

TD 02 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2025-2026

vendredi 12 septembre 2025

2.1 Mines PSI 2015 Arnaud Dubessay

Nature, selon $a \in \mathbb{R}$, de $\sum_{n \geq 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$.

2.2 Mines PSI 2017 Élio Garnaoui I

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $u_n = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) - \frac{\pi}{6}$ et $\alpha > 0$.

2.3 Mines PSI 2017 Claire Raulin I

Soit $a > 0$, étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a} \sin \left(\frac{n\pi}{5} \right)$.

2.4 Mines PSI 2018 Antoine Secher II

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{n} \right) - \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Étudier les convergences des séries numériques $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$.

2.5 ENS Cachan PSI 2019 Louis Destarac

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\alpha > 1$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^\alpha} = \ell > 0$.

On cherche à montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang N .

b. Si $\alpha < 2$, montrer que $\forall n \geq N$, $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \leq \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt$.

En déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}}$ converge ; puis que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

c. Si $\alpha \geq 2$, montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}}$ diverge ; puis que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

2.6 ENS Cachan PSI 2019 Mathis Girard

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive et décroissante tendant vers 0 telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

a. Montrer que $(|R_n|)_{n \geq -1}$ est monotone (R_{-1} est la somme de la série).

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_n}{2}$.

c. Déterminer un équivalent de R_n .

d. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

2.7 CCP PSI 2019 Thomas Crété I

- a. Montrer l'existence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, du réel $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
- b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)!R_n = 1$.
- c. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \sin(2\pi en!)$?

2.8 Mines-Télécom PSI 2022 Jade Mirassou II

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit, en cas d'existence, $u_k = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^k dx$.

- a. Étudier la monotonie de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- b. Déterminer la limite de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- c. Donner une expression simple de $u_k + u_{k+2}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
- d. Calculer u_0 et u_1 . En déduire des expressions de u_{2n} et u_{2n+1} sous forme de somme.
- e. En déduire la convergence et la valeur de la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2.9 Mines PSI 2024 Guilhem Thébaud II

Soit $r \in]0; \frac{1}{2}[$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, on pose alors $x(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n r^n$.

Montrer que l'application x ainsi construite est injective.

2.10 CCINP PSI 2024 Martin Mayot II

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- a. Étudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- b. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n^3$. Indication : considérer $u_{n+1} - u_n$.
- c. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ diverge. Indication : considérer $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
- d. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$ grâce au théorème de CESARO (question rajoutée). Indication : considérer $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$.