TD 00 : E3A 2003 PSI EXERCICE 1

PSI 1 2025-2026 **vendredi 05 septembre 2025**

1.1 La série étudiée est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1;1[$. Elle est donc convergente. Par ailleurs, en effectuant le changement d'indice $j = k - 1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} = \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0$, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge absolument}}$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-(1/2)} = 2.}$

1.2 On sait que, pour $x \in]-1;1[$, on a $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. En dérivant par rapport à x sur cet intervalle, on a donc $\boxed{\forall x \in]-1;1[,\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.}$

1.3 Tout d'abord, on remarque que, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$b_k = k\Big(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k}\Big) = k\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times k\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1}.$$

D'après la question 1.2, puisque $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, on a $\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{2} \times \frac{n(1/2)^{n+1} - n(1/2)^{n-1} + 1}{(1-1/2)^2}$. Par croissances comparées, on a les limites suivantes $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1/2)^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)(1/2)^n = 0$. Ainsi, par une coïncidence surprenante, il vient $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge (absolument) et } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-1/2)^2} = 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.}$

2.1 Par opérations, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est de classe C^1 sur $]1;+\infty[$ et on trouve

$$\forall x > 1,\ f'(x) = \frac{-\big(1+\ln(x)\big)}{x^2\ln^2(x)} \leqslant 0.$$

La fonction f est donc décroissante sur l'<u>intervalle</u> $]1;+\infty[$.
En particulier, si $n \geqslant 2$, $a_n = f(n) \geqslant f(n+1) = a_{n+1}$, ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par produit et inverse, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.}$

On pouvait aussi étudier le signe de $a_{n+1} - a_n$ mais introduire f est utile pour la suite.

2.2 La fonction f étudiée précédemment est continue, décroissante et positive sur $[2;+\infty[$. D'après le théorème de comparaison séries-intégrales, on peut donc affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[2;+\infty[$ (ce qui signifie que $x \mapsto \int_2^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$). Or :

$$\int_2^x f(t)dt = \Big[\ln\big(\ln(t)\big)\Big]_2^x = \ln\big(\ln(x)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La fonction f n'est donc pas intégrable sur $[2;+\infty[$. On peut donc conclure que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 2} a_n \text{ diverge.}}$

Plus simplement, $a_k = f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(t)dt$, on somme pour $k \in [\![2;n]\!]$ et, par CHASLES, comme $a_1 = 0$, $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k = A_n \geqslant \int_2^{n+1} f(t)dt = [\ln(\ln(t))]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$. Par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$.

2.3 Tout d'abord, pour tout $n \geqslant 2$, $b_n = n\Big(\dfrac{1}{n\ln(n)} - \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\Big) = \dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}$.
Trouvons un équivalent du numérateur. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
(n+1)\ln(n+1) &\underset{n\to+\infty}{=} (n+1)\left[\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&\underset{n\to+\infty}{=} (n+1)\ln(n) + (n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + \ln(n) + 1 + o(1) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + \ln(n) + o\left(\ln(n)\right).
\end{aligned}$$

Il en résulte $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + o\left(\ln(n)\right)$ ou $\boxed{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$ On trouve par rapport d'équivalents que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} a_n$ car $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, on peut conclure que la série $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n \text{ est divergente.}}$

Ou alors $\dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{\ln(n)} = \dfrac{(n+1)\ln(n) + (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$

et, comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$ donc $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3 Il suffit de couper la somme en deux et de changer d'indice. Pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)a_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)a_k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (k-(k-1))a_k\right) - na_{n+1} \\
&= A_n - na_{n+1} = A_{n+1} - a_{n+1} - na_{n+1} \\
&= A_{n+1} - (n+1)a_{n+1}
\end{aligned}$$

donc on a bien $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ B_n = A_{n+1} - (n+1)a_{n+1} = A_n - na_{n+1}.}$

4.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(a_k)_{k \geqslant 1}$ est supposée décroissante, donc chacun des termes a_{n+1}, a_{n+2}, …, a_{2n} (et il y en a n) est supérieur ou égal à a_{2n}. On en déduit que : $\boxed{u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p \geqslant \sum_{p=n+1}^{2n} a_{2n} = na_{2n}.}$

4.2 La série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ est convergente, donc la suite de ses sommes partielles $(A_n)_{n \geqslant 1}$ admet une limite que nous noterons A. On sait alors que $(A_{2n})_{n \geqslant 1}$ tend aussi vers A en tant que suite extraite d'une suite convergente. Si $n \geqslant 1$, on a $u_n = A_{2n} - A_n$, par soustraction la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers $A - A = 0$.

Mais $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est constituée de réels positifs, ce qui permet alors d'utiliser la double inégalité $0 \leqslant na_{2n} \leqslant u_n$ de la question précédente pour conclure par encadrement que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} na_{2n} = 0.}$

Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $\alpha_n = na_n$. D'après la question précédente, la suite $(\alpha_{2n})_{n \geqslant 1}$ converge vers 0 car $\alpha_{2n} = 2(na_{2n})$. D'autre part, par décroissance de la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$, on peut écrire

$$0 \leqslant \alpha_{2n+1} = (2n+1)a_{2n+1} \leqslant (2n+1)a_{2n} = \alpha_{2n} + a_{2n}.$$

La série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge, donc son terme général tend vers 0. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} a_{2n} = 0$ (suite extraite) donc, par somme, $\lim_{n \to +\infty} (\alpha_{2n} + a_{2n}) = 0$. Par l'encadrement précédent, la suite $(\alpha_{2n+1})_{n \geqslant 0}$ converge vers 0. Les deux suites $(\alpha_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(\alpha_{2n+1})_{n \geqslant 0}$ convergent vers 0 donc, d'après le cours, la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ converge également vers 0, d'où $\boxed{\lim_{n \to +\infty} na_n = 0.}$

4.3 Puisque la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ est convergente, la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ converge. Par ailleurs, la suite $(na_n)_{n \geqslant 1}$ converge d'après la question 4.2, ainsi que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ (vers 0 bien sûr d'après la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$). La relation $B_n = A_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}$ permet donc d'affirmer que la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ converge, ce qui signifie que la série $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} b_n \text{ converge.}}$

Les deux suites $(na_n)_{n \geqslant 1}$ et $(a_n)_{n \geqslant 1}$ convergeant vers 0, il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $B_n = A_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}$ pour obtenir

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.}$$

5.1 D'après les calculs effectués à la question **3**, on peut écrire, pour tout $n \geqslant 1$,

$$B_n = A_n - na_{n+1}.$$

Pour $m \leqslant n$, on obtient donc :

$$B_n = A_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k - na_{n+1}.$$

Dans la somme, les $n - m$ termes sont tous supérieurs à a_{n+1} car la suite $(a_k)_{k \geqslant 1}$ est décroissante. Par conséquent, il vient

$$\boxed{B_n \geqslant A_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_{n+1} - na_{n+1} = A_m + (n-m)a_{n+1} - na_{n+1} = A_m - ma_{n+1}.}$$

$\boxed{5.2}$ Faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente : on le peut car $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0. On obtient :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \geqslant A_m.$$

Tous les termes de la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ étant majorés par $B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, on peut conclure que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \text{ est convergente}}$ car c'est une série de termes positifs. La convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ nous permet d'appliquer les résultats de la question 4, ce qui conduit à nouveau à l'égalité

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.}$$

Conclusion : avec les questions 4, 5, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et de limite nulle, on a l'équivalence $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge si et seulement si } \sum\limits_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge.}}$ Si elles convergent, $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n.}$

$\boxed{6}$ Notons $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. On sait (séries géométriques) que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n$. Comme $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est clairement croissante, on a même : $\forall n \geqslant 0,\ T_n \leqslant 2$. Soit $n \geqslant 1$:

- si n est une puissance de 2, posons $n = 2^p$ avec $p \geqslant 0$. On a alors $A_n = A_{2^p} = \sum\limits_{k=1}^{2^p} a_k = \sum\limits_{j=0}^{p} \frac{1}{2^j} = T_p$ par définition de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ donc $A_n = T_p \leqslant 2$.
- Si n n'est pas une puissance de 2, on peut l'encadrer entre deux puissances de 2. En effet, prenons $p = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$, alors $p = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor \leqslant \frac{\ln n}{\ln 2} < \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor + 1 = p+1$ donc, en passant à l'exponentielle, on obtient $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$. Alors, comme $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi croissante car $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est à termes positifs, $A_n \leqslant A_{2^{p+1}} = T_{p+1} \leqslant 2$.

Dans tous les cas, la suite croissante $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ. Mais comme une de ses suites extraites, à savoir $(A_{2^p})_{p\geqslant 0}$, tend vers 2, on a $\ell = 2$ par unicité de la limite.

En conclusion, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge et } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = 2.}$ Pour $n \geqslant 1$, $B_{2^n} = A_{2^n} - 2^n a_{2^n+1} = A_{2^n}$ d'après la question **3** car 2^n+1 n'est pas une puissance de 2. Ainsi, $(B_{2^n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 2. De plus, pour $n \geqslant 1$, $B_{2^n-1} = A_{2^n-1} - (2^n-1)a_{2^n} = A_{2^n-1} - \frac{2^n-1}{2^n}$, or la suite extraite $(A_{2^n-1})_{n\geqslant 1}$ tend aussi vers 2 d'après ce qui précède, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} B_{2^n-1} = 2-1 = 1$.

On vient de trouver deux suites extraites de $(B_n)_{n\geqslant 1}$, à savoir $(B_{2^n})_{n\geqslant 1}$ et $(B_{2^n-1})_{n\geqslant 1}$, qui convergent vers des limites différentes, on en déduit que $(B_n)_{n\geqslant 1}$ diverge, donc que $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n \text{ diverge.}}$

Contrexemple : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et de limite nulle mais pas supposée décroissante, on vient de trouver un contrexemple à la conclusion précédente : les deux séries ne sont plus forcément de même nature.