DEVOIR 01 : RÉVISIONS

PSI 1 2025-2026 **mardi 02 septembre 2025**

QCM

1 *Tangente en question*

1.1 $\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[,\ \tan(\pi+\theta)=\tan(\theta)$

1.2 $\forall \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\dfrac{1}{\tan(\theta)}$

1.3 $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta)$

1.4 Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(\theta) = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}-1}$

2 *Formules sommatoires : soit* $(a,b,n) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$ *avec* $n \geqslant 2$ *et* $a \neq 1$

2.1 $a + \cdots + a^n = \dfrac{a^{n+1}-a}{a-1}$

2.2 $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

2.3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k^2-k) = \frac{n(n^2-1)}{3}$

2.4 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k = 0$

3 *Développements limités classiques*

3.1 $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^6)$

3.2 $\ln(1-x) \underset{0}{=} -1 - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

3.3 $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$

3.4 $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$

4 *Dérivées des circulaires réciproques*

4.1 $\forall x \in [-1;1],\ \mathrm{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.2 $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ \left(\mathrm{Arccos}(\sin(\theta))\right)' = -1$

4.3 $\forall \theta \in]0;\pi[,\ \mathrm{Arcsin}'(\cos(\theta)) = \dfrac{1}{\sin(\theta)}$

4.4 $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ \mathrm{Arctan}'(\tan(\theta)) = \cos^2(\theta)$

Définition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire “$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$” avec des quantificateurs.

Énoncé Donner un énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a. Dresser le tableau de variations de f où vous ferez apparaître les endroits où f s'annule et les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f.

b. Tracer le graphe de la fonction f.

c. Sur quel intervalle maximal I la fonction f est-elle strictement positive et strictement croissante ?

d. Sur quel intervalle maximal J la fonction f est-elle strictement positive et strictement décroissante ?

e. Quel est le seul entier naturel a appartenant à I ?

Soit deux entiers n et m supérieurs ou égaux à 2 tels que $n < m$ et $n^m = m^n$.

f. Comparer $f(n)$ et $f(m)$. En déduire la valeur de n. Que vaut m ?

DEVOIR 01 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Définition

Énoncé

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 01	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X	X			
2	X		X		
3			X	X	
4		X	X	X	

1.1 Vrai : tangente est π-périodique **1.2** Vrai : il suffit de calculer **1.3** Faux : ne marche pas si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
1.4 Faux : tangente change de signe sur cet intervalle.
2.1 Vrai : on factorise par a et $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n-1}{a-1}$ **2.2** Faux : cela dépend de la parité de n **2.3** Vrai : car on a $\sum_{k=0}^{n}(k^2-k) = 2\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = 2\binom{n+1}{3} = \frac{2(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3}$ **2.4** Faux : $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k = 1$.
3.1 Faux : il faudrait $+o(x^5)$ **3.2** Faux : pas de -1 **3.3** Vrai : cours **3.4** Vrai : cours.
4.1 Faux : la formule est correcte mais Arccos n'est dérivable ni en 1 ni en -1 **4.2** Vrai : par la formule des dérivées des fonctions composées $\big(\mathrm{Arccos}(\sin(\theta))\big)' = -\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = -1$ car $\cos\theta > 0$ sur cet intervalle ; ou alors car $\mathrm{Arccos}(\sin(\theta)) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(\sin(\theta)) = \frac{\pi}{2} - \theta$ et c'est direct **4.3** Vrai : alors $\cos\theta \in]-1;1[$ et $\mathrm{Arcsin}'(\cos(\theta)) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{1}{\sin(\theta)}$ car $\sin\theta > 0$ sur cet intervalle **4.4** Vrai : $\tan\theta$ est bien défini pour les θ proposés et $\mathrm{Arctan}'(\tan(\theta)) = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \cos^2(\theta)$.

Définition La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant a$.

Énoncé Soit I un intervalle, $(a,b) \in I^2$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue, alors pour tout réel $y \in \widetilde{[f(a);f(b)]}$, il existe un réel $c \in \widetilde{[a;b]}$ tel que $f(c) = y$.

Exercice 1 La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et, pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+(1/x)^2} = 0$ après simplification donc f est constante sur l'<u>intervalle</u> $\mathbb{R}_+^*$ où elle vaut $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et $\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$. On a clairement $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et, par croissances comparées, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La fonction f, comme la fonction $\ln$, ne s'annule qu'en 1.
b. Comme $f(e) = \frac{1}{e}$, que f est négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$, on trace facilement le graphe de f avec les informations du tableau de variations.
c. et **d.** D'après le tableau de variations, ces intervalles maximaux sont $I =]1;e]$ et $J = [e;+\infty[$.
e. Comme $e \sim 2,72$, le seul entier de I est $a = 2$.
f. On a $n^m = m^n$ et $n, m \geqslant 2$ d'où $\ln(n^m) = m\ln(n) = n\ln(m) = \ln(m^n)$ et $\frac{\ln(n)}{n} = f(n) = f(m) = \frac{\ln(m)}{m}$. Le graphe de f nous apprend qu'on a forcément $n \in I$ et $m \in J$ puisque f réalise une bijection strictement croissante de I dans $K =]0;1/e]$ et aussi une bijection strictement décroissante entre J et K et que $n < m$. Ainsi, $n = a$ et $f(m) = \frac{\ln(2)}{2}$. Comme $f(4) = \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$, on a forcément $m = 4$. Le seul couple d'entiers $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n < m$ et $n^m = m^n$ est donc $(n,m) = (2,4)$ (en effet, si $n = 1$, on a $m = 1$).