

TD 01 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2025-2026

vendredi 5 septembre 2025

1.1 Règle de DUHAMEL-RAABE Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

- Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
- Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors $\exists A \in \mathbb{R}, u_n \sim_{+\infty} \frac{A}{n^\alpha}$.
- Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

1.2 Critère de CAUCHY Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs, on suppose que $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^+$.

- Montrer que si $\ell > 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.
- Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.
- Observer que, lorsque $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

1.3 Mines PSI 2015 Guillaume Leroy

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.

- Si la série $\sum_{n \geq 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge, montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.
- Si la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, soit $\lambda \in]1; +\infty[$, en considérant les ensembles $I = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \lambda a_n\}$ et $J = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n^{1-\frac{1}{n}} > \lambda a_n\}$, montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge et majorer sa somme en fonction de λ .
- Que dire des séries $\sum_{n \geq 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ et $\sum_{n \geq 1} a_n$?

Obtenir une inégalité (avec des racines carrées) sur leurs sommes quand elles existent.

1.4 OdIT 2015/2016 ENSEA planche 282I

Montrer que $P_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n x^k\right) - 1$ admet une unique racine $x_n \geq 0$ et étudier la suite (x_n) .

1.5 Mines PSI 2018 Sonia-Laure Hadj-Sassi I

- Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n)$.

- Montrer la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de $\sum_{n \geq 0} v_n$. Déterminer la valeur exacte de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

1.6 Compléments OdIT 2018/2019 ENTPE PSI planche 430I

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = xe^x - n$ admet un unique zéro u_n strictement positif.
- Montrer que $\forall n \geq 3, 1 \leq u_n \leq \ln n$. Puis que $u_n \sim_{+\infty} \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.
- Trouver un équivalent de $u_n - \ln n$.

1.7 Mines PSI 2022 Margaux Millaret II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$.

a. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ converge.

b. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$.

c. Donner sans preuve la valeur de C . Puis le prouver avec les intégrales de WALLIS.

1.8 CCINP PSI 2022 Louis Lacarrieu II

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1) \times \cdots \times (1+a_n)}$.

a. Calculer $u_1 + u_2$. Généraliser.

b. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

c. Dans cette question, on suppose que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1.9 Mines PSI 2024 Amélia Arangoits I

Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \geq 1, x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}$.

a. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

b. Montrer que $\forall n \geq 2, x_n \geq n$. En déduire que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

c. Montrer qu'il existe un réel c tel que $x_n \underset{+\infty}{=} n + c + o(1)$.

d. Montrer que $c = 0$.

1.10 Mines-Télécom PSI 2024 Tom Sanchez I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ qu'on notera x_n .

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

c. Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 1} x_n$?