TD 00 : E3A 2003 PSI EXERCICE 1

PSI 1 2025-2026 **vendredi 05 septembre 2025**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de réels. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $b_n = n(a_n - a_{n+1})$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *et* $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

1 *On prend* **dans cette question**, *pour tout* $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1.1 Vérifier que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolument et calculer sa somme.

1.2 En constatant que $\sum\limits_{k=1}^{n} kX^{k-1}$ est la dérivée du polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} X^k$, déterminer une expression compacte de $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1;1[$.

1.3 Justifier que $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme en utilisant la question précédente.

2 *On prend* **dans cette question**, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ *pour* $n \geqslant 2$ *et* $a_1 = 0$.

2.1 Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

2.2 Quelle est (on justifiera) la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$?

Indication : appliquer le théorème de comparaison série-intégrale.

2.3 Montrer que $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$?

On revient pour la suite du devoir au cas général.

3 Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ B_n = A_n - na_{n+1}$ (ce qui équivaut à $B_n = A_{n+1} - (n+1)a_{n+1}$).

4 *On suppose* **ici** *que* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *converge et que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite décroissante de réels positifs.*

4.1 Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na_{2n} \leqslant u_n$.

4.2 En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$. Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

4.3 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge. A-t-on $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

5 *On suppose* **ici** *que* $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ *converge et que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est positive, décroissante et de limite nulle.*

5.1 Vérifier que pour tout entier m tel que $m \leqslant n$, on a $B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}$.

5.2 En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Peut-on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

6 Question subsidiaire : soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $a_n = \dfrac{1}{n}$ si n est une puissance de 2 et $a_n = 0$ sinon.

Par exemple, $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \dfrac{1}{4}$, $a_5 = a_6 = a_7 = 0$, $a_8 = \dfrac{1}{8}$, $a_9 = a_{10} = 0$, etc....

Justifier que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Que vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$? Est-ce que $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge ?