = \mathrm{id}_E$ donc $f_0 \in O(E)$ (isométrie directe s'il en est).

• Si $a = -2$, $f_{-2}^2 = f_{-2-2+4} = f_0 = \mathrm{id}_E$ donc f_{-2} est une symétrie, et comme c'est aussi un endomorphisme autoadjoint, c'est une symétrie orthogonale d'après le cours. Or $f_{-2}(x) = x \Longleftrightarrow (x|u) = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$ ce qui montre que $E_1(f_{-2}) = \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$. Comme f_{-2} est orthogonale, $E_{-1}(f_{-2}) = E_1(f_{-2})^{\perp}) = \mathrm{Vect}(u)$. Dans ce cas, f_{-2} est la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.

Conclusion : il existe donc seulement deux isométries parmi les f_a : $f_0 = \mathrm{id}_E \in SO(E)$ et $f_{-2} \in O(E) \setminus SO(E)$ qui est la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.

Pour aller plus loin : toutes les questions précédentes justifient qu'en posant $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$:

- La loi $\circ$ est interne dans $\mathcal{F}$ d'après la question **a.** car si $a \neq -1$ et $b \neq -1$, $f_a \circ f_b = f_{a+b+ab}$ et $(a+b+ab)+1 = (a+1)(b+1) \neq 0$ donc $a+b+ab \neq -1$ et $f_a \circ f_b \in \mathcal{F}$.
- La loi $\circ$ est commutative dans $\mathcal{F}$ d'après la question **b.**.
- La loi $\circ$ est toujours associative.
- $f_0 = \mathrm{id}_E$ est neutre pour $\circ$ dans $\mathcal{F}$ car $-1 \neq 0$.
- Tous les éléments f_a de $\mathcal{F}$ (avec $a \neq -1$) sont inversibles dans $\mathcal{F}$ car en posant $b = -\dfrac{a}{a+1}$, on a $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a = \mathrm{id}_E = f_0$ d'après **d.** et $-\dfrac{a}{a+1} + 1 = \dfrac{1}{a+1} \neq 0$ donc $b \neq -1$.

Ceci justifie que $\mathcal{F}$ est un groupe abélien pour la loi $\circ$.

De plus, l'application $\theta : \mathbb{R}^* \to \mathcal{F}$ définie par $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\theta(a) = f_{a-1}$ est bien définie d'après **d.** car $a - 1 \neq -1$ si $a \neq 0$. Elle est surjective par définition de $\mathcal{F}$, injective car $f_a = f_b$ équivaut à $a = b$ (évaluer par exemple en $x = u$), ainsi θ est bijective. Enfin, pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $\theta(a \times b) = f_{ab-1}$ et $\theta(a) \circ \theta(b) = f_{a-1} \circ f_{b-1} = f_{(a-1)+(b-1)+(a-1)(b-1)} = f_{ab-1}$ donc $\theta(a \times b) = \theta(a) \circ \theta(b)$, ce qui montre que θ est un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathcal{F}, \circ)$.

Question supplémentaire : d'abord, $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un évènement ($A \in \mathcal{A}$) car il est une réunion d'un nombre dénombrable d'évènements (axiome d'une tribu) et $\mathbb{P}\Big(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leqslant 1$ par σ-additivité donc, comme la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, on a $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

83 corrigé en TD et pas encore rédigé

84 pas fait

85 corrigé en TD et pas encore rédigé

86 pas fait

87 **a.** A est diagonale propre, par définition, si et seulement si $\chi_A = (X-a)(X-d)$. Or on sait d'après le cours que $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A) = \chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$.
Ainsi, comme $X^2 - (a+d)X + ad - bc = (X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$ si et seulement si $bc = 0$, on en déduit que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à diagonale propre si et seulement si $b = 0$ ou $c = 0$, c'est-à-dire si et seulement si A est triangulaire inférieure (si $b = 0$) ou triangulaire supérieure (si $c = 0$).

b. Si A est symétrique, pour le produit scalaire canonique sur les matrices défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B)$, on

a $||A||^2 = \text{Tr}\,(A^T A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$. Or, d'après le théorème spectral, on a $A = PDP^T$ avec P orthogonale et D diagonale contenant les valeurs propres de A (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Ainsi, il vient $||A||^2 = \text{Tr}\,(A^T A) = \text{Tr}\,(PD^2P^T) = \text{Tr}\,(D^2)$ car deux matrices semblables ont même trace. Or $\text{Tr}\,(D^2) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ ce qui donne bien la relation $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ (1).
Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n$, on a donc $||A||^2 = \sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ mais, par hypothèse, les valeurs propres de A sont $a_{1,1}, \cdots, a_{n,n}$ donc $\sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda(A)\lambda^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$ (2). Ainsi, $\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}^2 = 0$ (1) $-$ (2) ce qui montre que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$ et enfin A diagonale. Ainsi, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n = D_n$ (les matrices diagonales) car réciproquement, les matrices diagonales (donc triangulaires) sont symétriques et à diagonale propre.
c. Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$, alors par hypothèse $\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - 0) = X^n$ car les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Par Cayley-Hamilton, $A^n = 0$ donc A est nilpotente. Comme A^2 est symétrique réelle donc diagonalisable par le théorème spectral et qu'elle est aussi nilpotente, elle est forcément nulle car elle est semblable à une matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. Ainsi $A^2 = 0 = -A^T A$ donc $A^T A = 0$ ce qui donne $||A||^2 = \text{Tr}\,(A^T A) = 0$ donc $A = 0$. Par conséquent $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n = \{0\}$.
d. Soit F un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'après la question précédente, $F \cap A_n = \{0\}$. Par la formule de Grassmann, on a $\dim(F) = \dim(F + A_n) - \dim(A_n) = \dim(F + A_n) - \dfrac{n(n-1)}{2}$ (classique). Or $F + A_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(F + A_n) \leqslant n^2$ et on obtient donc $\dim(F) \leqslant n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On a obtenu un majoration de la dimension des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices à diagonale propre, mais c'est un maximum car le sous-espace des matrices triangulaires supérieures (par exemple) est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

88 pas fait

89 D'abord, on constate que Φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par linéarité du produit scalaire en la première variable donc, comme $\dim(\mathbb{R}) = 1$ donc rang $(\Phi) \leqslant 1$, on a deux cas :

- soit rang $(\Phi) = 1$ donc $\dim(\text{Im}\,(\Phi)) = \dim(\mathbb{R})$ alors que $\text{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}$ donc $\text{Im}\,(\Phi) = \mathbb{R}$.
- soit rang $(\Phi) = 0$, alors $\Phi = 0$ donc $\text{Im}\,(\Phi) = \{0\}$.

De plus, si $X^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, par calcul matriciel, $\Phi(M) = < MX, X > = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} x_i x_j$.
a. Comme $X \neq 0$ et que $\Phi(I_n) = < X|X > = ||X||^2 \neq 0$, on a rang $(\Phi) = 1$ donc $\text{Im}\,(\phi) = \Phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$.
b. Pour $M \in O_n(\mathbb{R})$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\Phi(M)| = |< MX, X >| \leqslant ||MX||\,||X||$. Comme $M \in O_n(\mathbb{R})$, $||MX|| = ||X||$ donc $|\Phi(M)| \leqslant ||X||^2$ et $\Phi(O_n(\mathbb{R})) \subset [-||X||^2; ||X||^2]$. Traitons deux cas :
<u>Si $n = 1$</u> , on a $O_1(\mathbb{R}) = \{I_1, -I_1\}$ donc $\Phi(O_1(\mathbb{R})) = \{< X|X >, < -X|X >\} = \{-||X||^2, ||X||^2\}$.
<u>Si $n \geqslant 2$</u> , posons $X_1 = \dfrac{X}{||X||}$, comme la famille (X_1) est orthonormée, on peut donc la compléter en une base orthonormale $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} R_\theta & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on note M la matrice de u dans la base canonique. Ainsi,

$MX = u(||X||X_1) = ||X||u(X_1) = ||X||(\cos(\theta)X_1 - \sin(\theta)X_2)$ donc $\Phi(M) = < MX, X >= ||X||\cos(\theta)$.
Pour tout $y \in [-||X||^2; ||X||^2]$, en posant $\theta = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{y}{||X|||^2}\right)$, on a $< MX, X >= y \in \Phi(O_n(\mathbb{R}))$.
Par conséquent, par double inclusion, on obtient $\Phi(O_n(\mathbb{R})) = [-||X||^2; ||X||^2]$.

90 **a.** La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite de FIBONACCI et ses premiers termes sont $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, $f_6 = 8$. Ainsi, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

b. Les deux premières colonnes de A_n forment une famille libre car $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$. De plus, par construction, en notant C_j la j-ième colonne de A_n, on a $\forall j \in [\![1; n-2]\!]$, $C_{j+2} = C_{j+1} + C_j$ ce qui montre que les colonnes $C_3, \cdots, C_n$ sont des combinaisons linéaires des colonnes précédentes donc des colonnes C_1 et C_2. Ainsi, rang $(A_n) = 2$ de qui montre, avec la formule du rang, que $\dim(\mathrm{Ker}(A_n)) = \dim(E_0(A_n)) = n-2$. Comme A_n est symétrique réelle car $f_{i+j-2} = f_{j+i-2}$, la matrice A_n est diagonalisable d'après le théorème spectral. Par conséquent, l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_{A_n} est égal à $\dim(E_0(A_n)) = n-2$.

c. D'après la question précédente et toujours grâce au théorème spectral, $\chi_{A_n} = X^{n-2}(X - \lambda_n)(X - \mu_n)$ avec des réels λ_n, μ_n car on sait que χ_{A_n} est scindé sur $\mathbb{R}$, et qu'il est unitaire de degré n.

• Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X^T = (1\ \ -1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0) \neq 0$. On a $X^T A_n X = -1 < 0$ donc A_n n'est pas symétrique positive, il existe donc d'après le cours une valeur propre $\alpha_n < 0$ de A_n.

• Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X^T = (1\ 1\ 0\ \cdots\ 0) \neq 0$. On a $X^T A_n X = 3 > 0$ donc A_n n'est pas symétrique négative, il existe donc d'après le cours une valeur propre $\beta_n > 0$ de A_n.

Les valeurs propres de A_n sont donc $\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-2 \text{ fois}}$, α_n, β_n.

d. Soit $X_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre unitaire de A_n associé à la valeur α_n, d'où $A_n X_n = \alpha_n X_n$. On considère le vecteur $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Par un calcul par blocs, comme $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & * \\ * & f_{2n} \end{pmatrix}$, $Y_{n+1}^T A_{n+1} Y_{n+1} = X_n^T A_n X_n = \alpha_n X_n^T X_n = \alpha_n ||X_n||^2 = \alpha_n$. Grâce au théorème spectral, les espaces propres de A_{n+1} sont supplémentaires orthogonaux et $\mathbb{R}^{n+1} = E_0(A_{n+1}) \oplus E_{\alpha_{n+1}}(A_{n+1}) \oplus E_{\beta_{n+1}}(A_{n+1})$. Ainsi, $Y_{n+1} = U_{n+1} + V_{n+1} + W_{n+1}$ avec $(U_{n+1}, V_{n+1}, W_{n+1}) \in E_0(A_{n+1}) \times E_{\alpha_{n+1}}(A_{n+1}) \times E_{\beta_{n+1}}(A_{n+1})$ et $\alpha_n = Y_{n+1}^T A_{n+1} Y_{n+1} = \alpha_{n+1}||V_{n+1}||^2 + \beta_{n+1}||W_{n+1}||^2 \geqslant \alpha_{n+1}||V_{n+1}||^2 + \alpha_{n+1}||W_{n+1}||^2 \geqslant \alpha_{n+1}$ car on a $||V_{n+1}||^2 + ||W_{n+1}||^2 \leqslant ||U_{n+1}||^2 + ||V_{n+1}||^2 + ||W_{n+1}||^2 = ||Y_{n+1}||^2 = ||X_n||^2 = 1$.

Ainsi, $\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$ et on peut conclure que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

Avec la même méthode, la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

Comme $f_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$, $f_2 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, comme $\forall n \geqslant 2$, $f_{n+1} - f_n = f_{n-1} \geqslant 1$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante et $\forall n \geqslant 2$, $f_n = f_2 + \sum\limits_{k=2}^{n-1}(f_{k+1} - f_k) \geqslant n-1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = +\infty$. Comme Tr $(A_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_{2k} \geqslant f_{2n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}$ Tr $(A_n) = +\infty$. Or Tr $(A_n) = \alpha_n + \beta_n \leqslant \beta_n$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

Il semble que $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ soit convergente, mais c'est une autre histoire !

91 **a.** Soit $x \in F$, alors $\forall y \in F^\perp$, $(x|y) = 0$ donc x est orthogonal à tous les vecteurs de $F^\perp$, ce qui est la définition de $x \in (F^\perp)^\perp$. On a donc bien $F \subset (F^\perp)^\perp$.

b. On vérifie d'abord que l'application proposée est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. En effet, comme le degré d'un polynôme est fini, la suite $(P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1))_{k\in\mathbb{N}}$ est à support fini donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ existe bien si $(P,Q) \in E^2$. La bilinéarité de $(.|.)$ provient de la linéarité des dérivées successives, la symétrie est claire et, si $P \in E$, $(P|P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)^2 \geqslant 0$ et $(P|P) = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}(1) = 0$ donc $P = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = 0$ avec la formule de TAYLOR : $(.|.)$ est bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur E.

Détermination de $F^\perp$:

($\subset$) : soit $P \in F^\perp$, on a donc $\forall Q \in F$, $(P|Q) = 0 = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ car $Q(1) = Q'(1) = 0$. Pour un entier $n \geqslant 2$, prenons $Q = (X-1)^n \in F$, l'égalité $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1) = 0$ se résume à $P^{(n)}(1)Q^{(n)}(1) = 0$ car $\forall k \neq n,\ Q^{(k)}(1) = 0$. Or $Q^{(n)}(1) = n!$ donc $P^{(n)}(1) = 0$. Avec la formule de TAYLOR en 1 pour les polynômes, $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)(X-1)^k = P(1) + P'(1)(X-1)$ donc $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi, $F^\perp \subset \mathbb{R}_1[X]$.

($\supset$) : soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$ et $Q \in F$, alors $P = P(1) + P'(1)(X-1)$ et $Q = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} Q^{(k)}(1)(X-1)^k$ par la formule de TAYLOR car $Q(1) = Q'(1) = 0$ et on a bien $(P|Q) = 0$ car $Q(1) = Q'(1) = P''(1) = \cdots = P^{(n)}(1) = 0$ donc $P \in F^\perp$. On peut donc affirmer que $\mathbb{R}_1[X] \subset F^\perp$.

Par double inclusion, on a $F^\perp = \mathbb{R}_1[X]$.

Détermination de $(F^\perp)^\perp$:

($\subset$) : soit $P \in (F^\perp)^\perp$, on a donc $\forall Q \in F^\perp$, $(P|Q) = 0 = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1)$ car $\forall k \geqslant 2,\ Q^{(k)}(1) = 0$. Prenons $Q = 1$ puis $Q = X - 1$, on a donc $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ donc $P \in F$. Ainsi, $(F^\perp)^\perp \subset F$.

($\supset$) : l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ a été établie à la question **a.**.

Par double inclusion, on a $(F^\perp)^\perp = F$.

c. On vérifie d'abord que l'application proposée est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: classique !

Soit $P \in F^\perp$, alors $\forall Q \in F$, $(P|Q) = 0$ par hypothèse. Prenons en particulier $Q = (X-1)^2P \in F$, on a donc $(P|Q) = \int_0^1 (t-1)^2P(t)^2dt = 0$. Comme la fonction $t \mapsto (t-1)^2P(t)^2$ est continue et positive sur le segment $[0;1]$, on en déduit qu'elle est nulle donc que $\forall t \in [0;1]$, $(t-1)^2P(t)^2 = 0$ puis que $\forall t \in [0;1[$, $P(t) = 0$. Le polynôme P admet ainsi une infinité de racines, ce qui montre que $P = 0$. On vient de montrer que $F^\perp = \{0\}$.
D'après le cours, on a donc $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \mathbb{R}[X] \neq F$.

d. On a vu en cours que si F est de dimension finie, on a $F = (F^\perp)^\perp$.

e. D'après la question **b.**, comme $F = \text{Vect}\big(\{(X-1)^n \mid n \geqslant 2\}\big)$ est de dimension infinie car $\big((X-1)^n\big)_{n\geqslant 2}$ est une famille libre de cardinal infini dans F et qu'on a quand même $F = (F^\perp)^\perp$, la condition suffisante de la question **d.** n'est pas nécessaire.

92 Analyse : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^TMM^T = I_n$. La matrice $A = M^TM$ est symétrique réelle, et on a $M = A^{-1}$ par hypothèse. Ainsi, $M^T = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1} = M$ ce qui justifie que M est aussi symétrique réelle. Par conséquent, on a $M^TMM^T = M^3 = I_n$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^T$, ce qui donne $M^3 = PD^3P^T = I_n = PP^T$

donc $D^3 = 1$. Mais comme les termes diagonaux de D sont des réels et que l'application $t \mapsto t^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a forcément $D = I_n$. Par conséquent, $M = PI_nP^T = PP^T = I_n$.

Synthèse : si $M = I_n$, on a bien $M^TMM^T = I_n^3 = I_n$.

Conclusion : la seule matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^TMM^T = I_n$ est $M = I_n$.

93 **a.** Les vecteurs $(2,1,-2)$ et $(1,-2,2)$ sont dans F et sont de norme $\sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$ donc (v_1, v_2) est une base orthonormale de F si $v_1 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$ et $v_2 = \frac{1}{3}(2,-2,1)$. Comme $w_3 = (1,2,2)$ est normal à F par car $x + 2y + 2z = 0 \iff (v|w_3) = 0$ avec $v = (x,y,z)$, et que ce vecteur w_3 est aussi de norme 3, si on pose $v_3 = \frac{1}{3}(1,2,2)$, la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

b. $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $F^\perp = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ d'après le cours, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de p et de s, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B'$.

c. Méthode 1 : pour $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $p(v) = v - \dfrac{(v|v_3)}{||v_3||^2}v_3$ car l'application $p' : v \mapsto v - \dfrac{(v|v_3)}{||v_3||^2}v_3$ est aussi un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $p(v) = 0$ si $v = \lambda v_3 \in \mathrm{Vect}(v_3) = F^\perp$ car $p(\lambda v_3) = \lambda v_3 - \dfrac{\lambda||v_3||^2}{||v_3||^2}v_3 = 0$ et $p(v) = v$ si $v \in F \iff v \perp v_3$ car alors $p(v) = v - \dfrac{0}{||v_3||^2}v_3 = v$. p et p' coïncident donc sur F et sur $F^\perp$ donc sur $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$. Ainsi, $p(\overrightarrow{i}) = (1,0,0) - \frac{1}{9}(1,2,2) = \frac{1}{9}(8,-2,-2)$, $p(\overrightarrow{j}) = (0,1,0) - \frac{2}{9}(1,2,2) = \frac{1}{9}(-2,5,-4)$ et $p(\overrightarrow{k}) = (0,0,1) - \frac{2}{9}(1,2,2) = \frac{1}{9}(-2,-4,5)$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = A$. Puisque $s = 2p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} - I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Méthode 2 : par formule de changement de base, si $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = P^{-1}A'P$ et $B = P^{-1}B'P$. Or P est la matrice de passage entre deux bases orthonormales d'où $P^{-1} = P^T$ et $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ (calcul facile) et $B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ ou $B = 2A - I_3$.

94 pas fait

95 On constate que φ_A est bien définie par définition du produit matriciel et que c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (facile). On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'après l'énoncé, de sa structure euclidienne canonique, c'est-à-dire du produit scalaire $(M,N) \mapsto (M|N) = \mathrm{Tr}\,(M^TN)$. Ainsi, φ_A est une isométrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\varphi_A(M)|\varphi_A(M)) = \mathrm{Tr}\,(AM^TA^TAMA^T) = \mathrm{Tr}\,(M^TM) = (M|M)$.

Synthèse : si $A \in O(n)$, on a $A^TA = I_n$ donc $\mathrm{Tr}\,(AM^TA^TAMA^T) = \mathrm{Tr}\,(AM^TMA^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(M^TM)$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car AM^TMA^{-1} et M^TM sont semblables et φ_A est bien une isométrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Analyse : si φ_A est une isométrie, par exemple pour les vecteurs E_{i_0,j_0} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on doit avoir $||\varphi_A(E_{i_0,j_0})|| = ||E_{i_0,j_0}|| = 1$. Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B_{i_0,j_0} = E_{i_0,j_0}A^T = (\delta_{i,i_0}a_{j,j_0})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a donc $\varphi_A(E_{i_0,j_0}) = AE_{i_0,j_0}A^T = AB_{i_0,j_0} = M_{i_0,j_0} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $m_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,i_0}a_{j,j_0} = a_{i,i_0}a_{j,j_0}$, de sorte que $||\varphi_A(E_{i_0,j_0})||^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2 = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i_0}^2\Big)\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,j_0}^2\Big) = ||C_{i_0}||^2||C_{j_0}||^2$ en notant C_m la m-ième colonne de A. En prenant $i_0 = j_0$, on a donc $\forall i_0 \in [\![1;n]\!]$, $||C_{i_0}||^4 = 1$ donc $||C_{i_0}|| = 1$.

???

96 **a.** Pour $(P,Q) \in E^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1;1]$ donc l'application $< .,. >$ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ car le réel $< P,Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ existe.

<u>Symétrie</u> : pour $(P,Q) \in E^2$, comme $PQ = QP$, on a $< P,Q >=< Q,P >$ donc $< .,. >$ est symétrique.

<u>Bilinéarité</u> : pour $(P_1,P_2,Q) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $< \lambda P_1 + P_2, Q >= \int_{-1}^{1} (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)dt$ donc on obtient $< \lambda P_1 + P_2, Q >= \int_{-1}^{1} (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)dt + \int_{-1}^{1} (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)dt = \lambda < P_1, Q > + < P_2, Q >$ par linéarité de l'intégrale et $< .,. >$ est linéaire en la première variable ce qui montre, par symétrie, que $< .,. >$ est aussi linéaire en la seconde. Ainsi, $< .,. >$ est bilinéaire.

<u>Définie positivité</u> : pour $P \in E$, $< P,P >= \int_{-1}^{1} P(t)^2dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale car $P(t)^2 \geqslant 0$ pour $t \in [-1;1]$ et que $-1 \leqslant 1$. De plus, si $< P,P >= 0$, comme la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1;1]$, elle y est nulle donc le polynôme P admet une infinité de racines et $P = 0$.

Ainsi, $< .,. >$ définit bien un produit scalaire sur E.

b. Soit $(P_1,P_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par définition de f_A, on a $P_1 = AQ_1 + R_1$ et $P_2 = AQ_2 + R_2$ où $R_1 = f_A(P_1)$ et $R_2 = f_A(P_2)$ donc $\lambda P_1 + P_2 = A(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2)$ donc $R = \lambda R_1 + R_2$ est bien le reste de la division euclidienne de $\lambda P_1 + P_2$ par A car $deg(\lambda R_1 + R_2) \leqslant Max(deg(R_1), deg(R_2)) < deg(A) \leqslant n - 1 < n$, ce qui montre la linéarité de f_A car $f_A(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f_A(P_1) + f_A(P_2)$. Comme $\forall P \in E,\ f_A(P) \in E$ par construction, f_A est bien un endomorphisme de E.

c. Soit $P \in E$ et $R = f_A(P)$ de sorte que $P = AQ+R$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. Comme $R = A.0+R$ avec $deg(R) < deg(A)$, R est le reste de la division euclidienne de R par A donc $f_A(R) = R = f_A^2(P) = f_A(P)$ ce qui montre que f_A est un projecteur de E quelle que soit la valeur de A. Notons $p = deg(A) \in [\![0;n]\!]$.

<u>Méthode 1</u> : on procède par analyse synthèse :

<u>Analyse</u> : supposons que f_A est un projecteur orthogonal, on sait d'après le cours que f_A est alors un endomorphisme symétrique. Ainsi, pour $(P_1,P_2) \in E^2$, en notant $P_1 = AQ_1 + R_1$ et $P_2 = AQ_2 + R_2$ où $R_1 = f_A(P_1)$ et $R_2 = f_A(P_2)$, on a $< f_A(P_1), P_2 >=< P_1, f_A(P_2) >=$ donc $< R_1, AQ_2+R_2 >=< AQ_1+R_1, R_2 >$ qui devient, après simplification, $< R_1, AQ_2 > - < AQ_1, R_2 >=< A, R_1Q_2 - R_2Q_1 >= 0$. Si on pose .

<u>Synthèse</u> ???

<u>Méthode 2</u> : pour $P \in E$, $f_A(P) = 0 \iff A$ divise P car $f_A(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par A. Ainsi, $Ker(f_A) = E_0(f_A) = A\,\mathbb{R}_{n-p}[X]$ (les multiples de A de degrés inférieurs ou égaux à n). On trouve $\text{Im}\,(f_A) = E_1(f_A) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et on conclut (à rédiger).

d. Dans cette question, on prend $n = 3$ et on cherche $A = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_2[X]^{\perp}$.

Méthode 1 : $A \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$ si et seulement si $< A, 1 >=< A, X >=< A, X^2 >= 0$ car $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Or $< A, 1 >= \dfrac{2b}{3} + 2d$, $< A, X >= \dfrac{2a}{5} + \dfrac{2c}{3}$ et $< A, X^2 >= \dfrac{2b}{5} + \dfrac{2d}{3}$. Or $\dfrac{2a}{5} + \dfrac{2c}{3} = 0 \Longleftrightarrow c = -\dfrac{3a}{5}$ et $\dfrac{2b}{3} + 2d = \dfrac{2b}{5} + \dfrac{2d}{3} = 0 \Longleftrightarrow b = d = 0$. Ainsi, $A \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$ si et seulement si $A = a\Big(X^3 - \dfrac{3X}{5}\Big)$ avec $a \neq 0$.

Méthode 2 : avec l'algorithme de Gram-Schmidt, on orthogonalise la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $E = \mathbb{R}_3[X]$. On prend $E_0 = 1$, puis $E_1 = X - \dfrac{< X, E_0 >}{||E_0||^2}E_0 = X - \dfrac{0}{2}E_0 = X$ (on ne norme pas les vecteurs),puis $E_2 = X^2 - \dfrac{< X^2, E_0 >}{||E_0||^2}E_0 - \dfrac{< X^2, E_1 >}{||E_1||^2}E_1 = X^2 - \dfrac{(2/3)}{2}E_0 - \dfrac{0}{(2/3)}E_1 = X^2 - \dfrac{1}{3}$ et enfin le dernier vecteur $E_3 = X^3 - \dfrac{< X^3, E_0 >}{||E_0||^2}E_0 - \dfrac{< X^3, E_1 >}{||E_1||^2}E_1 - \dfrac{< X^3, E_2 >}{||E_2||^2}E_2 = X^3 - \dfrac{0}{2}E_0 - \dfrac{(2/5)}{(2/3)}E_1 - \dfrac{0}{(8/45)}E_2 = X^3 - \dfrac{3X}{5}$. Comme $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(E_0, E_1, E_2)$ et que (E_0, E_1, E_2, E_3) est une base orthogonale de $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{R}_2[X]^\perp = \mathrm{Vect}(E_3)$.

Quelle que soit la méthode, les polynômes A tels que f_A est une projection orthogonale sont les polynômes non nuls proportionnels au polynôme $E_3 = X^3 - \dfrac{3X}{5}$.

97 ($\Longrightarrow$) Si p est le projecteur orthogonal sur un sous-espace F de E, pour tout vecteur $x \in E$ qu'on écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, on a $p(x) = y$ donc $||p(x)||^2 = ||y||^2 \leqslant ||y||^2 + ||z||^2 = ||x||^2$ par Pythagore. Ainsi, en passant à la racine, on a $||p(x)|| \leqslant ||x||$. Par conséquent, pour tout $(x, y) \in E^2$, par linéarité de p, $||p(x) - p(y)|| = ||p(x - y)|| \leqslant ||x - y||$ ce qui prouve que p est 1-lipschitzien.

($\Longleftarrow$) Supposons que p est 1-lipschitzien, alors $\forall x \in E$, $||p(x)|| = ||p(x) - p(0_E) \leqslant ||x - 0_E|| = ||x||$. Notons F et G les sous-espaces de E tels que $G = \mathrm{Ker}(p)$ et $F = \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ de sorte que p soit la projection sur F parallèlement à G. Soit $y \in F$ et $z \in G$, alors pour tout réel t, on a $p(ty + z) = ty$ donc $||p(ty + z)|| = ||ty|| \leqslant ||ty + z||$ donc $t^2||y||^2 = ||ty||^2 \leqslant ||ty + z||^2 = t^2||y||^2 + 2t(y|z) + ||z||^2$ ce qui prouve que la fonction affine $t \mapsto 2t(y|z) + ||z||^2$ reste positive sur $\mathbb{R}$. Or ceci n'est possible que si cette fonction est constante, donc si $(y|z) = 0$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$ d'où $\mathrm{Ker}(p) \subset (\mathrm{Im}\,(p))^\perp$ mais ces deux sous-espaces ont la même dimension par la formule du rang donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}\,(p)^\perp$ et p est orthogonale.

Par double implication, on a bien p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est 1-lipschitzien.

98 **a.** ($\subset$) Comme $A^TA = AA^T$ par hypothèse, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $X \in \mathrm{Ker}(A)$, on a $AX = 0$ donc $A^TAX = AA^TX = 0$ donc $||A^TX||^2 = (A^TX)^T(A^TX) = X^TAA^TX = X^T0 = 0$ ce qui montre que $A^TX = 0$ et que $X \in \mathrm{Ker}(A^T)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^T)$.

($\supset$) Par symétrie des rôles joués par A et A^T dans les hypothèses de l'énoncé, la première inclusion montre aussi que $\mathrm{Ker}(A^T) \subset \mathrm{Ker}((A^T)^T) = \mathrm{Ker}(A)$.
Par double inclusion, on a donc l'égalité $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T)$.

b. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$ et $Y \in \mathrm{Im}\,(A)$, alors il existe $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = AZ$ et $X \in \mathrm{Ker}(A^T)$ d'après **a.**. Ainsi, $(X|Y) = X^TY = X^TAZ = (A^TX)^TZ = (A^TX|Z) = (0|Z) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ sont orthogonaux donc en somme directe. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}\,(A)) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$ par la formule du rang, on en déduit que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

c. Prenons une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(A)$ et une base orthonormale $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Im}\,(A)$ (il en existe), alors la famille concaténée $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ d'après la question précédente. En notant

a l'endomorphisme canoniquement associé à A, comme $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(a)$ est stable par a, on peut écrire $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ par blocs avec U qui représente d'après le cours la matrice de l'endomorphisme induit par a dans $\mathrm{Im}(A)$. Par la formule de changement de base, en notant P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$, on a donc $A = PBP^{-1}$. Comme la base canonique et $\mathcal{B}$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$, on sait d'après le cours que P est orthogonale donc que $P^{-1} = P^T$. Comme $\mathrm{Im}(A)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(A)$, on sait d'après le théorème du rang que a induit un automorphisme entre $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$, donc que U est une matrice inversible de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ en notant r le rang de A, donc la dimension de $\mathrm{Im}(A)$. Ainsi, il existe $r \in [\![0;n]\!]$ et $P \in O(n)$ tels que $A = PBP^T$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $U \in GL_r(\mathbb{R})$.

99 **a.** Pour $x \in E$, $(p(x)|p(x)) = (p(x)-x+x|p(x)) = (p(x)-x|p(x))+(x|p(x))$ par bilinéarité du produit scalaire. Or p est un projecteur orthogonal, donc la projection sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) = F^{\perp}$, ce qui assure que $x - p(x) \in F^{\perp}$ et que $p(x) \in F$, donc que $(p(x) - x|p(x)) = 0$ et on a bien $(p(x)|p(x)) = (x|p(x))$.

b. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, on sait que $a_{i,j} = (p(v_j)|v_i)$ donc $||p(v_i)||^2 = (p(v_i)|p(v_i)) = (v_i|p(v_i)) = a_{i,i}$ d'après **a.**. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} ||p(v_i)||^2$. Or, si $\mathcal{B}' = (w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots, w_n)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ avec $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(w_1, \cdots, w_r)$ (car $r = \mathrm{rang}(p) = \dim(\mathrm{Im}(p))$) et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(w_{r+1}, \cdots, w_n)$, on a $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Tr}\,(p) = \mathrm{Tr}\,(A') = r$. Par conséquent, $\sum\limits_{i=1}^{n} ||p(v_i)||^2 = r = \mathrm{Tr}\,(p)$.

100 **a.** Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1; 1]$ donc $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ existe et l'application φ est bien définie. La symétrie de φ provient de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ ($P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$) et sa bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale (il suffit de l'écrire). De plus, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P, P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2 dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale et, si on a $\varphi(P, P) = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2$ étant continue et positive sur $[-1; 1]$ et que $\int_{-1}^{1} P(t)^2 dt = 0$, d'après le cours, $\forall t \in [-1; 1],\ P(t)^2 = 0$ donc P admet une infinité de racines ce qui montre que P est le polynôme nul. Comme φ est bilinéaire symétrique définie positif, c'est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, en restreignant le produit scalaire φ dans $\mathbb{R}_n[X]$, cet espace devient devient un espace euclidien muni du produit scalaire $\varphi_n : (\mathbb{R}_n[X])^2 \to \mathbb{R}$ défini par $\varphi_n(P, Q) = \varphi(P, Q)$ et l'application $\psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Le théorème de représentation montre qu'il existe un unique $U_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \psi(P) = \varphi(P, U_n) = P(0) = \int_{-1}^{1} P(t)U_n(t)dt$.

c. Posons $U_2 = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Comme $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = \int_{-1}^{1} P(t)U_2(t)dt$, avec $P = 1, X$ ou X^2, on a $\int_{-1}^{1}(at^2 + bt + c)dt = 1$, $\int_{-1}^{1} t(at^2 + bt + c)dt = 0$ et $\int_{-1}^{1} t^2(at^2 + bt + c)dt = 0$ ce qui donne $\frac{2a}{3} + 2c = 1$, $b = 0$ et $\frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} = 0$ donc $a = -\frac{15}{8}$, $b = 0$ et $c = \frac{9}{8}$ d'où $U_2 = \frac{3}{8}(3 - 5X^2)$.

101 **a.** La matrice $S = M^T M$ est symétrique car $S^T = (M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M = S$ et elle est à coefficients réels donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral.

b. On a $S^2 = (M^TM)(M^TM) = M^T(MM^T)M = M^T(M^TM)M$ par hypothèse car $M^TM = MM^T$. Comme on a $M^2 = -2I_2$, $S^2 = (M^T)^2M^2 = (M^2)^TM^2 = (-2I_2)^2 = 4I_2$. Ainsi, le polynôme $X^2-4 = (X-2)(X+2)$ annule S et on sait d'après le cours que ceci implique que $\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}(M^TM) \subset \{-2,2\}$.

c. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M^TM)$, il existe par définition un vecteur $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $SX = M^TMX = \lambda X$. Ainsi, $X^TM^TMX = \lambda X^TX$ donc $||MX||^2 = \lambda||X||^2$ d'où $\lambda = \dfrac{||MX||^2}{||X||^2} \geqslant 0$ car $||X||^2 > 0$. Or, $\mathrm{Sp}(M^TM) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(M^TM) \subset \{-2,2\}$ implique $\mathrm{Sp}(M^TM) = \{2\}$ car $\mathrm{Sp}(M^TM) \neq \emptyset$ d'après le théorème spectral.

d. Comme S est diagonalisable et n'a qu'une valeur propre, S est semblable à la matrice diagonale avec des 2 sur la diagonale. Comme S est semblable à $2I_2$, on a $S = P(2I_2)P^{-1} = 2I_2 = M^TM$ donc $\left(\dfrac{M}{\sqrt{2}}\right)^T\left(\dfrac{M}{\sqrt{2}}\right) = I_2$ ce qui montre que $\dfrac{M}{\sqrt{2}} \in O(2)$.

e. Posons $A = \dfrac{M}{\sqrt{2}}$, on a donc $A \in O(2)$ et $A^2 = -I_2$ d'après **d.** et par hypothèse, donc $\det(A) = 1$ car si on avait $\det(A) = -1$, on aurait $A^2 = I_2$ (réflexion) d'après le cours. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta$ et $A^2 = R_{2\theta} = -I_2 = R_\pi$ donc $2\theta \equiv \pi\ [2\pi] \iff \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ donc $\theta \equiv \pm\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Ainsi, les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^TM = MM^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$ sont $M_1 = \sqrt{2}\,R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \sqrt{2}\,R_{-\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ (elles conviennent).

102 Comme S est symétrique réelle, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telle que $S = PDP^T$. Puisque S est définie positive, $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $Y^TSY > 0$. Soit λ une valeur propre de S, alors $\lambda \in \mathbb{R}$ par le théorème spectral et il existe $Y \neq 0$ tel que $SY = \lambda Y$. Ainsi, $Y^TSY = \lambda Y^TY = \lambda||Y||^2$ donc $\lambda = \dfrac{Y^TSY}{||Y||^2} > 0$. Classons les valeurs propres de S, notons-les $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_r$ (avec $r \leqslant n$). On sait d'après le théorème spectral que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(S)$.

Pour tout vecteur $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on le décompose $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$ avec $(X_1,\cdots,X_r) \in E_{\lambda_1}(S) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(S)$. Ainsi, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $S^kX = \sum_{i=1}^{r} S^kX_i$. Or $SX_i = \lambda_iX_i$ par définition donc, par une récurrence simple, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ S^kX_i = \lambda_i^kX_i$. Par conséquent, $S^kX = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^kX_i$.

Soit $j = \mathrm{Max}\left(\{i \in [\![1;r]\!] \mid X_i \neq 0\}\right)$ le plus grand entier tel que X_i est non nul, j existe bien car, comme $X \neq 0$, il existe forcément un indice $i \in [\![1;r]\!]$ tel que que $X_i \neq 0$. Par définition de j, $S^kX = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i^kX_i \neq 0$ pour $k \in \mathbb{N}$. Par PYTHAGORE, comme $(X_1,\cdots,X_j)$ est orthogonale, on a $||S^kX||^2 = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i^{2k}||X_i||^2$ donc $||S^kX||^2 \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j^{2k}||X_j||^2$ et $||S^kX|| \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j^k||X_j||$ (tout est positif). Comme $\forall i \in [\![1;j-1]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\lambda_i^k}{||S^kX||} = 0$ car $\lambda_i < \lambda_j$ et que $Y_k = \dfrac{\lambda_j^k}{||S^kX||}X_j + \sum_{i=1}^{j-1} \dfrac{\lambda_i^k}{||S^kX||}X_i$, ce qui précède montre que $\lim\limits_{k\to+\infty} Y_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\lambda_j^k}{||S^kX||}X_j = \dfrac{X_j}{||X_j||}$ (car $||S^kX|| \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j^k||X_j||$) qui est bien un vecteur propre (et même unitaire) de S associé à la valeur propre λ_j.

103 **a.** Soit $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors $v \in F \iff x-t = y-z = 0 \iff (x,y,z,t) = (x,y,y,x) = xv_1 + yv_2$

en notant $v_1 = (1,0,0,1)$ et $v_2 = (0,1,1,0)$. Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et, comme (v_1, v_2) est libre, F est de dimension 2. En notant s la symétrie orthogonale par rapport à F, on sait que $\forall v \in \mathbb{R}^4,\ s(v) = 2p(v) - v$ en notant p la projection orthogonale sur F. Or v_1, v_2 sont orthogonaux la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^4$ (on admet que c'est celle qu'on utilise dans $\mathbb{R}^4$) et de norme $\sqrt{2}$ donc $p(v) = \dfrac{(v|v_1)}{2}v_1 + \dfrac{(v|v_2)}{2}v_2$ d'après le cours car $\left(\dfrac{v_1}{\sqrt{2}}, \dfrac{v_2}{\sqrt{2}}\right)$ est une base orthonormée de F. Ainsi, si on prend un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a $s(v) = (v|v_1)v_1 + (v|v_2)v_2 - v = (x+t)v_1 + (y+z)v_2 - v = (x+t, y+z, y+z, x+t) - (x, y, z, t) = (t, z, y, x)$.

Ainsi, on a donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On constate que A est symétrique. C'était effectivement prévisible car s est une symétrie orthogonale donc un endomorphisme autoadjoint et que la base canonique est une base orthonormée pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^4$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 8 PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

104 **a.** Comme Z est bornée, Z admet une espérance finie et, par définition, $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{z \in Z(\Omega)} z\,\mathbb{P}(Z = z)$ ce qui donne $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i\,\mathbb{P}(Z = \alpha_i)$ avec les notations de l'énoncé. On a donc $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \Big(\sum\limits_{\substack{\omega \in \Omega \\ Z(\omega)=\alpha_i}} \mathbb{P}(\{\omega\}) \Big)$ en écrivant $(Z = \alpha_i) = \bigsqcup\limits_{\substack{\omega \in \Omega \\ Z(\omega)=\alpha_i}} \{\omega\}$. Comme $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (Z = \alpha_i)$ car $Z(\Omega) = \{\alpha_1, \cdots \alpha_m\}$ d'après l'énoncé, on a $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} Z(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum\limits_{k=1}^{n} Z(\omega_k)\,\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Z(\omega_k)$ puisque $\mathbb{P}$ est uniforme sur Ω. Par conséquent, on a bien $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{n} < z, x_n >$ avec le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

b. Les deux conditions imposées à $u = (\beta_1, \cdots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ s'écrivent aussi $(u|v) = (u|w) = 0$ avec $v = \big(\mathbb{P}(Z = \alpha_1), \cdots, \mathbb{P}(Z = \alpha_m)\big)$ et $w = \big(\alpha_1\,\mathbb{P}(Z = \alpha_1), \cdots, \alpha_m\,\mathbb{P}(Z = \alpha_m)\big)$ dans $\mathbb{R}^m$ euclidien canonique. Or $F = \text{Vect}(v, w)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ de dimension d au plus 2 donc $F^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$ de dimension $m - d \geqslant m - 2 \geqslant 1$ car $m \geqslant 3$. Il suffit donc de prendre $u \neq 0$ dans $F^\perp$ pour avoir un vecteur $u = (\beta_1, \cdots, \beta_m) \neq (0, \cdots, 0)$ tel que $(u|v) = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\beta_k = (u|w) = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\alpha_k\beta_k = 0$.

c. Soit $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ le polynôme d'interpolation de LAGRANGE vérifiant $\forall i \in [\![1; m]\!],\ Q(\alpha_i) = \beta_i$. On sait d'après le cours que ce polynôme est unique et que son expression est $Q = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i \prod\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} \dfrac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$. Par le théorème de transfert appliqué à $Q(Z)$ et $ZQ(Z)$, on a $\mathbb{E}(Q(Z)) = \sum\limits_{i=1}^{m} Q(\alpha_i)\,\mathbb{P}(Z = \alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_i)\beta_i = 0$ et $\mathbb{E}(Q(Z)Z) = \sum\limits_{i=1}^{m} Q(\alpha_i)\alpha_i\,\mathbb{P}(Z = \alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_i)\alpha_i\beta_i = 0$ d'après la question **b.**.

d. Pour $i \in [\![1; n-1]\!]$, $< x_i, x_i >= ||x_i||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} X_i(\omega_k)^2 = n\Big(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_i(\omega_k)^2\Big) = n\,\mathbb{E}(X_i^2)$ car, comme en question **a.**, $\mathbb{E}(X_i^2) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X_i(\omega)^2\,\mathbb{P}(\{\omega\})$. Comme $\mathbb{E}(X_i) = 0$ par hypothèse, on a $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) = 1$ d'après l'énoncé et on obtient bien $< x_i, x_i >= n$.

Pour $(i, j) \in [\![1; n-1]\!]^2$, si $i \neq j$, $< x_i, x_j >= \sum\limits_{k=1}^{n} X_i(\omega_k)X_j(\omega_k) = n\,\mathbb{E}(X_iX_j)$ car, comme avant, on a la relation $\mathbb{E}(X_iX_j) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X_i(\omega)X_j(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\})$. Mais comme X_i et X_j sont indépendantes, d'après le cours, il vient $\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j) = 0^2$ par hypothèse donc $< x_i, x_j >= 0$.

e. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1} X_k^2\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k^2) = n - 1$ mais je doute fort que $\sum\limits_{k=1}^{n-1} X_k^2 = n - 1$.

??? L'énoncé doit être faux.

105 **a.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, posons $Y_n = \dfrac{X_n + 1}{2}$. On a donc $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et $(Y_n = 1) = (X_n = 1)$, $(Y_n = 0) = (X_n = -1)$ donc $\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = \dfrac{1}{2}$ de sorte que Y_n suit la loi de BERNOULLI de paramètre $\dfrac{1}{2}$. De plus, par transfert d'indépendance, les variables aléatoires Y_n sont indépendantes car les X_n le sont. Posons $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$, on sait d'après le cours que Y_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

Or $T_n = \frac{n}{2} + \frac{S_n}{2}$ donc $S_n = 2T_n - n$. Comme $T_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on a $S_n(\Omega) = \{-n, -(n-2), \cdots, n-2, n\}$ et $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \mathbb{P}(T_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$.
Par linéarité de l'espérance, comme $\mathbb{E}(X_k) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{E}(S_n) = 0$. Par indépendance des X_k, on a $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n$ car $\mathbb{V}(X_k) = \mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 = \mathbb{E}(X_k^2)$ et que $X_k^2 = 1$.

b. Par Bienaymé-Tchebychev, pour $a > 0$, on a $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant na) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(na)^2} = \frac{1}{na^2}$. Or $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $(S_n \geqslant na) \subset (|S_n| \geqslant na)$ donc, par croissance de $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant na) \leqslant \frac{1}{na^2}$.

c. Pour $a > 0$ et $s > 0$, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto e^{st}$, on a $(X \geqslant a) = (e^{sX} \geqslant e^{sa})$. Or la variable aléatoire e^{sX} est positive donc, même si e^{sX} admet une espérance infinie auquel cas l'inégalité est triviale, on a $\mathbb{P}(X \geqslant a) = \mathbb{P}(e^{sX} \geqslant e^{sa}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{sX})}{e^{sa}}$ d'après l'inégalité de Markov.

d. Pour $s > 0$, on a $e^{sS_n} = \prod\limits_{k=1}^{n} e^{sX_k}$ or, par transfert d'indépendance, les variables aléatoires $e^{sX_1}, \cdots, e^{sX_n}$ sont indépendantes donc, d'après le cours, $\mathbb{E}(e^{sS_n}) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{sX_k})$. Mais, par théorème de transfert, $\mathbb{E}(e^{sX_k}) = \frac{1}{2}e^{s\times 1} + \frac{1}{2}e^{s\times(-1)} = \mathrm{ch}\,(s)$ donc, en prenant $X = S_n$ dans la question précédente, on obtient la majoration $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \frac{1}{e^{sa}} \prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\,(s) = \left(\frac{\mathrm{ch}\,(s)}{e^{sa}}\right)^n$.

e. <u>Méthode 1</u> : Pour tout réel s, d'après le cours, $\mathrm{ch}\,(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{\frac{s^2}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{2n}}{2^n n!}$. Si $a_n = \frac{2^n n!}{(2n)!}$, on a $a_{n+1} = \frac{2(n+1)a_n}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{a_n}{2n+1} \leqslant a_n$ donc $(a_n)_{n\geqslant 0}$ décroît et $a_0 = 1$. Ainsi, on obtient l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{(2n)!} \leqslant \frac{1}{2^n n!}$. D'où $\forall s \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(s) \leqslant e^{\frac{s^2}{2}}$.

<u>Méthode 2</u> : la fonction $f : s \mapsto \frac{s^2}{2} - \ln(\mathrm{ch}\,(s))$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $\mathrm{ch}\,(s) > 0$, deux fois dérivable par opérations et $f'(s) = s - \mathrm{th}\,(s)$ et $f''(s) = \mathrm{th}^2(s) \geqslant 0$ pour $s \in \mathbb{R}$ donc, comme $f'(0) = 0$, f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui montre que f est minimale en 0 et, comme $f(0) = 0$, que f est finalement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\forall s \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{ch}\,(s)) \leqslant \frac{s^2}{2}$ et on conclut par croissance de l'exponentielle que $\forall s \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(s) \leqslant e^{s^2/2}$.

f. Avec **d.** et **e.**, on a $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \left(\frac{\mathrm{ch}\,(s)}{e^{sa}}\right)^n \leqslant e^{n(s^2/2)-sna}$. Posons $g : s \mapsto \frac{s^2}{2} - sa$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(s) = s - a$ donc g est décroissante sur $]0;a]$ et croissante sur $[a;+\infty[$ donc elle est minimale en $s = a$ où $g(a) = -\frac{a^2}{2}$. En prenant $s = a$ dans la majoration précédente, on obtient bien la majoration $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{\frac{-na^2}{2}}$ pour $a > 0$.

g. Pour $x > 0$, on sait que $g(x) = \frac{1}{x^2}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x\right) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$. Ainsi, comme la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc qu'elle y est de classe C^∞, la fonction g, qui en est sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge bien en une fonction continue (et même C^∞) sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+2)!} \geqslant 0$ donc g est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

106 corrigé en TD et pas encore rédigé

107 corrigé en TD et pas encore rédigé

108 pas fait

109 pas fait

110 On modélise ce problème en associant chaque vote pour A à un déplacement dans $\mathbb{Z}^2$ de vecteur $(1,1)$ et chaque vote pour B à un déplacement de vecteur $(1,-1)$. On part du point $(0,0)$ et le dépouillement permet donc un chemin qui va de $(0,0)$ à $(1000,400)$ selon les règles ci-dessus. On cherche le nombre de chemins qui restent au dessus (au sens strict à part bien sûr à l'origine $(0,0)$ de ce mouvement) de l'axe des abscisses.

On prend $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $q < p$ et on note $a_{p,q}$ le nombre de chemins dans $\mathbb{Z}^2$ qui partent de $(0,0)$ et qui arrivent en $(p+q, p-q)$ en restant toujours au dessus (au sens large) de l'axe des abscisses. Dans notre cas, on a $p = 700$ et $q = 300$. Le nombre total des chemins qui partent de $(0,0)$ et qui arrivent en $(p+q, p-q)$ est $b_{p,q} = \binom{p+q}{p}$ car il faut choisir parmi les $p+q$ déplacements les p qui se font vers le haut (en complémentaire ceux qui vont vers le bas).

Les $a_{p,q}$ chemins qui restent au dessus de l'axe des abscisses doivent commencer par un déplacement vers le haut donc passer par le point $(1,1)$. Le nombre total de chemins qui vont de $(1,1)$ à $(p+q, p-q)$ est, comme ci-dessus, égal à $\binom{p+q-1}{p-1}$. Pour un chemin $c = ((1,1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{p+q-1},y_{p+q-1}),(p+q,p-q))$ qui part de $(1,1)$ et arrive en $(p+q,p-q)$ et qui touche l'axe des abscisses, on définit l'entier $k \geqslant 1$ qui est l'indice du premier (k minimal tel que $y_k = 0$) passage par l'axe des abscisses et on associe à c le chemin $c' = ((1,-1),(x_2,-y_2),\cdots,(x_{k-1},-y_{k-1}),(x_k,0),(x_{k+1},y_{k+1}),\cdots,(x_{p+q-1},y_{p+q-1}),(p+q,p-q))$. Réciproquement, pour un chemin $c' = ((1,-1),(x'_2,y'_2),\cdots,(x'_{p+q-1},y'_{p+q-1}),(p+q,p-q))$ qui va de $(1,-1)$ à $(p+q,p-q)$, on définit k qui est le premier passage par l'axe des abscisses et on associe à c' le chemin $c = ((1,1),(x'_2,-y'_2),\cdots,(x'_{k-1},-y'_{k-1}),(x'_k,0),(x'_{k+1},y'_{k+1}),\cdots,(x'_{p+q-1},y'_{p+q-1}),(p+q,p-q))$ qui est un chemin allant de $(1,1)$ à $(p+q,p-q)$ et qui croise l'axe des abscisses.

Ce procédé, appelé principe de réflexion, réalise une bijection entre les chemins allant de $(1,1)$ à $(p+q,p-q)$ et touchant l'axe des abscisses et les chemins allant de $(1,-1)$ à $(p+q,p-q)$. Mais comme il existe, comme précédemment, $\binom{p+q-1}{p}$ chemins qui vont de $(1,-1)$ à $(p+q,p-q)$, la bijection permet d'affirmer qu'il y a aussi $\binom{p+q-1}{p}$ chemins allant de $(1,1)$ à $(p+q,p-q)$ et touchant l'axe des abscisses.

En passant par le complémentaire, il existe donc $a_{p,q} = \binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$ chemins allant de $(1,1)$ à $(p+q,p-q)$ qui ne croisent pas l'axe des abscisses car un chemin qui va de $(0,0)$ à $(p+q,p-q)$ sans croiser l'axe des abscisses est un chemin qui va de $(1,1)$ à $(p+q,p-q)$ sans croiser l'axe des abscisses.

En considérant que tous les chemins sont équiprobables (on peut prendre les bulletins de vote dans un ordre quelconque et de manière équiprobable), la probabilité cherchée est $\alpha = \dfrac{a_{p,q}}{b_{p,q}} = \dfrac{\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}}{\binom{p+q}{p}}$

qui vaut, comme on a $\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!} - \frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!} = \frac{(p+q-1)!(p-q)}{p!q!}$ et $\binom{p+q}{p} = \frac{(p+q)!}{p!q!} = \frac{(p+q).(p+q-1)!}{p!q!}$, plus simplement, $\alpha = \frac{p-q}{p+q}$.

Dans notre cas, comme $p = 700$ et $q = 300$, cela donne $\alpha = 0,4$.

111 **a.** Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\Omega = \bigsqcup_{i,j\geqslant 0} (X = i, Y = j)$ donc, par σ-additivité, on obtient $\sum_{i=0}^{+\infty} \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \Big) = 1$ donc $a \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{q^i}{1-q} = \frac{a}{(1-q)^2} = 1$ (séries géométriques) donc $a = p^2$.

b. Pour $i \in \mathbb{N}$, $(X = i) = \bigsqcup_{j=0}^{+\infty} (X = i, Y = j)$ donc, toujours par σ-additivité, $\mathbb{P}(X = i) = p^2 q^i \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = p(1-p)^i$. Comme $X+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X+1 = k) = \mathbb{P}(X = k-1) = p(1-p)^{k-1}$, la variable aléatoire $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre p. Par symétrie, $Y+1$ suit aussi la même loi géométrique de paramètre p. D'après le cours, $\mathbb{E}(X+1) = \frac{1}{p}$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$ par linéarité de l'espérance et on sait aussi que $\mathbb{V}(X+1) = \frac{1-p}{p^2} = \mathbb{V}(X)$.

c. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(a,b) = ab$ de sorte que $XY = f(X,Y)$. Par théorème de transfert, la variable aléatoire XY admet une espérance finie si et seulement si $(ij\,\mathbb{P}(X = i, Y = j))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Or $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} ij\,\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} ijp^2q^{i+j} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} ijp^2q^{i+j} = p^2 \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (iq^i)(jq^j) = p^2\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} kq^k\Big)^2$ (famille produit). Or on sait que $\forall x \in]-1;1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ qu'on dérive terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ donc $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$.

Par conséquent, $\mathbb{E}(XY) = p^2\Big(\frac{q}{(1-q)^2}\Big)^2 = \frac{q^2}{p^2}$ et $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \frac{q^2}{p^2} - \Big(\frac{q}{p}\Big)^2 = 0$.

Mais c'est bien sûr, comme $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p^2q^{i+j} = (pq^i)(pq^j) = \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j)$, par définition, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et, d'après le cours, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$, les valeurs prises par U sachant que $X+Y = 2n+1$ sont tous les entiers de $n+1$ à $2n+1$. Pour $k \in [\![n+1;2n+1]\!]$, on a $(U = \mathrm{Max}(X,Y) = k) \cap (X+Y = 2n+1) = (X = k, Y = 2n+1-k) \sqcup (X = 2n+1-k, Y = k)$ car $2n+1-k < k$ donc $\mathbb{P}(U = k, X+Y = 2n+1) = \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = 2n+1-k) + \mathbb{P}(X = 2n+1-k)\,\mathbb{P}(Y = k)$ par indépendance de X et Y donc $\mathbb{P}(U = k, X+Y = 2n+1) = 2(pq^k)(pq^{2n+1-k}) = 2p^2q^{2n+1}$. De plus, $(X+Y = 2n+1) = \bigsqcup_{k=0}^{2n+1} (X = k, Y = 2n+1-k)$ donc, par σ-additivité et indépendance de X et Y, $\mathbb{P}(X+Y = 2n+1) = \sum_{k=0}^{2n+1} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = 2n+1-k) = \sum_{k=0}^{2n+1} (pq^k)(pq^{2n+1-k}) = (2n+2)p^2q^{2n+1}$. Ainsi, pour $k \in [\![n+1;2n+1]\!]$, $\mathbb{P}(U = k | X+Y = 2n+1) = \frac{\mathbb{P}(U = k, X+Y = 2n+1)}{\mathbb{P}(X+Y = 2n+1)} = \frac{2p^2q^{2n+1}}{(2n+2)p^2q^{2n+1}} = \frac{1}{n+1}$.

Par conséquent, la loi de U sachant $X+Y = 2n+1$ est uniforme sur l'intervalle $[\![n+1;2n+1]\!]$.

112 corrigé en TD et pas encore rédigé

113 **a.** Notons P_k = “on fait pile au lancer numéro k” (le premier lancer est de numéro 1). On pose $X = +\infty$ si on ne fait pas deux fois pile au cours du processus. On a $X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$(X=k)=\bigsqcup_{i=1}^{k+1}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{P_j}\right)\cap P_i\cap\left(\bigcap_{j=i+1}^{k+1}\overline{P_j}\right)\cap P_{k+2}\right)$ (en notant $i\in[\![1;k+1]\!]$ et $k+2$ les numéros des deux lancers donnant pile). Comme ces évènements sont incompatibles et que $P_1,\cdots,P_{k+2}$ sont supposés indépendants, on a $\mathbb{P}(X=k)=\sum_{i=1}^{k+1}\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(1-p)\Big)p\Big(\prod_{j=i+1}^{k+1}(1-p)\Big)p=(k+1)p^2(1-p)^k$.

$\overline{(X=+\infty)}=\bigsqcup_{k=0}^{+\infty}(X=k)$ donc, par σ-additivité, on a $1-\mathbb{P}(X=+\infty)=p^2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(1-p)^k$. Or on sait que $\forall x\in]-1;1[,\ \dfrac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$ qu'on dérive à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k=\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Comme $1-p\in]0;1[$, $1-\mathbb{P}(X=+\infty)=\dfrac{p^2}{(1-(1-p))^2}=1$ donc $\mathbb{P}(X=+\infty)=0$.

b. Par définition, X admet une espérance finie si et seulement si $\sum_{k\geqslant 0}k\,\mathbb{P}(X=k)$ est absolument convergente. Or $k\,\mathbb{P}(X=k)=k(k+1)p^2(1-p)^k\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$ par croissances comparées donc $\sum_{k\geqslant 0}k\,\mathbb{P}(X=k)$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN, ce qui prouve que X admet une espérance finie.
On dérive une fois de plus terme à terme la relation $\forall x\in]-1;1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ dans l'intervalle ouvert de convergence et $\forall x\in]-1;1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1)x^{k-1}=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty}k(k+1)x^k=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$. Ainsi, $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}k(k+1)p^2(1-p)^k=p^2\sum_{k=0}^{+\infty}k(k+1)(1-p)^k=\dfrac{2p^2(1-p)}{(1-(1-p))^3}$ car $1-p\in]0;1[$ et on a l'espérance attendue, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{2(1-p)}{p}$.

c. On suppose que la boule piochée dans l'urne l'est de manière uniforme. On a $Y(\Omega)=\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ en convenant que $Y=+\infty$ si $X=+\infty$. Comme on a vu que $(X=+\infty)$ est négligeable, $(Y=+\infty)=(X=+\infty)$ l'est aussi. Pour $k\in\mathbb{N}$, comme $\big((X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'évènements, par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=k|X=n)$. Or $\mathbb{P}(Y=k|X=n)=0$ si $k>n$ et $\mathbb{P}(Y=k|X=n)=\dfrac{1}{n+1}$ si $k\leqslant n$ donc $\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\dfrac{(n+1)p^2(1-p)^n}{n+1}=p^2\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^n=\dfrac{p^2(1-p)^k}{1-(1-p)}$ (série géométrique) donc $\mathbb{P}(Y=k)=p(1-p)^k$.

d. Comme $(Y+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ et que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y+1=k)=\mathbb{P}(Y=k-1)=p(1-p)^{k-1}$, la variable aléatoire $Y+1$ suit (presque sûrement) la loi géométrique de paramètre p. On sait d'après le cours que $\mathbb{E}(Y+1)=\mathbb{E}(Y)+1=\dfrac{1}{p}$ et que $\mathbb{V}(Y+1)=\mathbb{V}(Y)=\dfrac{1-p}{p^2}$. Ainsi, $\mathbb{E}(Y)=\dfrac{1-p}{p}$ et $\mathbb{V}(Y)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

114 Comme $\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{X_k(\omega)}{k}$ est une série à termes positifs pour $\omega\in\Omega$, elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Ainsi, en discrétisant les majorants $M\in\mathbb{N}^*$, on a l'expression $A=\bigcup_{M=1}^{+\infty}A_M$ où $A_M=\Big\{\omega\in\Omega\ \Big|\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{X_k(\omega)}{k}\leqslant M\Big\}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n$ avec $B_n=(S_n\leqslant M)$.

Soit $M\in\mathbb{N}^*$, comme la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $\omega\in\Omega$, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion car $B_{n+1}\subset B_n$ puisque si $S_{n+1}(\omega)\leqslant M$, alors $S_n(\omega)\leqslant S_{n+1}(\omega)\leqslant M$. Par le théorème de continuité décroissante, on a donc $\mathbb{P}(A_M) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(X_k)}{k} = pH_n$ en posant $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle de la série harmonique. Par indépendance de $X_1, \cdots, X_n$, $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{V}(X_k)}{k^2} = p(1-p)T_n$ en posant $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ la somme partielle de la série de RIEMANN $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ qui converge et dont la somme est $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Comme S_n admet un moment d'ordre 2, d'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, pour tout $\varepsilon > 0$, on a la majoration $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n - pH_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{p(1-p)T_n}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{p(1-p)\pi^2}{6\varepsilon^2}$.

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, puisque $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $pH_n > M$. Pour tout $n \geqslant n_0$, comme $M < pH_n$, on a $(S_n \leqslant M) \subset (|S_n - pH_n)| \geqslant pH_n - M)$ donc, en posant $\varepsilon = pH_n - M > 0$ dans la majoration précédente, on obtient $0 \leqslant \mathbb{P}(S_n \leqslant M) \leqslant \frac{p(1-p)\pi^2}{6\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)\pi^2}{6(pH_n - M)^2}$. Par encadrement, comme $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant M) = 0$ donc $\mathbb{P}(A_M) = 0$.

<u>Méthode 1</u> : par sous-additivité, comme $A = \bigcup_{M=1}^{+\infty} A_M$, on a $\mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{M=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_M) = 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 0$.

<u>Méthode 2</u> : Pour $M \in \mathbb{N}^*$, si la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par M, elle est a fortiori majorée par $M+1$ donc $A_M \subset A_{M+1}$. Ainsi, la suite d'évènements $(A_M)_{M\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion donc, par continuité croissante, on a $\mathbb{P}(A) = \lim_{M\to+\infty} \mathbb{P}(A_M) = 0$.

115 On note qu'ici $\lambda_n \geqslant 0$ contrairement à ce qu'on a vu en cours où on a imposé que le paramètre d'une variable aléatoire suivant une loi de POISSON soit strictement positif. Il est donc possible, si $\lambda_n = 0$, que X_n soit presque sûrement nulle car alors on a $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{e^{-0}0^0}{0!} = 1$ et $\forall k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{e^{-0}0^k}{k!} = 0$.

On a $(S = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (X_n = 0)$ car les X_n sont à valeurs positives. Comme $(S = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0) \Big)$ et que la suite $\Big(I_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0) \Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, par théorème de continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(S = 0) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(I_n)$. Par indépendance des X_k, $\mathbb{P}(I_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 0) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k} = e^{-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$.

On a donc deux cas :

- Si $\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n$ converge, on a $\mathbb{P}(S = 0) = \exp\Big(-\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \Big) > 0$.
- Si $\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n$ diverge, on a $\mathbb{P}(S = 0) = 0$.

Dans le cas général, pour $p \in \mathbb{N}$, en posant les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on constate que la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $\omega \in \Omega$ et que $(S \leqslant p) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \leqslant p)$. Or $\big((S_n \leqslant p)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion donc, par le théorème de continuité décroissante, $\mathbb{P}(S \leqslant p) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant p)$.

On a vu dans le cours que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de POISSON de paramètres respectifs λ et μ, alors $X + Y$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda + \mu$.

<u>Initialisation</u> : X_1 suit la loi de POISSON de paramètre λ_1 par hypothèse et, avec ce qui précède, $X_1 + X_2$ suit

la loi de POISSON de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que la variable aléatoire S_n suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. Comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions, $S_n + X_{n+1} = S_{n+1}$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda + \lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi de POISSON de paramètre $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(S_n \leqslant p) = \bigsqcup_{i=0}^{p} (S_n = i)$ donc $\mathbb{P}(S_n \leqslant p) = \sum_{i=0}^{p} \mathbb{P}(S_n = i) = \sum_{i=0}^{p} \dfrac{\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^i}{i!}$ (1).
Traitons deux cas :

- Si $\sum_{k \geqslant 1} \lambda_k$ converge, en notant $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \in \mathbb{R}_+$, par continuité de $t \mapsto e^t$ et de $t \mapsto t^i$ pour $i \in [\![0;p]\!]$ en S, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1), on obtient $\mathbb{P}(S \leqslant p) = \sum_{i=0}^{p} \dfrac{e^{-S}S^i}{i!}$.
- Si $\sum_{k \geqslant 1} \lambda_k$ diverge, comme $\lim_{t \to +\infty} e^{-t}t^i = 1$ si $i = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} e^{-t}t^i = 0$ si $i \geqslant 1$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1), on obtient $\mathbb{P}(S \leqslant p) = 1$.

Pour avoir la loi de S, on écrit $(S = 0) = (S \leqslant 0)$ et, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $(S \leqslant p) = (S = p) \sqcup (S \leqslant p - 1)$ de sorte que, en traitant à nouveau deux cas :

- Si $\sum_{k \geqslant 1} \lambda_k$ converge, $\mathbb{P}(S = 0) = e^{-S}$ et $\mathbb{P}(S = p) = \sum_{i=0}^{p} \dfrac{e^{-S}S^i}{i!} - \sum_{i=0}^{p-1} \dfrac{e^{-S}S^i}{i!} = \dfrac{e^{-S}S^p}{p!}$ si $p \in \mathbb{N}^*$.
- Si $\sum_{k \geqslant 1} \lambda_k$ diverge, $\mathbb{P}(S = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(S = p) = 1 - 1 = 0$ si $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans les deux cas, S suit la loi de POISSON de paramètre $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$.

116 corrigé en TD et pas encore écrit

117 pas fait

118 **a.** Pour que l'on ait $S_k = 0$, il est nécessaire et suffisant qu'il y ait k indices $i \in [\![1;2k]\!]$ tels que $X_i = 1$ (considérés comme des réussites) et que les k autres indices $i \in [\![1;2k]\!]$ vérifient $X_i = -1$ (échecs). Ce schéma binomial se traduit par le fait que $p(k) = \mathbb{P}(S_k = 0) = \binom{2k}{k} p^k(1-p)^k$.

Avec l'équivalent de STIRLING, $p(k) = \dfrac{(2k)!}{(k!)^2} p^k(1-p)^k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi k}(2k)^{2k}e^{2k}}{e^{2k}(2\pi k)k^{2k}} p^k(1-p)^k = \dfrac{(4p(1-p))^k}{\sqrt{\pi k}}$.

b. Notons R le nombre de retours à l'origine, c'est-à-dire $R = \text{card}\left(\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k = 0\right\}\right) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On revient une infinité de fois à l'origine si et seulement si, pour chaque entier $i \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $j > i$ pour lequel $S_j = 0$. Ceci se traduit par $(R = +\infty) = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{j=i+1}^{+\infty} (S_j = 0) \right)$. Comme la suite d'évènements $\left(A_i = \bigcup_{j=i+1}^{+\infty} (S_j = 0)\right)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, par le théorème de continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(R = +\infty) = \lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Or, par sous-additivité, on a $\mathbb{P}(A_i) \leqslant \sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_j = 0)$.

Comme $p \neq \frac{1}{2}$ dans cette question, $4p(1-p) < 1$ car $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$ donc, avec la question précédente, $p(j) = \mathbb{P}(S_j = 0) \underset{+\infty}{=} o((4p(1-p))^j)$ et la série géométrique $\sum_{j \geqslant 1} (4p(1-p))^j$ converge donc, par comparaison, la série $\sum_{j \geqslant 1} \mathbb{P}(S_j = 0)$ converge. En notant $R_i = \sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_j = 0)$ son reste d'ordre i, on a donc $0 \leqslant \mathbb{P}(A_i) \leqslant R_i$ donc, par encadrement, $\lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$ et $\mathbb{P}(R = +\infty) = 0$.

119 **a.** Si p est injective, pour $x \in E$, $p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x)$ donc $p(x) = x$ par injectivité de p donc $p = \mathrm{id}_E$.

b. Si p est surjective, soit $x \in E$, $\exists a \in E,\ x = p(a)$ d'où $p(x) = p(p(a)) = p \circ p(a) = p(a) = x$ donc $p = \mathrm{id}_E$.

c. Si $E = \{a, b\}$ est de cardinal 2 avec $a \neq b$, soit $p : E \to E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$. On a bien $p(p(a)) = p(b) = p = p(a)$ et $p(p(b)) = p(b)$ donc $p \circ p = p$ et p est idempotente alors que $p \neq \mathrm{id}_E$.

d. Si $E = \{a, b\}$ est de cardinal 2 avec $a \neq b$, parmi les $4 = 2^2$ applications de E dans E, seule $f : E \to E$ telle que $f(a) = b$ et $f(b) = a$ n'est pas idempotente, les trois autres le sont, c'est-à-dire

- $p : E \to E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$ et
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = a$ et
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$.

e. Si $E = \{a, b, c\}$ est de cardinal 3 avec $a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$, parmi les $27 = 3^3$ applications de E dans E, les 10 qui sont idempotentes sont les applications suivantes :

- $p : E \to E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = a$ et $p(c) = a$ avec $p(E) = \{a\}$.
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$ et $p(c) = b$ avec $p(E) = \{b\}$.
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = c$ et $p(b) = c$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{c\}$.
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$ et $p(c) = a$ avec $p(E) = \{a, b\}$.
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$ et $p(c) = b$ avec $p(E) = \{a, b\}$.
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = a$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{a, c\}$.
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = c$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{a, c\}$.
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{b, c\}$.
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = c$ et $p(b) = b$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{b, c\}$.
- $p : E \to E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{a, b, c\}$.

f. ($\Longrightarrow$) Si l'application $p : E \to E$ est idempotente, soit $x \in p(E)$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = p(a)$, alors $p(x) = p(p(a)) = p \circ p(a) = p(a) = x$ donc x est un point fixe de p.

($\Longleftarrow$) Si $\forall x \in p(E),\ p(x) = x$, soit $y \in E$, comme $p(y) \in (E)$, on a $p(p(y)) = p(y)$ par hypothèse donc $p \circ p = p$ et l'application p est idempotente.

Par double implication, si $p : E \to E$, on a p idempotente si et seulement si $(\forall x \in p(E),\ p(x) = x)$.

g. Le nombre d'applications idempotentes d'un ensemble de cardinal n ne dépend que de ce cardinal, et pas de l'ensemble lui-même. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le cardinal de E (car E est non vide), $I_n = \{p : E \to E \mid p \text{ idempotente}\}$ et, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $I_{n,k} = \{p : E \to E \mid p \text{ idempotente et } \mathrm{card}\,(p(E)) = k\}$. Ainsi, $I_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} I_{n,k}$ car le cardinal de l'image de E par p idempotente est forcément un entier de $[\![1;n]\!]$. Comme cette réunion est disjointe, en notant $a_n = \text{card}(I_n)$ et $a_{n,k} = \text{card}(I_{n,k})$, on a $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k}$.

Protocole de choix pour les éléments p de $I_{n,k}$ avec la question précédente :

- On choisit les k éléments de $p(E)$: il y a $\binom{n}{k}$ choix.
- Pour les k éléments x de $p(E)$, on a $p(x) = x$ d'après **f.** : 1 seul choix.
- Les $n-k$ autres éléments ont pour image un des éléments de $p(E)$: k^{n-k} choix.

Ainsi, par indépendance de ces nombres de choix, on a $a_{n,k} = \binom{n}{k} k^{n-k}$.

Par conséquent, le nombre d'applications idempotentes d'un ensemble de cardinal n est $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$.

On vérifie bien que $a_2 = \binom{2}{1}1^1 + \binom{2}{2}2^0 = 3$ (voir **d.**) et $a_3 = \binom{3}{1}1^2 + \binom{3}{2}2^1 + \binom{3}{3}3^0 = 10$ (voir **e.**).

120 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $B_k =$ "on tire une boule blanche au tirage k". Il n'y a pas indépendance des tirages puisque si on tire une boule blanche, on arrête le jeu.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $(Y = n) = \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n$ et, d'après la formule des probabilités composées, on a $\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \times \mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(B_n|\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}})$ ce qui donne, avec les règles des tirages, $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} \times \cdots \times \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n}{(n+1)!}$.

Comme $\overline{(Y = 0)} = \bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} (Y = n)$ d'après l'énoncé, par σ-additivité, on a $1 - \mathbb{P}(Y = 0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$ donc $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!} = 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!} = 1 - (e-1) + (e-1-1) = 0$ et l'évènement $(Y = 0) =$ "jamais de boule blanche" est négligeable.

D'après le cours, Y admet une espérance finie si et seulement si la série $(n\,\mathbb{P}(Y = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, ce qui revient à la convergence (tout est positif) de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n^2}{(n+1)!}$. Or $\dfrac{n^2}{(n+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n-1)!}$ et la série exponentielle $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{(n-1)!}$ converge. Ainsi, Y admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)!}$ donc $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n(n+1)-(n+1)+1}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-1)!} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!} e - (e-1) + (e-1-1) = e - 1 \sim 1,72$.

121 **a.** On connaît le développement en série entière géométrique de rayon $R = 1$: $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} x^m$.

b. Soit un entier $d \in \mathbb{N}^*$, on peut dériver terme à terme $d-1$ fois le développement de la question précédente. Une récurrence simple montre que $\forall d \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-1;1[$, $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(d)} = \dfrac{d!}{(1-x)^{d+1}}$. Ainsi, avec $r = d-1$, on a $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(r-1)} = \dfrac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum\limits_{m=r-1}^{+\infty} \dfrac{m!}{(m-r+1)!} x^{m-(r-1)} = \left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} x^m\right)^{(r-1)}$.

c. Pour $x \in]-1;1[$ et $r \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(1-x)^r} = \sum\limits_{m=r-1}^{+\infty} \dfrac{m!}{(r-1)!(m-r+1)!} x^{m-(r-1)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+r-1)!}{(r-1)!n!} x^r$ en posant $n = m - r + 1$ donc $\dfrac{1}{(1-x)^r} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r-1}{n} x^n$. En prenant $x = p \in]-1;1[$ dans cette relation, on obtient donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r-1}{n} p^n = \dfrac{1}{q^r}$, c'est-à-dire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ car $\binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$ alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$. Par conséquent, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité.

d. La série génératrice de X est de rayon $R \geqslant 1$ d'après le cours et $\forall t \in]-R;R[$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$ donc $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = q^r \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r-1}{r-1}(pt)^n$. On a donc $R = \dfrac{1}{p}$ puisque le rayon de $\sum_{n\geqslant 0}\binom{n+r-1}{r-1}t^n$ vaut 1 d'après la question **b.**. Ainsi, $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p};\dfrac{1}{p}\right[$, $G_X(t) = \dfrac{q^r}{(1-pt)^r}$.

e. Comme $R > 1$, G_X est dérivable deux fois en 1 donc, d'après le cours, X admet un moment d'ordre 2 donc une espérance et une variance finies et que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1)$. Or $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p};\dfrac{1}{p}\right[$, $G'_X(t) = \dfrac{rpq^r}{(1-pt)^{r+1}}$ et $G''_X(t) = \dfrac{r(r+1)p^2q^r}{(1-pt)^{r+2}}$, d'où $\mathbb{E}(X) = \dfrac{rpq^r}{(1-p)^{r+1}} = \dfrac{rp}{q}$ et $\mathbb{V}(X) + \dfrac{r^2p^2}{q^2} - \dfrac{rp}{q} = \dfrac{r(r+1)p^2}{q^2}$ donc $\mathbb{V}(X) = \dfrac{r(r+1)p^2 - r^2p^2 + rp(1-p)}{q^2} = \dfrac{rp}{q^2}$.

122 **a.** On note T_k le numéro de la boule tirée au tirage k. On admet l'existence d'un espace probabilisé qui supporte cette suite $(T_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes (remarque du cours). D'abord $X_n(\Omega) = (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$ car on rajoute la possibilité de ne jamais avoir une autre boule que la première tirée, qu'on note $X_n = +\infty$. De plus, $(X_n = +\infty) = \bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{(X_n = k)}$ par convention et $(X_n = k) = \bigcup_{i=1}^{n} \Big((T_1 = i) \cap \cdots \cap (T_{k-1} = i) \cap (T_k \neq i)\Big) \in \mathcal{A}$ pour $k \geqslant 2$ donc X_n est une variable aléatoire car les T_i le sont. Par incompatibilité de ces n évènements, indépendance mutuelle des T_k qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \dfrac{n-1}{n^{k-1}}$ pour $k \geqslant 2$.

On vérifie la cohérence de ces résultats car $\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{n-1}{n^{k-1}} = \dfrac{n-1}{n}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^j = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{1}{1-(1/n)} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(X_n = +\infty)$ (toujours la même boule) est négligeable comme attendu.

b. $k\,\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ et $\sum_{k\geqslant 2} \dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ converge car le rayon de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} kx^{k-1}$ est égal à 1 et que $\left|\dfrac{1}{n}\right| < 1$. De plus, comme $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$, on obtient en dérivant $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ donc $\sum_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2} - 1$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = (n-1) \times \left(\dfrac{n^2}{(n-1)^2} - 1\right) = \dfrac{2n-1}{n-1}$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 2$ ce qu'on subodorait car plus n augmente, plus l'évènement $(X_n = 2)$ devient presque sûr.
Comme $(X_n - 1)(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et que $\forall k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X_n - 1 = k) = \mathbb{P}(X_n = k+1) = \dfrac{n-1}{n^k}$ qui s'écrit aussi $\mathbb{P}(X_n - 1 = k) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \left(1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)^{k-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ avec $p = 1 - \dfrac{1}{n} \in]0;1[$, la variable aléatoire $X_n - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{n-1}{n}$ ce qui simplifie les calculs car alors $\mathbb{E}(X_n - 1) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{n}{n-1}$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{n}{n-1} = \dfrac{2n-1}{n-1}$.

c. Comme $X_2 = Y_2$, pour $k \geqslant 2$, on a $(Y_2 = k) = (X_2 = k)$ donc $\mathbb{P}(Y_2 = k) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ d'après **a.**. On reconnaît cette loi, $Y_2 - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car $\mathbb{P}(Y_2 - 1 = k) = \mathbb{P}(Y_2 = k+1) = \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

d. Pour $k \geqslant 3$, en notant i le numéro de la première boule tirée, r le premier rang pour lequel on tire une boule de numéro $j \neq i$, comme $6-i-j$ est le numéro tiré autre que i et j (car $i+j+(6-i-j) = 1+2+3 = 6$), on a $(Y_3=k)=\displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{3}\bigsqcup_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{3}\bigsqcup_{r=2}^{k-1}\left(\Big(\bigcap_{a=1}^{r-1}(T_a=i)\Big)\cap(T_r=j)\cap\Big(\bigcap_{b=r+1}^{k-1}((T_k=i)\cup(T_k=j))\Big)\right)\cap(T_k=6-i-j)$.

Ainsi, par incompatibilité de tous ces évènements, indépendance mutuelle des tirages et symétrie entre les numéros, $\mathbb{P}(Y_3=k)=3\times 2\times\displaystyle\sum_{r=2}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{r-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-r-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{3^k}\sum_{r=2}^{k-1}2^{k-r-1}=\frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}$.

À nouveau, comme $Y_3(\Omega)=\{3,4,5,\cdots,+\infty\}$, on vérifie que $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\mathbb{P}(Y_3=k)=\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}=1$. En effet, on a $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}=(6/4)\frac{(2/3)^3}{1-(2/3)}-6\frac{(1/3)^3}{1-(1/3)}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$. Ceci justifie que l'évènement $(Y_3=+\infty)$ (maximum deux numéros tirés éternellement) est négligeable comme attendu.

123 **a.** Par définition, comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, sous réserve de convergence, on a $G_X(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)t^n$. Or, pour $t\in\mathbb{R}$, la suite $\big(\mathbb{P}(X=n)t^n\big)_{n\geqslant 0}=\left(\dfrac{e^{-\lambda}(\lambda t)^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée par croissances comparées. Ainsi, le rayon de convergence de la série génératrice $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(X=n)t^n$ vaut $R=+\infty$ et on a $\forall t\in\mathbb{R},\ G_X(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}(\lambda t)^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\lambda t}=e^{\lambda(t-1)}$.

b. Soit $a>0$ et $t\geqslant 1$, comme $(X\geqslant a)=\displaystyle\bigsqcup_{k\geqslant a}(X=k)$, par σ-additivité, et car $t\geqslant 1$ donc $\forall k\geqslant a,\ t^a\leqslant t^k$, on a $\mathbb{P}(X\geqslant a)=\displaystyle\sum_{k\geqslant a}\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{t^a}\sum_{k\geqslant a}t^a\,\mathbb{P}(X=k)\leqslant\frac{1}{t^a}\sum_{k\geqslant a}t^k\,\mathbb{P}(X=k)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\dfrac{G_X(t)}{t^a}$ car $G_X(t)=\Big(\displaystyle\sum_{k<a}\mathbb{P}(X=k)t^k\Big)+\Big(\sum_{k\geqslant a}\mathbb{P}(X=k)t^k\Big)$ et que $\displaystyle\sum_{k<a}\mathbb{P}(X=k)t^k\geqslant 0$.

c. D'après les questions précédentes, en prenant $a=2\lambda>0$, $\mathbb{P}(X\geqslant 2\lambda)\leqslant\dfrac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}}=e^{\lambda(t-1)-2\lambda\ln(t)}$ pour tout $t\geqslant 1$. Soit $f:[1;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\lambda(t-1)-2\lambda\ln(t)$, alors f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(t)=\lambda-\dfrac{2\lambda}{t}=\dfrac{\lambda(t-2)}{t}$ donc f est décroissante sur $[1;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$ et elle atteint son minimum en $t=2$. En prenant $t=2$ dans la question **b.**, on a donc $\mathbb{P}(X\geqslant 2\lambda)\leqslant e^{f(2)}=e^{\lambda-2\lambda\ln(2)}=\left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

124 **a.** Soit B_k = "on tire une boule blanche ou tirage k" et $N_k=\overline{B_k}$ = "on tire une boule blanche ou tirage k".
Cas $r=1$: il y a $N-1$ boules blanches et une seule boule noire dans l'urne. On a $X_N(\Omega)=[\![1;N]\!]$ dans ce cas et, pour $k\in[\![1;N]\!]$, on a $(X_N=k)=\Big(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1}B_i\Big)\cap N_k$ donc, avec la formule des probabilités composées en tenant compte de la composition de l'urne à chaque étape, $\mathbb{P}(X_N=k)=\mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}(B_2|B_1)\times\cdots\times\mathbb{P}\Big(N_k\Big|\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1}B_i\Big)$ donc $\mathbb{P}(X_N=k)=\Big(\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}\frac{N-i}{N-i+1}\Big)\times\frac{1}{N-k+1}=\frac{1}{N}$ après télescopage. Ainsi, X_N suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$ et on a $\mathbb{E}(X_N)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}k\,\mathbb{P}(X_N=k)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k=\frac{N(N+1)}{2N}=\frac{N+1}{2}$.
Cas $r=N$: il n'y a que des boules noires dans l'urne : $X_N=N$ est certain, $X_N(\Omega)=\{N\}$ et $\mathbb{E}(X_N)=N$.

b. On peut modéliser cette expérience par des N-uplets comme $BNNBBNN\cdots BN$, celui-ci signifiant que la première boule tirée est Blanche, les deux suivantes Noires, etc..... sachant qu'il doit impérativement y avoir $N-r$ fois B et r fois N dans cette suite de lettres : en d'autres termes l' "évènement" $BNNBBNN\cdots BN$ est égal à $B_1\cap N_2\cap N_3\cap B_4\cap B_5\cap N_6\cap N_7\cap\cdots\cap B_{N-1}\cap N_N$. On note Ω l'ensemble des tous ces N-uplets, il y en a $\binom{N}{r}$ car il faut choisir les r tirages qui vont donner une boule noire parmi les N tirages. On prend aussi la tribu pleine $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme (par symétrie) sur Ω. On a $X_N(\Omega) = [\![r; N]\!]$ car il faut au moins r tirages pour prendre toutes les boules noires et au plus N.

Soit $k \in [\![r; N]\!]$, alors $\mathbb{P}(X_N = k) = \dfrac{\text{card}\,((X_N = k))}{\text{card}\,(\Omega)}$ (loi uniforme sur Ω). Or on a $\text{card}\,(\Omega) = \binom{N}{r}$ et $\text{card}\,((X = k)) = \binom{r-1}{k-1}$ car il faut forcément tirer une boule noire au tirage k, des blanches à tous les tirages suivants et il faut choisir parmi les $r-1$ premiers tirages les $k-1$ tirages qui donnent une boule noire. Ainsi $\mathbb{P}(X_N = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} = \dfrac{(k-1)!(N-r)!r!}{(r-1)!(k-r)!N!} = \dfrac{r(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

Autre méthode : pour $k \in [\![r; N]\!] = X_N(\Omega)$, on pouvait aussi décrire, avec la définition de X_N, l'évènement $(X_N = k)$ par $(X_N = k) = \bigsqcup_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{r-1} \leqslant k-1} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{r-1} N_j \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{p \in [\![1;k-1]\!] \\ p \notin \{i_1, \cdots, i_{r-1}\}}} B_p \right) \right) \cap N_k \cap \left(\bigcap_{m=k+1}^{N} B_m \right)$, ce qui fait une réunion de $\binom{k-1}{r-1}$ évènements incompatibles car il faut choisir les $r-1$ entiers $i_1, \cdots, i_{r-1}$ parmi les $k-1$ entiers de $[\![1; k-1]\!]$. Le premier (dans l'ordre lexicographique par exemple) de ces évènements est $U = \left(\bigcap_{j=1}^{r-1} N_j \right) \cap \left(\bigcap_{p=r}^{k-1} B_p \right) \cap N_k \cap \left(\bigcap_{m=k+1}^{N} B_m \right)$ et le dernier $V = \left(\left(\bigcap_{p=1}^{k-r} B_p \right) \cap \bigcap_{j=k-r+1}^{k-1} N_j \right) \cap N_k \cap \left(\bigcap_{m=k+1}^{N} B_m \right)$.
Pour le premier de ces deux évènements, avec la formule des probabilités composées, on obtient la relation $\mathbb{P}(U) = \left(\prod_{j=1}^{r-1} \dfrac{r-j+1}{N-j+1} \right) \times \left(\prod_{p=r}^{k-1} \dfrac{N-p}{N-p+1} \right) \times \dfrac{1}{N-k+1} \times \left(\prod_{m=k+1}^{N} \dfrac{N-m+1}{N-m+1} \right) = \dfrac{r!(N-r)!}{N!}$. Pour le second, $\mathbb{P}(V) = \left(\prod_{p=1}^{k-r} \dfrac{N-r-p+1}{N-p+1} \right) \times \left(\prod_{j=k-r+1}^{k-1} \dfrac{k-j+1}{N-j+1} \right) \times \dfrac{1}{N-k+1} \times \left(\prod_{m=k+1}^{N} \dfrac{N-m+1}{N-m+1} \right) = \dfrac{r!(N-r)!}{N!}$. On se rend compte que pour chacun des évènements dont $(X_N = k)$ est la réunion incompatible, on va avoir les mêmes dénominateurs allant en décroissant de N à 1 et les mêmes numérateurs mais pas dans le même ordre. Comme tous ces évènements ont pour probabilité $\dfrac{r!(N-r)!}{N!}$ et qu'ils sont au nombre de $\binom{k-1}{r-1}$, il vient $\mathbb{P}(X_N = k) = \binom{k-1}{r-1} \times \dfrac{r!(N-r)!}{N!} = \dfrac{r(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

c. Par définition, $\mathbb{E}(X_N) = \sum_{k=r}^{N} k\,\mathbb{P}(X_N = k) = \dfrac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} k \binom{k-1}{r-1} = \dfrac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} r \binom{k}{r}$ avec la formule du capitaine, ce qui se simplifie avec la formule des colonnes en $\mathbb{E}(X_N) = \dfrac{r\binom{N+1}{r+1}}{\binom{N}{r}} = \dfrac{r(N+1)}{r+1} < N$ comme il se doit. La formule est aussi valable pour les cas limites $r = 1$ et $r = N$ de la question **a.**.

125 **a.** Comme S est symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles par le théorème spectral. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_S(\lambda) = (\lambda - X)^2 - Y^2 = (\lambda - X + Y)(\lambda - X - Y)$ donc $\text{Sp}(S) = \{X - Y, X + Y\}$ donc, puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ par définition donc $Y > 0$, il vient $\lambda = X - Y$ et $\mu = X + Y$.

b. S est inversible si et seulement si $\det(S) = X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y) = 0$ donc, puisque $X + Y > 0$, S

est inversible si et seulement si $X \neq Y$. Ainsi, $(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = (X = Y) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X = k, Y = k)$ et, puisque ces évènements sont incompatibles et que X et Y sont indépendants et de même loi, par σ-additivité et car $|1-p| < 1$, on a $\mathbb{P}(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^j = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2}$ simplifié en $\mathbb{P}(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = \dfrac{p}{2-p}$. Ainsi, $\mathbb{P}(S \in GL_2(\mathbb{N}^*)) = 1 - \mathbb{P}(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = 1 - \dfrac{p}{2-p} = \dfrac{2(1-p)}{2-p}$.

c. On sait d'après le cours que S, étant déjà symétrique réelle, est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives donc $(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = (\lambda > 0) = (X > Y) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X > k, Y = k)$ car on a toujours $\mu > 0$. À nouveau, par incompatibilité de ces évènements et indépendance de X et Y, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k)\,\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}(1-p)^k$ qui se calcule comme à la question précédente, $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^{k-1} = \dfrac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \dfrac{1-p}{2-p}$.

Il est logique de trouver $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(S \in GL_2(\mathbb{N}^*))$ car $(\lambda < 0)$ et $(\lambda > 0)$ sont deux évènements de même probabilité par symétrie entre X et Y.

126 On note X le résultat du dé lancé par le joueur 1 et Y celui du dé lancé par le joueur 2. Soit A et B les évènements $A =$ "le joueur 1 gagne". On suppose que, pour le dé noir, les autres faces à part 6 sont équiprobables, de sorte qu'elles apparaissent avec une probabilité $\dfrac{1}{5}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{15}$.

Stratégie 1 : le joueur 1 lance le dé blanc, alors $A = (X \geqslant Y) = \bigsqcup_{i=1}^{6} (X = i, Y \leqslant i)$ donc, par incompatibilité de ces évènements et, puisque X correspond au dé blanc et Y au dé noir, que les deux dés sont supposées indépendants, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y \leqslant i) = \mathbb{P}(X = 6) + \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y \leqslant i)$ en mettant à part le cas $X = 6$ où le joueur 1 gagne quel que soit le résultat du dé noir, et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{5} \dfrac{2i}{15} = \dfrac{1}{2}$.

Stratégie 2 : le joueur 1 lance le dé noir, alors $A = (X > Y) = \bigsqcup_{i=1}^{6} (X = i, Y < i)$ donc, par incompatibilité de ces évènements et, puisque X correspond au dé noir et Y au dé blanc, que les deux dés sont supposées indépendants, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=2}^{6} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y < i) = \sum_{i=2}^{6} \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2(i-1)}{15}$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi, la meilleure stratégie pour le joueur 1 est de lancer le dé blanc car $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$.

PRÉPARATION ORAUX 2025 THÈME 9 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

127 **a.** Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, cette équation différentielle linéaire normalisée d'ordre 2 vérifie les hypothèses du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Pour tout $(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$. Ainsi, en prenant $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $y_0' = 1$, il existe une unique solution $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E) telle que $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$. De même, en prenant $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $y_0' = 0$, il existe une unique solution $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E) telle que $y_2(0) = 1$ et $y_2'(0) = 0$. En notant S l'ensemble des solutions réelles de (E) définies sur $\mathbb{R}$, on a vu dans le cours que S est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que l'application $\theta : S \to \mathbb{R}^2$ définie par $\theta(y) = \big(y(0), y'(0)\big)$ est linéaire et bijective d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Ainsi, $\dim(S) = 2$ car θ est un isomorphisme de S dans $\mathbb{R}^2$. Si $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \ \ (R)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, en évaluant (R) et sa dérivée en 0, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc (y_1, y_2) est libre. Par conséquent, (y_1, y_2) est une base de S et on a donc $S = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$.

b. Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, g l'est aussi par opérations. De plus, pour tout réel x, on a $g'(x) = f'(x + 2\pi)$ et $g''(x) = f''(x + 2\pi)$ donc, comme φ est 2π-périodique, on obtient la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + \varphi(x)g(x) = f''(x + 2\pi) + \varphi(x + 2\pi)f(x + 2\pi) = 0$ car $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Ainsi, g est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

c. On vient de montrer que ψ envoie toute fonction $f \in S$ sur $\psi(f) = g \in S$. La linéarité de ψ est claire donc ψ est un endomorphisme de S. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\psi)$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x + 2\pi) = 0$ donc, comme $x \mapsto x + 2\pi = y$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il vient $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = 0$ donc $f = 0$. Ainsi, ψ est injective, et comme S est de dimension finie, ψ est un automorphisme de S.

d. La fonction $z_1 = \psi(y_1) : x \mapsto y_1(x + 2\pi)$ appartient à S d'après la question précédente et $z_1(0) = y_1(2\pi)$ et $z_1'(0) = y_1'(2\pi)$ donc $\theta(z_1) = (y_1(2\pi), y_1'(2\pi)) = y_1(2\pi)(1, 0) + y_1'(2\pi)(0, 1) = y_1(2\pi)\theta(y_2) + y_1'(2\pi)\theta(y_1)$ ce qui montre, par linéarité et bijectivité de θ, que $z_1 = y_1'(2\pi)y_1 + y_1(2\pi)y_2$. De même, on obtient la relation $z_2 = \psi(y_2) = y_2'(2\pi)y_1 + y_2(2\pi)y_2$ car ces deux fonctions sont solutions de (E) avec les mêmes conditions initiales. Par conséquent, la matrice de ψ dans la base (y_1, y_2) de S est $A = \begin{pmatrix} y_1'(2\pi) & y_2'(2\pi) \\ y_1(2\pi) & y_2(2\pi) \end{pmatrix}$.
Comme $\chi_A = \chi_\psi = \begin{vmatrix} X - y_1'(2\pi) & -y_2'(2\pi) \\ -y_1(2\pi) & X - y_2(2\pi) \end{vmatrix} = X^2 - \big(y_1'(2\pi) + y_2(2\pi)\big)X + \big(y_1'(2\pi)y_2(2\pi) - y_2'(2\pi)y_1(2\pi)\big)$, les valeurs propres de ψ sont les racines de χ_A. Ainsi, si λ est une valeur propre de ψ, λ est solution de l'équation polynomiale $(P)\ :\ x^2 - \big(y_1'(2\pi) + y_2(2\pi)\big)x + \big(y_1'(2\pi)y_2(2\pi) - y_2'(2\pi)y_1(2\pi)\big) = 0$.

128 corrigé en TD et pas encore rédigé

129 **a.** La surface S est définie implicitement par $S\ :\ F(x, y, z) = 0$ avec $F(x, y, z) = f(x, y) - z = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - z$. La fonction f est de classe C^1 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et, de même, F est de classe C^1 par opérations sur

$(\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R}$. Comme $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = \left(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}, -1\right) \neq (0,0,0)$, la surface S n'admet que des points réguliers donc $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0$ est une équation du plan tangent P à S en $(a,b,c) \in S$. Ceci se simplifie en $P\ :\ \left(b - \frac{1}{a^2}\right)(x-a) + \left(a - \frac{1}{b^2}\right)(y-b) - (z-c) = 0$.

b. Comme la fonction f est de classe C^1 l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, si elle admet en un point $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ un extremum local, c'est forcément en un point critique de f d'après le cours. Or, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $\nabla f(x,y) = \left(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}\right) = (0,0) \iff (yx^2 = xy^2 = 1)$. Or si $yx^2 = xy^2 = 1$, on a $\frac{yx^2}{xy^2} = \frac{x}{y} = 1$ donc $x = y$ et $x^3 = 1$ impose $x = 1$ donc $y = 1$. Comme réciproquement, si $x = y = 1$, on a bien $\nabla f(x,y) = (0,0)$, le seul point critique de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est $(1,1)$.

Or $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = t$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = 1$ donc la hessienne de f en $(1,1)$ est la matrice $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et elle est symétrique (normal avec le théorème de Schwarz car f est de classe C^2 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$) et elle est définie positive car $\chi_H = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ donc $\text{Sp}(H) = \{1,3\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f admet en $(1,1)$ son unique extremum local et c'est un minimum local.

c. Soit $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n \leqslant 3$, $x_n \geqslant \frac{1}{3}$ et $y_n \geqslant \frac{1}{3}$ par définition de K donc, en passant à la limite dans ces inégalités larges, on a $xy \leqslant 3$, $x \geqslant \frac{1}{3}$ et $y \geqslant \frac{1}{3}$ donc $(x,y) \in K$. Ainsi, K est fermé. De plus, si $(x,y) \in K$, on a $x = \frac{xy}{y} \leqslant \frac{3}{1/3} = 9$ et $y = \frac{xy}{x} \leqslant \frac{3}{1/3} = 9$ donc K est borné.

d. Comme K est un fermé borné en dimension finie et que f est continue sur K, f admet un minimum absolu sur K par le théorème des bornes atteintes. Comme $(1,1) \in K$, $\underset{K}{\text{Min}}(f) \leqslant f(1,1) = 3$. Mais f est strictement supérieure à 3 sur la frontière de K. En effet, K est un sorte de triangle avec un bord hyperbolique :

- Si $(x,y) \in K$ vérifie $xy = 3$, on a $f(x,y) = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 3$.
- Si $(x,y) \in K$ vérifie $x = \frac{1}{3}$, on a $f(x,y) = xy + 3 + \frac{1}{y} > 3$.
- Si $(x,y) \in K$ vérifie $y = \frac{1}{3}$, on a $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + 3 > 3$.

Ainsi le minimum de f sur K est atteint à l'intérieur de K donc en un point critique or il n'en existe qu'un. Par conséquent, f atteint son minimum sur K en $(1,1)$ et $\underset{K}{\text{Min}}(f) = f(1,1) = 3$.

Maintenant, pour un point $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)2$, on a deux possibilités :

- Si $(x,y) \in K$, d'après ce qui précède, $f(xx,y) \geqslant \underset{K}{\text{Min}}(f) = f(1,1) = 3$.
- Si $(x,y) \notin K$, on a $f(x,y) > 3$ en distinguant selon que $xy > 3$ ou $x < \frac{1}{3}$ ou $y < \frac{1}{3}$.

Par conséquent, $\underset{(\mathbb{R}_+^*)^2}{\text{Min}}(f) = \underset{K}{\text{Min}}(f) = f(1,1) = 3$ et f admet un unique minimum absolu en $(1,1)$.

130 corrigé en TD et pas encore rédigé

131 **a.** H est borné car $\forall (x,y) \in H$, $||(x,y)||_\infty \leqslant 1$ par construction. De plus, si $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant x_n \leqslant 1$ (1), $0 \leqslant y_n \leqslant 1$ (2), $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ (passage par les coordonnées en dimension finie) donc, en passant à la limite dans les inégalités larges (1) et (2), on obtient $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ ce qui prouve que $(x,y) \in H$. Par caractérisation séquentielle d'un fermé, on en conclut que H est fermé. Or f est continue sur H par théorèmes généraux car $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall (x,y) \in H,\ y - yx^2 = y(1-x^2) \geqslant 0$. Ainsi, comme f est continue sur un fermé borné en dimension finie, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum et un maximum sur H et ces valeurs sont atteintes.

b. La partie O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car, par exemple, si $(x,y) \in O^2$, en posant $r = \mathrm{Min}(1-x, x+1, y, 1-y) > 0$, la boule ouverte de centre (x,y) et de rayon r est incluse dans O (faire un dessin). La fonction f est de classe C^1 sur O par théorèmes généraux car $\forall (x,y) \in O,\ y(1-x^2) > 0$ donc si f admet un extremum en $(x,y) \in O$, le point (x,y) est un point critique de f. De plus, en écrivant $f(x,y) = x(1-y)\sqrt{y}\sqrt{1-x^2}$, on a la relation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-y)\sqrt{y}\sqrt{1-x^2} + x(1-y)\sqrt{y}\Big(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\Big) = \frac{(1-2x^2)(1-y)\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2}}$ et, de même, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sqrt{y}\sqrt{1-x^2} + x(1-y)\Big(\frac{1}{2\sqrt{y}}\Big)\sqrt{1-x^2} = \frac{x(1-3y)\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{y}}$. Pour un point (x,y) de O, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = (0,0)$ si et seulement si $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{1}{3}$ d'après les expressions précédentes. Il y a donc deux points critiques de f dans O, ce sont les points $\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big)$ et $\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big)$.

Comme f est de classe C^2 sur O par théorèmes généraux, on peut considérer la hessienne de f en ces deux points. Or $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{(1-3y)\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{y}} - \frac{x^2(1-3y)}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{y}}$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = 0$ et les deux hessiennes sont diagonales. De plus, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{x(1-2x^2)(1-y)\sqrt{y}}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{4x(1-y)\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = -\frac{8}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Enfin, on calcule la dernière dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x(1-3y)\sqrt{1-x^2}}{4y^{3/2}} - \frac{3x\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{y}}$ d'où $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Ainsi, $H_f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big)$ a des valeurs propres strictement négatives donc f admet en $\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big)$ un maximum local et $H_f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big)$ a des valeurs propres strictement positives donc f admet en $\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big)$ un minimum local. Les valeurs de f en ces points sont $f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ et $f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.
Les deux études n'étaient pas nécessaires en se rendant compte que $\forall (x,y) \in O,\ f(-x,y) = -f(x,y)$.

c. Le maximum de f sur H existe d'après la question **a.**. En les points (x,y) de la frontière du rectangle H, on a soit $x = -1$, soit $x = 1$, soit $y = 0$, soit $y = 1$ et, dans tous les cas, $f(x,y) = 0$. Comme f n'est pas une fonction négative sur H car par exemple $f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4\sqrt{2}} > 0$, le maximum de f sur H n'est pas atteint sur la frontière de H donc il est atteint à l'intérieur O de H, donc en un point critique. Puisque $\forall (x,y) \in H,\ f(-x,y) = -f(x,y)$, la recherche du maximum de f sur H nous permettra aussi de déterminer le minimum de f sur H. Comme il n'existe que deux points critiques de f dans O d'après la question précédente, et que l'on a déjà calculé $f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ et $f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, on peut affirmer que f atteint son maximum sur H en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big)$ et son minimum sur H en $\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\Big)$ et que $\underset{H}{\mathrm{Max}}(f) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ et $\underset{H}{\mathrm{Min}}(f) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

132 **a.** La fonction $h : \mathbb{R}_+^* : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall x > 0,\ h'(x) = (\ln(x)+1)x^x$

donc h est croissante sur $\left]0;\frac{1}{e}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ avec $h\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1 = 0^0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} e^t = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$.

b. Comme $f(x,y) = e^{x\ln(x^2+y^2)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par opérations. On a $\forall y \in \mathbb{R},\ f(0,y) = 1$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Si $t \neq 0$, $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t} = \frac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t\ln(t^2)} \times \ln(t^2)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers 0 car $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t^2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t\ln(t^2)} = 1$ par composée. Ainsi, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $(0,0)$, la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Par continuité de $\exp$ en 0, si $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall z \in [-\alpha;\alpha],\ |e^z - 1| \leqslant \varepsilon$. Comme $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, on a $|x\ln(x^2+y^2)| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}|\ln(x^2+y^2)|$. Or $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t}\,\ln(t) = 0$ par croissances comparées, donc il existe $\beta > 0$ tel que $\forall t \in]0;\beta],\ |\sqrt{t}\,\ln(t)| \leqslant \alpha$.

Par conséquent, dès que $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \beta$, on a $|\sqrt{x^2+y^2}\,\ln(x^2+y^2)| \leqslant \alpha$ et on traite deux cas :

- si $x \geqslant 0$, $|f(x,y) - f(0,0)| = f(x,y) - 1 = e^{x\ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant e^{\sqrt{x^2+y^2}\,\ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant \varepsilon$.
- si $x < 0$, $|f(x,y)-f(0,0)| = 1-f(x,y) = \frac{e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}-1}{e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}} \leqslant e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}-1 \leqslant e^{\sqrt{x^2+y^2}\,\ln(x^2+y^2)}-1 \leqslant \varepsilon$.

On a donc $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \beta \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leqslant \varepsilon$ d'où la continuité de f en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.

c. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)f(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)f(x,y)$.

Comme $f(x,y) > 0$, en supposant $\overrightarrow{grad}\,f(x,y) = (0,0)$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow xy = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

- Si $x = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(y^2) = 0 \Longleftrightarrow y = \pm 1$.
- Si $y = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x^2) + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm e^{-1}$.

Il existe donc 4 points critiques : $(0,1)$, $(0,-1)$, $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$.

d. <u>Extrema locaux</u> : comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert sur lequel f est de classe C^1, si f y admet un extremum local, c'est en un point critique d'après le cours. Comme on a $f(x,y) = f(x,-y)$, la surface S d'équation $z = f(x,y)$ est invariante par la réflexion de plan $y = 0$. Il suffit donc d'étudier f au voisinage de $(0,1)$, $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$.

• Comme $f(0,1+t) = f(0,1) = 1$, rien à dire dans cette direction. Mais $f(t,1) = e^{t\ln(1+t^2)}$ donc $f(t,1) < 1$ si $t < 0$ et $f(t,1) > 1$ si $t > 0$. Donc f n'admet pas en $(0,1)$ d'extremum local. En $(0,-1)$ non plus donc.

• En ce qui concerne l'étude de f au voisinage des points $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$, on va montrer que ce sont des extrema locaux en considérant une restriction de f à un fermé borné. Il semble logique de considérer la boule fermée unité $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Comme f est continue sur le fermé borné B (en dimension finie), f y est bornée et y atteint ses bornes. Sur la frontière de B, c'est-à-dire sur le disque unité $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, la fonction f est constante et vaut 1. Comme les valeurs en ces deux points sont $f(e^{-1},0) = (e^{-2})^{e^{-1}} = e^{-2/e} < 1$ et $f(-e^{-1},0) = (e^{-2})^{-e^{-1}} = e^{2/e} > 1$, on a donc $\underset{B}{\mathrm{Max}}(f) \geqslant e^{2/e}$ et $\underset{B}{\mathrm{Min}}(f) \leqslant e^{-2/e}$. Ainsi, la restriction de f à B n'atteint pas son minimum et son maximum sur sa frontière D mais dans son intérieur $\overset{\circ}{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, c'est-à-dire sur un ouvert. On sait alors d'après le cours que ce minimum et ce maximum sont atteints en des points critiques de f, qui ne peuvent être d'après l'étude précédente que les points $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$. On en déduit donc que f atteint son minimum absolu sur B en $(e^{-1},0)$ et que $\underset{B}{\mathrm{Min}}(f) = f(e^{-1},0) = e^{-2/e}$ et que f atteint son maximum absolu sur B en $(-e^{-1},0)$ avec $\underset{B}{\mathrm{Max}}(f) = f(-e^{-1},0) = e^{2/e}$. Ces points sont donc des extrema locaux de f en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f admet en $(e^{-1},0)$ un minimum local (sur B) et f admet en $(-e^{-1},0)$ un maximum local.

d. Si $x \in]0;1[$, $f(x,0) = e^{x\ln(x^2)} < 1 = f(0,0)$ donc f n'admet pas en $(0,0)$ un minimum local.

Si $x \in]-1;0[$, $f(x,0) = e^{x\ln(x^2)} > 1 = f(0,0)$ donc f n'admet pas en $(0,0)$ un maximum local.

f n'admet donc pas d'extremum local au point $(0,0)$.

Extrema absolus : on a $f(x,0) = (x^2)^x$ qui tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ donc f n'admet pas de minimum absolu car f est strictement positive sur $\mathbb{R}^2$. Ce qui précède montre que $\underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}}\, f = 0$ alors que 0 ne peut pas être une valeur prise par la fonction f. De même $f(x,0) = (x^2)^x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ donc f n'admet pas de maximum absolu sur $\mathbb{R}^2$ car f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$.

133 **a.** Pour tout $A \in \mathbb{R}$, par définition il existe $r \geqslant 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| \geqslant r \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{||x||} \geqslant A$. Prenons $A = f(0) \in \mathbb{R}$, il existe donc $r \geqslant 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| \geqslant r \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{||x||} \geqslant f(0)$. Comme f est continue (puisqu'elle y est C^1) sur la boule fermée bornée $K = B_f(0,r)$ (en dimension finie), la fonction f est bornée sur K et y atteint ses bornes donc on peux poser $m = \underset{K}{\mathrm{Min}}(f) = f(a)$ avec $a \in K$. Traitons deux cas :

- Si $x \in K$, par définition, on a $f(x) \geqslant m$.
- Si $x \notin K$, $||x|| > r$ donc $f(x) \geqslant \dfrac{f(x)}{||x||} \geqslant f(0) \geqslant m$.

Ainsi, f est minore sur $\mathbb{R}^n$ et on a $\underset{\mathbb{R}^n}{\mathrm{Min}}(f) = m$. Or f est de classe C^1 et $\mathbb{R}^n$ est un ouvert donc, comme f admet en a un minimum absolu donc local, a est un point critique pour f donc $\nabla f(a) = 0$.

b. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f_v(x) = f(x) - (x|v)$ est de classe C^1 car f l'est et que $g_v : x \mapsto (x|v)$ est polynomiale en les coordonnées de x donc de classe C^1 aussi, d'ailleurs elle est aussi linéaire donc continue car on est en dimension finie. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nabla f_v(x) = \nabla f(x) - \nabla g_v(x)$ par linéarité des dérivées partielles. Or, si $v = (v_1, \cdots, v_n)$ et $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $g_v(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k$ donc $\nabla g_v(x) = (v_1, \cdots, v_n) = v$. Ainsi, $\nabla f_v(x) = \nabla f(x) - v$.

De plus, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ |(x|v)| \leqslant ||x||\,||v||$ donc, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |f_v(x)| = |f(x) - (x|v)| \geqslant \big||f(x)| - |(x|v)|\big| \geqslant |f(x)| - |(x|v)| \geqslant |f(x)| - ||x||\,||v||.$$

Ainsi, dès que $x \neq 0$, $||x|| > 0$ donc $\dfrac{|f_v(x)|}{||x||} \geqslant \dfrac{|f(x)|}{||x||} - ||v||$. Or $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \dfrac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$ par hypothèse donc, par minoration, on a aussi $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \dfrac{|f_v(x)|}{||x||} = +\infty$.

D'après la question précédente appliquée à f_v, il existe un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f_v(x) = \nabla f(x) - v = 0$ donc $\nabla f(x) = v$. Puisque ceci est valable pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction ∇f est surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

134 pas fait

135 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \mathrm{Arctan}^2(xt)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g_x(t)dt$ existe et f est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, par imparité de Arctan, la fonction f est paire et $f(0) = \displaystyle\int_0^1 0dt = 0$ car $\mathrm{Arctan}(0) = 0$. Soit $g : \mathbb{R} \to [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \mathrm{Arctan}^2(xt)$:

(H_1) Pour $t \in [0;1]$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0;1]$.

(H_3) Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;1]$, $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4} = \varphi(t)$ et φ est bien continue et intégrable sur $[0;1]$.

Ainsi, par continuité sous le signe somme, f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons maintenant le théorème de dérivation sous le signe somme :

(H_1) Pour $t \in [0;1]$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0;1]$ d'après **a.**.

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2t\,\mathrm{Arctan}(xt)}{1+(xt)^2}$ est continue sur $[0;1]$.

(H_4) Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;1]$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2} = \theta(t)$ et θ est bien continue et intégrable sur $[0;1]$.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t\,\mathrm{Arctan}(xt)}{1+(xt)^2}dt$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, effectuons le changement de variable $u = xt \iff t = \psi_x(u) = \dfrac{u}{x}$ et ψ_x est une bijection strictement monotone de classe C^1 de $\widetilde{[0;x]}$ dans $[0;1]$ de sorte que $\forall x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}^2(u)du$. Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $u \mapsto \mathrm{Arctan}^2(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}^2(u)du$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $H'(x) = \mathrm{Arctan}^2(x)$. Comme $f(x) = \dfrac{H(x)}{x}$, en dérivant par produit car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{H(x)}{x^2} + \dfrac{H'(x)}{x}$ donc $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{\mathrm{Arctan}^2(x)}{x}$ comme attendu.

d. D'après **c.**, la fonction f est solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Comme les solutions de (E_0) : $xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont classiquement les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, par théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto f(x) + \dfrac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

e. <u>Analyse</u> : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, il existe deux constantes λ_1 et λ_2 réelles telles que $\forall x < 0$, $y(x) = f(x) + \dfrac{\lambda_1}{x}$ et $\forall x > 0$, $y(x) = f(x) + \dfrac{\lambda_2}{x}$. En remplaçant x par 0 dans (E), on a $y(0) = 0$. De plus, comme y est continue en 0 et que f l'est aussi grâce à **a.**, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda_1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $x \mapsto \dfrac{\lambda_2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ admettent une limite nulle en 0 ce qui impose $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi, $y = f$.

<u>Synthèse</u> : on a vu en **b.** que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en **c.** que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Comme $f(0) = 0$ donc $0.f'(0) + f(0) = \mathrm{Arctan}^2(0) = 0$, la fonction f est même solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

<u>Conclusion</u> : seule f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$) et l'espace affine S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 0 car on peut écrire $S = \{f\} = f + \{0\}$.

136 **a.** Dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 3 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de Gauss $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ et, par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ X & X-2 & 1 \\ X & -1 & X-2 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$ puis on effectue $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ pour avoir $\chi_A = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2)$. χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont simples donc $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des droites. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b. Le système (S) s'écrit matriciellement $X'' = AX$ si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Comme $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente, on a l'équivalence, en posant $Y = P^{-1}X$, Y étant C^1 si et seulement si X l'est : $X'' = AX \Longleftrightarrow X'' = PDP^{-1}X \Longleftrightarrow P^{-1}X'' = (P^{-1}X)'' = D(P^{-1}X) \Longleftrightarrow Y'' = DY$. En notant $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $Y'' = DY \Longleftrightarrow (a'' = 0,\ b'' = b \text{ et } c'' = 2c)$. Ces trois équations différentielles linéaires linéaires du second ordre à coefficients et sans second membre se résolvent facilement et $Y'' = DY$ équivaut à $\exists(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R}^6,\ \forall t \in \mathbb{R},\ a(t) = \alpha_1 t + \alpha_2,\ b(t) = \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t},\ c(t) = \gamma_1 e^{\sqrt{2}t} + \gamma_2 e^{-\sqrt{2}t}$.

Avec les équivalences précédentes, (x, y, z) vérifie (S) si et seulement s'il existe $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R}^6$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(t) = & a(t) + b(t) + c(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 + \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t} + \gamma_1 e^{\sqrt{2}t} + \gamma_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y(t) = & a(t) + 2b(t) + 3c(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 + 2\beta_1 e^t + 2\beta_2 e^{-t} + 3\gamma_1 e^{\sqrt{2}t} + 3\gamma_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ z(t) = & a(t) + b(t) - c(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 + \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t} - \gamma_1 e^{\sqrt{2}t} - \gamma_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{cases}$ car $X = PY$.

137 **a.** Dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X+2 & -4 & -1 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 4 & -4 & X-3 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de Gauss $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2$ et, par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on a $\chi_A = (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix}$. On poursuit avec $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et on développe par rapport à la première colonne pour obtenir $\chi_A = (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = (X-2)(X+1)(X-3)$ de sorte que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2, 3\}$, que χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc que, d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Comme $A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, on a les sous-espaces propres $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$, $E_3(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut donc écrire $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b. Pour une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, si on pose la fonction $Y = P^{-1}X$, on a $X = PY$ et X est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si Y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, comme $A = PDP^{-1}$ et que $Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X$, on a l'équivalence suivante : $(\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)) \iff (\forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t)) \iff (\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = DY(t))$ de sorte que (X solution de (S_1) sur $\mathbb{R}$) $\iff$ (Y solution de (S_1') sur $\mathbb{R}$) avec $(S_1')\ :\ Y' = DY$.

c. Si $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$, Y est solution de (S_1') sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R},\ a''(t) = -a(t),\ b''(t) = 2b(t)$ et $c''(t) = 3c(t)$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe trois constantes réelles a_1, a_2, a_3 telles que, pour tout réel t, on a $a(t) = a_1e^{-t}$, $b(t) = a_2e^{2t}$ et $c(t) = a_3e^{3t}$. D'après l'équivalence de la question précédente, et comme $X(t) = PY(t)$, les solutions réelles de (S_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(t)$ telles qu'il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1e^{-t} + a_2e^{2t} + a_3e^{3t} \\ a_2e^{2t} + a_3e^{3t} \\ a_1e^{-t} + a_3e^{3t} \end{pmatrix}$.

d. Pour une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, si on pose la fonction $Y = P^{-1}X$, on a $X = PY$ et X est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si Y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a l'équivalence suivante : $(\forall t \in \mathbb{R},\ X''(t) = AX(t)) \iff (\forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}X''(t) = DP^{-1}X(t)) \iff (\forall t \in \mathbb{R},\ Y''(t) = DY(t))$ de sorte que (X solution de (S_2) sur $\mathbb{R}$) $\iff$ (Y solution de (S_2') sur $\mathbb{R}$) où $(S_2')\ :\ Y'' = DY$. Si $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$, Y est solution de (S_2') sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R},\ a''(t) = -a(t),\ b''(t) = 2b(t)$ et $c''(t) = 3c(t)$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe six constantes réelles $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ telles que l'on ait, pour $t \in \mathbb{R}$, les relations $a(t) = a_1\cos(t) + a_2\sin(t)$, $b(t) = a_3e^{\sqrt{2}t} + a_4e^{-\sqrt{2}t}$ et $c(t) = a_5e^{\sqrt{3}t} + a_6e^{-\sqrt{3}t}$. Comme en question **c.**, les solutions réelles de (S_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(t)$ telles qu'il existe $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \mathbb{R}^6$ avec $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cos(t) + a_2\sin(t) + a_3e^{\sqrt{2}t} + a_4e^{-\sqrt{2}t} + a_5e^{\sqrt{3}t} + a_6e^{-\sqrt{3}t} \\ a_3e^{\sqrt{2}t} + a_4e^{-\sqrt{2}t} + a_5e^{\sqrt{3}t} + a_6e^{-\sqrt{3}t} \\ a_1\cos(t) + a_2\sin(t) + a_5e^{\sqrt{3}t} + a_6e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$.

e. Soit X est une solution de (S_2) bornée sur $\mathbb{R}$ donnée sous la forme précédente :

- Si $a_6 \neq 0$, $X(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} \begin{pmatrix} a_6e^{-\sqrt{3}t} \\ a_6e^{-\sqrt{3}t} \\ a_6e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$, absurde car $t \mapsto a_6e^{-\sqrt{3}t}$ tend vers $\pm\infty$ en $-\infty$. Ainsi, $a_6 = 0$.
- Si $a_5 \neq 0$, $X(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \begin{pmatrix} a_5e^{\sqrt{3}t} \\ a_5e^{\sqrt{3}t} \\ a_5e^{\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$, absurde car $t \mapsto a_5e^{\sqrt{3}t}$ tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$. Ainsi, $a_5 = 0$.
- Si $a_4 \neq 0$, $X(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} \begin{pmatrix} a_4e^{-\sqrt{2}t} \\ a_4e^{-\sqrt{2}t} \\ a_1\cos(t) + a_2\sin(t) \end{pmatrix}$ ce qui est absurde car $t \mapsto a_4e^{-\sqrt{2}t}$ admet pour limite $\pm\infty$ en $-\infty$. Ainsi, $a_4 = 0$.
- Si $a_3 \neq 0$, $X(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \begin{pmatrix} a_3e^{\sqrt{2}t} \\ a_3e^{\sqrt{2}t} \\ a_1\cos(t) + a_2\sin(t) \end{pmatrix}$ ce qui est absurde car $t \mapsto a_3e^{\sqrt{2}t}$ admet pour limite $\pm\infty$ en $+\infty$. Ainsi, $a_3 = 0$.
- Par conséquent, $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} a_1\cos(t) + a_2\sin(t) \\ 0 \\ a_1\cos(t) + a_2\sin(t) \end{pmatrix}$.

Réciproquement, X ayant cette expression est clairement bornée sur $\mathbb{R}$ car $\cos$ et $\sin$ le sont. Par conséquent, l'ensemble A_2 des solutions réelles et bornées de (S_2) forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car $A_2 = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$ avec $\forall t \in \mathbb{R},\ X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Comme $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ est libre, et qu'elle est génératrice de A_2, $\mathcal{B}$ est une base de A_2 donc $\dim(A_2)=2$.

138 **a.** On décompose la fraction rationnelle $\dfrac{1}{t(t^2-1)}$ en éléments simples sachant que ses pôles sont $-1,0,1$, que son degré vaut $-3<0$ et qu'elle est déjà sous forme irréductible. Il existe donc trois constantes a,b,c réelles telles que $\forall t\notin\{-1,0,1\}$, $\dfrac{1}{t(t^2-1)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t-1}+\dfrac{c}{t+1}$. Par identification, la technique classique ou l'astuce habituelle $2=2t^2+2(1-t^2)$ ce qui donne $\dfrac{2}{t(1-t^2)}=\dfrac{2t^2+2(1-t^2)}{t(1-t^2)}=\dfrac{2t}{1-t^2}+\dfrac{2}{t}=\dfrac{t+1-(1-t)}{(1-t)(1+t)}+\dfrac{2}{t}$, on obtient $\dfrac{2}{t(1-t^2)}=\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{1}{1+t}$.

a. L'équation (E) peut être mise sous forme normalisée sur les intervalles $I_1=]-\infty;-1[$, $I_2=]-1;0[$, $I_3=]0;1[$ et $I_4=]1;+\infty[$. On retient que $\dfrac{2}{t(1-t^2)}=\dfrac{2t}{1-t^2}+\dfrac{2}{t}$ et, comme une primitive de $a:t\mapsto\dfrac{2t}{1-t^2}+\dfrac{2}{t}$ est $A:t\mapsto 2\ln(|t|)-\ln(|1-t^2|)$ sur chacun des ces intervalles, les solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ t(t^2-1)y'+2y=0$ sur chacun des I_k sont les fonctions $y:t\mapsto\dfrac{\lambda t^2}{t^2-1}$ (les valeurs absolues sont absorbées par la constante λ qui parcourt $\mathbb{R}$).

On fait ensuite varier la constante en cherchant une solution particulière de (E) sous la forme $y:t\mapsto\dfrac{\lambda(t)t^2}{t^2-1}$ avec $\lambda:I_k\to\mathbb{R}$ dérivable. En substituant, on trouve $\lambda'(t)=\dfrac{1}{t}$ et on prend par exemple $\lambda=\ln(|t|)$ pour avoir comme solution particulière $y_0:t\mapsto\dfrac{t^2\ln(|t|)}{t^2-1}$ sur chacun des I_k.

Par théorème de structure, comme l'équation (E) est linéaire, les solutions de (E) sur chaque I_k sont les $y_\lambda:t\mapsto\dfrac{t^2(\lambda+\ln(|t|))}{t^2-1}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$: cet ensemble de solutions est une droite affine.

b. <u>Raccord en 0, analyse</u> : si y est une solution de (E) sur $]-1;1[$, ses restrictions à I_2 et I_3 sont des solutions de (E) sur ces deux intervalles donc, d'après la question précédente, il existe des réels λ_2 et λ_3 tels que $\forall t\in]-1;0[=I_2,\ y(t)=\dfrac{t^2(\lambda_2+\ln(|t|))}{t^2-1}$ et $\forall t\in]0;1[=I_3,\ y(t)=\dfrac{t^2(\lambda_3+\ln(|t|))}{t^2-1}$. On a forcément $y(0)=0$ (en remplaçant t par 0 dans (E) par exemple ou par prolongement).

<u>Raccord en 0, synthèse</u> : réciproquement, pour $(\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^2$, si la fonction $y:]-1;1[\to\mathbb{R}$ est définie par $\forall t\in]-1;0[,\ y(t)=\dfrac{t^2(\lambda_2+\ln(|t|))}{t^2-1}$ et $\forall t\in]0;1[,\ y(t)=\dfrac{t^2(\lambda_3+\ln(|t|))}{t^2-1}$ et $y(0)=0$, y est de classe C^∞ sur $I_2\cup I_3$ par opérations et y est continue en 0 par croissances comparées car $\lim\limits_{t\to0}t^2\ln(|t|)=0$ et y est aussi dérivable en 0 car $y'(0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{y(t)-y(0)}{t-0}=0$ car on a aussi $\lim\limits_{t\to0}t\ln(|t|)=0$ par croissances comparées, et ceci quelles que soient les constantes λ_2 et λ_3. Comme y est solution de (E) en 0, sur I_2 et sur I_3, y est bien solution de (E) sur $]-1;1[$.

<u>Raccord en 0, conclusion</u> : les solutions de (E) sur $]-1;1[$ sont de la forme précédente. L'espace affine $S_{2,3}$ des solutions de (E) sur $]-1;1[$ est de dimension 2 car les fonctions y solutions de (E) sur $]-1;1[$ s'écrivent $y=y_0+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3$ où $y_2:]-1;1[\to\mathbb{R}$ vérifie $\forall t\in]-1;0[,\ y_2(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1}$ et $\forall t\in[0;1[,\ y_2(t)=0$ et $y_3:]-1;1[\to\mathbb{R}$ est définie par $\forall t\in]-1;0],\ y_3(t)=0$ et $\forall t\in]0;1[,\ y_3(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1}$; $S_{2,3}=y_0+\mathrm{Vect}(y_2,y_3)$.

<u>Raccord en 1, analyse</u> : si y est une solution de (E) sur $]0;+\infty[$, alors il existe des réels λ_3 et λ_4 tels que $\forall t\in]0;1[,\ y(t)=\dfrac{t^2(\lambda_3+\ln(t))}{t^2-1}$ et $\forall t\in]1;+\infty[,\ y(t)=\dfrac{t^2(\lambda_4+\ln(t))}{t^2-1}$. Or on doit avoir $y(1)=\dfrac{1}{2}$ en

remplaçant t par 1 dans (E) et la continuité de y en 1 impose que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ car $\lim_{t\mapsto 1} \dfrac{t^2}{t^2-1} = \pm\infty$ et $\lim_{t\mapsto 1} \dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1} = \dfrac{1}{2}$ car $\dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1} \underset{1}{\sim} \dfrac{t^2(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \dfrac{t^2}{t+1} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

<u>Raccord en 1, synthèse</u> : réciproquement, $y_0 :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \neq 1,\ y_0(t) = \dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ et $y_0(1) = \dfrac{1}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par opérations et, pour $t > 0$ et $t \neq 1$, $\dfrac{y_0(t)-y_0(1)}{t-1} = \dfrac{2t^2\ln(t)-(t^2-1)}{2(t-1)^2(t+1)}$ donc $\dfrac{y_0(t)-y_0(1)}{t-1} = \dfrac{2(1+u)^2\ln(1+u)-u(u+2)}{2u^2(u+2)} \underset{0}{=} \dfrac{2(1+2u+o(u)(u-(u^2/2)+o(u^2))-2u-u^2)}{2u^2+o(u^2)}$ en posant $u = t-1$ et il vient $\dfrac{y_0(1+u)-y_0(1)}{u} \underset{0}{=} \dfrac{2(1+2u+o(u)(u-(u^2/2)+o(u^2))-2u-u^2)}{2u^2+o(u^2)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2u^2}{u^2} = \dfrac{1}{2}$ donc y_0 est aussi dérivable en 1. De plus, y_0 est solution de (E) sur $]0;+\infty[$ car elle l'est d'après la question précédente sur I_3 et I_4 et que la relation est vraie pour $t = 1$.

<u>Raccord en 1, conclusion</u> : l'espace affine $S_{3,4}$ des solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ est de dimension 0 car on vient de voir que seule y_0 était solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, donc que $S_{3,4} = \{y_0\} = y_0 + \{0\}$.

<u>Raccord en -1</u> : pour ne pas avoir à tout refaire, pour un intervalle I de $\mathbb{R}$, on pose $-I = \{-t \mid t \in I\}$ et, pour $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable, on pose $z : -T \to \mathbb{R}$ telle que $\forall u \in -I,\ z(u) = y(-u)$. Alors z est aussi dérivable par opérations et, si y est solution de (E) sur I, on a $\forall u \in -I,\ (-u)((-u)^2-1)y'(-u) + 2y(-u) = (-u)^2$ donc $u(u^2-1)z'(u) + 2z(u) = u^2$ et z est solution de (E) sur $-I$. Comme $-(-I) = I$, on a la réciproque par symétrie. Ainsi, raccorder les solutions revient à les raccorder en 1, les graphes des solutions sur $-I$ étant les symétriques orthogonalement par rapport à la droite (Oy). D'après le cas précédent, la seule solution de (E) sur $]-\infty;0[= -]0;+\infty[$ est $z_0 : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ telle que $\forall u \in \mathbb{R}_-^*,\ z_0(u) = y_0(-u) = \dfrac{(-u)^2\ln(-u)}{(-u)^2-1} = \dfrac{u^2\ln(|u|)}{u^2-1}$.
Ainsi, l'espace affine $S_{1,2}$ des solutions de (E) sur $]-\infty;0[$ est de dimension 0 car on vient de voir que seule z_0 était solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$, donc que $S_{1,2} = \{z_0\} = z_0 + \{0\}$.

<u>Solutions sur $\mathbb{R}$</u> : avec ce qui précède, la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{t^2\ln(|t|)}{t^2-1}$ si $t \notin \{-1,0,1\}$, $f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = 0$.

139 **a.** Comme $g : t \mapsto f(2t)$ et $h : t \mapsto tf(2t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, les fonctions $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(2t)dt$ et $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(2t)dt$ sont de classe C^1 car elles sont respectivement les primitives de g et h qui s'annulent en 0. Or, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 1 + xG(x) - H(x)$ (1) donc $x \mapsto f(2x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations, ce qui justifie que f est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs, on peut montrer facilement par une récurrence simple que f est alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En dérivant (1), on a $2f'(2x) = G(x) + xG'(x) - H'(x) = G(x) + xf(2x) - xf(2x) = \displaystyle\int_0^x f(2t)dt$. En remplaçant $2x$ par x, on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x/2} f(2t)dt$.

b. Comme $f'(x) = \dfrac{1}{2}G\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, la fonction f est de classe C^2 et, en dérivant une fois de plus, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{1}{4}G'\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{f(x)}{4}$. Ainsi, f est une solution réelle sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants $(E)\ :\ 4y'' - y = 0$.

c. Les solutions de l'équation caractéristique $4z^2 - 1 = 0$ sont $\pm\dfrac{1}{2}$ donc les solutions réelles de (E) sont les $y : x \mapsto A\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right) + B\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Or $f(0) = 1$ grâce à la relation de l'énoncé et $f'(0) = \dfrac{1}{2}G\left(\dfrac{0}{2}\right) = 0$ donc $A = 1$ et $B = 0$. Si f vérifie les conditions de l'énoncé, $f : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Pour la réciproque :

<u>Méthode 1</u> : la fonction $f : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles et, en posant les fonctions $u : t \mapsto x - t$ et $v : t \mapsto -\sin(t)$ qui sont de classe C^1 sur $\widetilde{[0;x]}$, par intégration par parties, on a la relation $\displaystyle\int_0^x (x-t)\operatorname{ch}(t)dt = 0 + \int_0^x \operatorname{sh}(t)dt = [\operatorname{ch}(t)]_0^x = \operatorname{ch}(x) - 1 = f(2x) - 1$ ce qui montre bien que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 1 + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(2t)dt$.

<u>Méthode 2</u> : la fonction $f : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles et $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - \dfrac{f(x)}{4} = 0$ donc $\left(f'(x) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x/2} f(2t)dt\right)' = 0$ d'après ce qui précède. Comme $f'(x) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x/2} f(2t)dt$ s'annule pour $x = 0$, sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x/2} f(2t)dt = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(f(2x) - 1 - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(2t)dt\right)' = 0$ et, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et que $f(2.0) = 1 + \displaystyle\int_0^0 (0-t)f(2t)dt$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 1 + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(2t)dt$.

<u>Conclusion</u> : la seule fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 1 + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(2t)dt$ est donc la fonction $f : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.