

TD 01 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2025-2026

vendredi 5 septembre 2025

- 1.1 a.** Soit β tel que $1 < \beta < \alpha$, posons $v_n = n^\beta u_n > 0$, alors $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \beta \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ donc
- $$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ car } \ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x). \text{ Comme } \beta - \alpha < 0,$$
- la suite $(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ devient négative à partir d'un certain rang et $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\beta - \alpha}{n}$.

Par comparaison à la série harmonique, $\sum_{n \geq 0} (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ diverge et on a même plus précisément

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)) = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n) = -\infty$ par télescopage. On en déduit en passant à l'exponentielle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc que $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ ce qui garantit la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ par comparaison aux séries de RIEMANN.

b. Dans la même idée, posons $v_n = nu_n > 0$, alors $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ donc

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \text{ Comme } 1 - \alpha > 0, \text{ la suite}$$

$(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ devient positive à partir d'un certain rang n_0 donc $\forall n \geq n_0, v_{n+1} \geq v_n$. On en déduit que $\forall n \geq n_0, v_n \geq v_{n_0}$ d'où $u_n \geq \frac{n_0 u_{n_0}}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge par comparaison à la série harmonique.

c. Posons cette fois-ci $v_n = n^\alpha u_n > 0$, alors $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ donc il vient $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + O(x^2)$. Comme $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on en déduit la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$. Par le théorème de dualité suite/série, on a donc la convergence de la suite $(\ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ vers un réel ℓ d'où, par continuité de la fonction $\exp$, la convergence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $A = e^\ell > 0$. Ceci nous permet de conclure que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$.

d. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge avec la question **b.** et il existe même une constante $A > 0$ telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt{n}}$ d'après la question **c.**

Plus simplement, on utilise l'équivalent de STIRLING pour avoir $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}(2n/e)^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)(n/e)^{2n}}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec une conclusion plus précise. Toujours est-il que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge par RIEMANN.

- 1.2 a.** Si $\ell > 1$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell > 1$ il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \sqrt[n]{u_n} \geq 1$ ce qui donne aussi $u_n \geq 1$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et $\sum_{n \geq 0} u_n$ divergente grossièrement.

b. Si $\ell < 1$, en posant $k = \frac{1+\ell}{2}$, $\ell < k < 1$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \sqrt[n]{u_n} \leq k \implies 0 \leq u_n \leq k^n$. Et comme $\sum_{n \geq 0} k^n$ converge, on a bien $\sum_{n \geq 0} u_n$ convergente par comparaison aux séries géométriques.

c. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$, on a $\sqrt[n]{u_n} = n^{-\frac{\alpha}{n}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell = 1$ alors qu'on ne peut rien dire de la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$. En effet, par RIEMANN, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

1.3 a. Si $\sum_{n \geq 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}} = 0$. Comme $a_n = \left(a_n^{1-\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} = e^{\frac{n}{n-1} \ln(a_n^{1-\frac{1}{n}})}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1} = 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n^{1-\frac{1}{n}}) = -\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0.$$

Ainsi $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \leq 1$ et $a_n \leq a_n^{1-\frac{1}{n}}$ car $1 - \frac{1}{n} \leq 1$ donc $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ln(a_n) \geq \ln(a_n)$ car $\ln(a_n) \leq 0$ et que la fonction $\exp$ est croissante. On conclut à la convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n$ par comparaison.

b. D'abord, les conditions définissant l'appartenance à I et J sont la négation l'une de l'autre donc $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J = \mathbb{N}^*$. Les ensembles I et J constituent donc une partition de $\mathbb{N}^*$. Traitons les deux cas :

Si $n \in I$, on a $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \lambda a_n$ par définition.

Si $n \in J$, on a $a_n^{1-\frac{1}{n}} > \lambda a_n \iff a_n^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\lambda} \iff a_n^{1-\frac{1}{n}} < \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}$ car $a_n > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(\lambda a_n, \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}\right) \leq \lambda a_n + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}$. La série $\sum_{n \geq 1} \lambda a_n$ converge par hypothèse et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}$ converge car $0 < \frac{1}{\lambda} < 1$ donc, par somme et comparaison,

$\sum_{n \geq 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge aussi. En sommant l'inégalité obtenue pour $n \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \lambda \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right) + \frac{\lambda}{\lambda-1}$.

c. Les deux séries $\sum_{n \geq 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ et $\sum_{n \geq 1} a_n$ sont donc de même nature d'après les questions a. et b.. On suppose

que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et on note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n > 0$. Soit $\varphi :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\lambda) = \lambda S + \frac{\lambda}{\lambda-1}$. φ est dérivable sur $]1; +\infty[, \lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$. Or $\varphi'(\lambda) = S - \frac{1}{(\lambda-1)^2}$. En étudiant les variations

de φ , on se rend compte que φ est minimale en $\lambda_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{S}}$ et comme $S' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \varphi(\lambda_0)$, on a

$S' \leq (\sqrt{S} + 1)^2$, ce qui se traduit par l'inégalité attendue, à savoir $\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}} \leq 1 + \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$.

1.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est dérivable et

que $\forall x \in \mathbb{R}_+, P'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} > 0$. Comme $P_n(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$, P_n induit une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $[-1; +\infty[$ d'après le théorème du même nom donc il existe bien un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $P_n(x_n) = 0$ et on a même $x_n > 0$ car $P_n(x_n) = 0 > -1 = P_n(0)$. Comme $P_1(x) = x - 1$ et $P_2 = x^2 - x - 1$, on a $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ car le discriminant de P_2 vaut $\Delta = 5$ et que $x_2 > 0$.

On constate que $\forall x \geq 0, P_n(x) \leq P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1}$. Ainsi $P_n(x_{n+1}) \leq P_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = P_n(x_n)$. Comme P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $x_{n+1} \leq x_n$ et la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [0; 1[$ d'après le théorème de la limite monotone. Si $n \geq 2, P_n(1) > 0 = P_n(x_n)$ donc $x_n \in]0; 1[$ par stricte croissance de P_n . On a alors

$$P_n(x_n) = x_n \left(\frac{1 - x_n^n}{1 - x_n} \right) - 1 = \frac{2x_n - 1 - x_n^{n+1}}{1 - x_n} \text{ car } x_n \neq 1 \text{ donc } 2x_n - 1 - x_n^{n+1} = 0 \text{ (1).}$$

Or $\forall n \geq 2, x_n \leq x_2$ donc $0 \leq x_n^{n+1} < x_2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $0 < x_2 < 1$ et on en déduit par encadrement que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{n+1} = 0$. En passant à la limite (elles existent) dans (1), on a $2\ell - 1 = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

1.5 a. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - 1$. Il est clair que f est croissante. On montre par une petite étude de fonction, ou par convexité de la fonction $\exp$, que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$, c'est-à-dire $f(x) \geq x$ et que $f(x) = x \iff x = 0$. Pour toute valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie et croissante car elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$. Il y a alors deux cas :

- Si $u_0 \leq 0$. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 0$, alors $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - 1 \leq 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0 donc elle converge vers $\ell \leq 0$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, par continuité de f , on a $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = 0$ d'après ce qui précède. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $u_0 > 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore croissante. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ , alors forcément $\ell \geq u_0 > 0$. À nouveau, on aurait $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = 0$: impossible. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1 > x$, $(v_n)_{n \geq 0}$ est bien définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n)$. De plus, si $v_n > 0$, $e^{v_n} - v_n > 1$ donc $v_{n+1} > \ln(1) = 0$. La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est donc strictement positive. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n) < \ln(e^{v_n}) = v_n$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi strictement décroissante. Comme elle est décroissante et minorée par 0, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$. En passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n)$, on obtient $\ell = \ln(e^\ell - \ell)$ d'où $e^\ell = e^\ell - \ell$ donc $\ell = 0$. Enfin, $v_n = e^{v_n} - e^{v_{n+1}}$, or $(e^{v_n})_{n \geq 0}$ converge vers 1 donc, par dualité suite/série, $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge. Or, par télescopage, $\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n (e^{v_k} - e^{v_{k+1}}) = e^{v_0} - e^{v_{n+1}}$, en passant à la limite, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = e - 1$.

1.6 a. Pour $n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante car $\forall x \geq 0, f'_n(x) = (1+x)e^x > 0$. De plus, par croissances comparées, $f_n(0) = -n < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. Par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-n; +\infty[$ donc $\exists! u_n > 0, f_n(u_n) = 0$ car $0 \in [-n; +\infty[$ et $f_n(0) \neq 0$.

b. Soit $n \geq 3$, on a $f_n(1) = e - n < 0$ car $e \sim 2,72$ et $f_n(\ln(n)) = n \ln(n) - n = n(\ln(n) - 1) > 0$ car $n > e$ donc $f_n(1) < f_n(u_n) < f_n(\ln(n))$ et on conclut par stricte croissance de f_n que $1 < u_n < \ln(n)$.

Comme $u_n e^{u_n} = n$, on obtient $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$ donc $0 \leq \ln(n) - u_n = \ln(u_n) \leq \ln(\ln(n))$. Or, par croissances comparées, $\ln(\ln(n)) = o(\ln(n))$ donc, par encadrement, $\ln(n) - u_n = o(\ln(n))$ ce qui est la définition de l'équivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

c. Comme $u_n - \ln n = -\ln(u_n)$, on peut espérer montrer que $u_n - \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(\ln(n))$. On étudie donc $u_n - \ln(n) + \ln(\ln(n)) = \ln\left(\frac{\ln(n)}{u_n}\right)$ qui tend vers 0 car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{u_n} = 1$ par la question précédente. Ainsi, $u_n - \ln(n) + \ln(\ln(n)) = o(1) = o(\ln(\ln(n)))$ ce qui, encore une fois, se traduit par $u_n - \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(\ln(n))$.

1.7 a. Par construction, on a $u_n > 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est bien défini. De plus, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - \ln(n+1) - 1$ après simplifications. Alors, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge absolument donc converge.

b. Comme $\sum_{n \geq 1} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge, par dualité suite-série, la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel k . Par continuité de l'exponentielle, comme $u_n = \exp(\ln(u_n))$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers

$c = e^k > 0$. Par conséquent, $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} \underset{+\infty}{\sim} c$, ce qui équivaut à $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ avec $C = \frac{1}{c} > 0$.

c. On sait d'après la formule de STIRLING que $C = \sqrt{2\pi}$. Pour le montrer, on définit, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale de WALLIS $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$, qui est bien définie car $f_n : I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(t) = \sin^n(t)$ est continue sur le segment I . De plus, $\forall t \in I$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$ donc $0 \leq f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$ ce qui, par croissance de l'intégrale, donne $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc positive et décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $u : t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $v : t \mapsto (-\cos(t))$ dans $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t) dt$, comme u et v sont de classe C^1 sur I , on a $W_{n+2} = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos^2(t)\sin^n(t) dt$ donc $W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ ce qui montre que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

Ainsi, $(n+2)W_{n+1}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}$ donc la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et, comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

Pour $n \geq 1$, comme $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$, en multipliant par W_n , on a $W_nW_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_{n-1}W_n$ donc $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq W_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$ car $W_n \geq 0$. Par encadrement, on a donc $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n-1)}{2n} W_{2n-2} = \dots = \frac{(2n-1) \times \dots \times 1}{(2n) \times \dots \times 2} W_0 = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}$. D'après la

question **b.**, on a $W_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \pi}{2^{2n+1} \left(C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}$ après simplifications. Mais d'après ce qui précède,

on a $W_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Par conséquent, on a $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{C}$ ce qui donne $C = \sqrt{2\pi}$ et on retrouve la formule de STIRLING bien connue : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

1.8 La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie car $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $1 + a_k > 0$ par hypothèse.

a. Initialisation : D'abord, $u_1 = \frac{a_1}{1+a_1} = 1 - \frac{1}{1+a_1}$. De plus, comme $(1+a_1)(1+a_2) = a_1 + a_1a_2 + a_2 + 1$, on a la relation $u_1 + u_2 = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} = \frac{a_1 + a_1a_2 + a_2 + 1 - 1}{(1+a_1)(1+a_2)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$.

Hérédité : soit $n \geq 1$, supposons que $\sum_{k=1}^n u_k = 1 - \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k}$. Alors $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=1}^n u_k\right) + u_{n+1}$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} + a_{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1+a_k}$ par hypothèse de récurrence et définition de u_{n+1} . Ainsi, en regroupant les deux derniers termes, $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \frac{1 + a_{n+1} - a_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1} (1+a_k)} = 1 - \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1+a_k}$.

Par principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n u_k = 1 - \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k}$.

b. Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs, la suite $\left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante donc convergente par le théorème de la limite monotone car elle est minorée par 0. Ainsi, d'après **a.**, la suite de ses sommes partielles étant convergente, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

c. Posons, $v_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} > 0$. D'après b., $\sum_{k=1}^n u_k = 1 - v_n$. Or on a $\ln(v_n) = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Comme $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge par RIEMANN, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{k \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ diverge, ses sommes partielles tendent donc vers $+\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n) = -\infty$. Ainsi, puisque $v_n = e^{\ln(v_n)}$, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, par composition des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Par conséquent, si on suppose que $\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

- 1.9** a. $x_1 > 0$ par hypothèse. Soit $n \geq 1$ tel que $x_n > 0$ est bien défini, alors $x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n} > 0$ est aussi bien défini. Par principe de récurrence, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et strictement positive. De plus, $\forall n \geq 1, x_{n+1} - x_n = \frac{n}{x_n} > 0$ donc $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante. D'après le théorème de la limite monotone, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Si on avait $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$, comme $\ell \geq x_1 > 0$ car $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{x_n} = +\infty$ alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = \ell - \ell = 0$, ce qui est absurde. On en déduit donc que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.
- b. Soit $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \frac{n}{x}$ de sorte $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = f_n(x_n)$. Les fonctions f_n sont dérivables par théorèmes généraux sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x^2}$ donc, en traçant le tableau de variations de f_n , cette fonction est décroissante sur $]0; \sqrt{n}]$ et croissante sur $[\sqrt{n}; +\infty[$. Ainsi, $\text{Min}_{\mathbb{R}_+^*} f_n = f_n(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n}$.

Initialisation : comme $x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} = f_1(x_1)$ et que $\text{Min}_{\mathbb{R}_+^*} f_1 = 2$, on a $x_2 = f_1(x_1) \geq 2\sqrt{1} = 2$.

Hérédité : soit un entier $n \geq 2$ tel que $x_n \geq n$, comme $n \geq \sqrt{n}$ et que la fonction f_n est croissante sur $[\sqrt{n}; +\infty[$, on obtient $x_{n+1} = f_n(x_n) \geq f(n) = n + 1$.

Par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall n \geq 2, x_n \geq n$.

De plus, comme on vient de montrer que $\forall k \geq 2, \frac{k}{x_k} \leq 1$, pour tout entier $n \geq 2$, on obtient la majoration

$$x_n - x_2 = \sum_{k=2}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k}{x_k} \leq \sum_{k=2}^{n-1} 1 = n - 2 \text{ par télescopage de sorte que } x_n \leq x_2 + n - 2.$$

Comme $\forall n \geq 2, n \leq x_n \leq x_2 + n - 2$ et que $x_2 + n - 2 \underset{+\infty}{\sim} n$, on a $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$ par encadrement.

c. Posons $u_n = x_n - n$ pour tout entier $n \geq 2$. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive. Comme $u_{n+1} - u_n = x_{n+1} - x_n - 1 = \frac{n}{x_n} - 1 = \frac{n - x_n}{x_n} \leq 0$ d'après b. donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, par le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{R}_+$, on a donc $u_n = c + o(1)$ donc $x_n = n + c + o(1)$ comme attendu.

d. On a $u_{n+1} - u_n = x_{n+1} - x_n - 1 = \frac{n - x_n}{x_n}$. Si on avait $c \neq 0$, alors on aurait $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{c}{n}$ donc, par comparaison à la série harmonique, la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ divergerait et, par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ divergerait aussi, contredisant le résultat de la question précédente. On peut donc conclure que $c = 0$, ce qui s'écrit $x_n \underset{+\infty}{=} n + o(1)$.

1.10 a. Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n + x\sqrt{n} - 1$. La fonction polynomiale f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\forall x \geq 0$, $f'_n(x) = nx^{n-1} + \sqrt{n} \geq \sqrt{n} > 0$. Ainsi, la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $f(0) = -1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ donc, par le théorème de la bijection continue, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-1; +\infty[$ donc il existe un unique $x_n \in]0; +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b. Comme $f_1(x) = 2x - 1$, on a $x_1 = \frac{1}{2}$. Puisque $f_2(x) = x^2 + x\sqrt{2} - 1$, on a $x_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \sim 0,52$.

La monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ ne peut donc pas servir ici, ou alors à partir d'un certain rang. Par contre, comme $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > 0 = f_n(x_n) > -1 = f_n(0)$, on en déduit que $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ par stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ par encadrement.

c. Par construction, $f_n(x_n) = 0$ donc $\sqrt{n}x_n = 1 - x_n^n$. Mais $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $0 < x_n^n < \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ ce qui prouve que $x_n^n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Par conséquent, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{x_n^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ce qui montre que $x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par comparaison aux séries de RIEMANN, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} x_n$ diverge car $\frac{1}{2} \leq 1$.