

Définition et caractéristiques d'une relation binaire

EXAMPLE :

- DÉFINITION :** Pour une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E , on dit que :

- EXEMPLE :** Dans l'exemple précédent :

[illegible]

Relation d'ordre

DÉFINITION : Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E , on dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre **total** si, de plus, on a $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$. Un ordre qui n'est pas total est dit **partiel**.

EXEMPLE :

- La relation d'égalité $=$ est une relation d'ordre dans n'importe quel ensemble.
- La relation d'inclusion dans un $\mathcal{P}(X)$ est une relation d'ordre partiel.
- La relation $\leq$ dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est une relation d'ordre total.
- La relation $\leq$ dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est une relation d'ordre partiel si X n'est pas un singleton.
- La relation de divisibilité $|$ dans $\mathbb{N}^*$ est une relation d'ordre partiel.
- L'ordre lexicographique (ou alphabétique) du dictionnaire en français est un ordre total.
- Les relations $\mathcal{R}_5, \mathcal{R}_6$ et $\mathcal{R}_7$ sont des relations d'ordre, pas les autres.

DÉFINITION : Soit E un ensemble ordonné par $\mathcal{R}$, A une partie de E et x un élément de E . On dit que x est un **minorant** (resp. **majorant**) de A si $\forall a \in A, x\mathcal{R}a$ (resp. $\forall a \in A, a\mathcal{R}x$). On dit que A est **minorée** (resp. **majorée**) s'il existe un minorant de A (resp. majorant).

REMARQUE 1.1 : Si x est un majorant de A et que $y \in E$ vérifie $x\mathcal{R}y$ alors par transitivité on a aussi y est un majorant de A : il y a donc rarement unicité du majorant si A est majorée.

DÉFINITION : Soit E un ensemble ordonné par $\mathcal{R}$, A une partie de E et x un élément de E . On dit que x est le **plus grand élément** de A (ou le **maximum** de A) si x vérifie deux propriétés : $x \in A$ et x est un majorant de A . On note dans ce cas : $x = \text{Max}(A)$. On dit que x est le **plus petit élément** de A (ou le **minimum** de A) si x vérifie deux propriétés : $x \in A$ et x est un minorant de A . On note dans ce cas : $x = \text{Min}(A)$.

REMARQUE 1.2 : Pour avoir le droit d'appeler un tel élément le plus grand élément, il faut vérifier que son existence implique son unicité ce qui se fait sans problème par antisymétrie de $\mathcal{R}$.

DÉFINITION : Soit E et F ordonnés respectivement par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et $f : E \rightarrow F$. On dit que :

- f est **croissante** si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies f(x)\mathcal{R}'f(y)$.
- f est **décroissante** si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies f(y)\mathcal{R}'f(x)$.
- f est **strictement croissante** si $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \implies (f(x)\mathcal{R}'f(y) \text{ et } f(x) \neq f(y))$.
- f est **strictement décroissante** si $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \implies (f(y)\mathcal{R}'f(x) \text{ et } f(x) \neq f(y))$.

EXEMPLE : L'application $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \mathcal{D}_n$ (l'ensemble des diviseurs positifs de n) est strictement croissante si on munit $\mathbb{N}^*$ de $|$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ de $\subset$.

PROPOSITION 1.1 :

Avec ces notations, on a les implications :

$(f \text{ strictement croissante}) \implies (f \text{ croissante}) ; (f \text{ strictement décroissante}) \implies (f \text{ décroissante}).$

REMARQUE 1.3 : Si la relation d'ordre $\mathcal{R}$ est totale, on a même :

$$\begin{aligned} f \text{ est strictement croissante} &\iff \left(\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ et } x \neq y) \iff (f(x) \mathcal{R}' f(y) \text{ et } f(x) \neq f(y)) \right) \\ &\iff \left(\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff f(x) \mathcal{R}' f(y) \right). \end{aligned}$$

Bornes supérieures et inférieures et éléments extrémaux

DÉFINITION : Soit E un ensemble ordonné par $\mathcal{R}$, A une partie de E et x un élément de E .

On note M_a l'ensemble des majorants de A (resp. M_i l'ensemble des minorants de A).

On dit que x est la **borne supérieure** (resp. **inférieure**) de A , noté $x = \text{Sup}(A)$ (resp. $x = \text{Inf}(A)$) si M_a admet un minimum et que ce minimum est x (resp. M_i admet un maximum et que ce maximum est x).

On a donc dans ce cas $x = \text{Sup}(A) = \text{Min}(M_a)$ (resp. $x = \text{Inf}(A) = \text{Max}(M_i)$).

REMARQUE 1.4 :

- Comme le maximum et le minimum sont uniques, il y a aussi unicité de la borne supérieure (resp. inférieure) si elle existe.
- Pour un élément $(x \in A, x = \text{Min}(A) \iff x = \text{Inf}(A))$ et $(x = \text{Max}(A) \iff x = \text{Sup}(A))$.

EXEMPLE : Si E est un espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs de E , qui est une partie de $\mathcal{L}(E)$, peut être muni de la relation d'ordre (à prouver) $\prec$ définie par $p \prec q \iff p \circ q = q \circ p = p$. Comme on a les équivalences $p \circ q = p \iff p \circ (\text{id}_E - q) = 0$ et $q \circ p = p \iff (\text{id}_E - q) \circ p = 0$, d'après le cours, $p \prec q \iff (\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \subset \text{Im}(q))$.

Clairement $0_{\mathcal{L}(E)}$ est le minimum $\mathcal{P}$ et id_E en est le maximum. Un exercice intéressant est de démontrer que si $(p, q) \in \mathcal{P}^2$ vérifie $p \circ q = q \circ p$, on a $\text{Sup}(\{p, q\}) = p + q - p \circ q$ et $\text{Inf}(\{p, q\}) = p \circ q$.

DÉFINITION : Soit E un ensemble ordonné par $\mathcal{R}$ et $x \in E$; on dit que x est un élément **maximal** (resp. **minimal**) de E si $\forall y \in E, x \mathcal{R} y \iff x = y$ (resp. $\forall y \in E, y \mathcal{R} x \iff x = y$). (hors hors programme)

REMARQUE 1.5 : Bien sûr être un élément maximum implique qu'on est maximal.

EXEMPLE : Dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ muni de la relation d'ordre divisibilité, les éléments minimaux sont les nombres premiers et il n'y a pas d'élément maximal.

Relation d'équivalence

DÉFINITION : Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E , on dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

EXEMPLE :

- L'égalité est une relation d'équivalence dans n'importe quel ensemble.
- Pour les noms en français, la relation "être un anagramme de" est une relation d'équivalence.
- Sur l'ensemble des suites complexes, la relation $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ est une relation d'équivalence.
- Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la relation e définie par $AeB \iff (\exists (P, Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}), A = QBP^{-1})$ (on dit que A et B sont équivalentes) est une relation d'équivalence : A et B sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
- Sur l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la relation s définie par $AsB \iff (\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), A = PBP^{-1})$ (on dit que A et B sont semblables) est une relation d'équivalence.

DÉFINITION : Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et $x \in E$. On définit la **classe d'équivalence** de x , noté $\bar{x}$, par $\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$.

PROPOSITION 1.2 :

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et $(x, x') \in E^2$, alors on a l'alternative :

- $x\mathcal{R}x' \iff \bar{x} = \bar{x'}$
- $\text{non}(x\mathcal{R}x') \iff \bar{x} \cap \bar{x'} = \emptyset$.

L'ensemble des différentes classes d'équivalence constitue une partition de E .

REMARQUE 1.6 : Réciproquement, si $\{P_i \mid i \in I\}$ est une partition d'un ensemble E , on peut lui associer la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I, (x, y) \in P_i^2$.

Il y a donc autant de relations d'équivalences que de partitions de E . Si E est un ensemble fini de cardinal n , ce nombre de partitions de E s'appelle le nombre de BELL, noté B_n . La suite des nombres de BELL peut se voir sur le site OEIS (On-line Encyclopedia of Integer Sequences) à la référence A000110.

EXEMPLE : Soit $m \in \mathbb{N}^*$, si on définit la relation de **congruence modulo m dans $\mathbb{Z}$** , pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a \equiv b [m] \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, a - b = km)$ alors c'est une relation d'équivalence.

Elle vérifie les compatibilités suivantes, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^2$ et $p \in \mathbb{N}$:

- $a \equiv b [m] \implies -a \equiv -b [m]$;
- $(a \equiv b [m] \text{ et } c \equiv d [m]) \implies a + c \equiv b + d [m]$;
- $(a \equiv b [m] \text{ et } c \equiv d [m]) \implies ac \equiv bd [m]$;
- $a \equiv b [m] \implies a^p \equiv b^p [m]$.

Par la division euclidienne, tout entier $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit $n = mq + r$ avec $r \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$ donc il n'existe que m classes d'équivalence pour cette relation : $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}$.

On note $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ l'ensemble contenant ces m classes d'équivalence : $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$.