PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 01

PSI 1 2025-2026 **du lundi 15/09 au vendredi 19/09**

1 Séries numériques, propriétés :

- définition, série convergente, divergente, somme partielle et reste d'une série convergente ;
- opérations algébriques sur les séries convergentes (et leurs sommes), divergentes ;
- condition nécessaire de convergence ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$) : divergence grossière ;
- équivalence entre convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$;
- pour les séries complexes, passage par les parties réelles et imaginaires ;
- séries de Riemann et séries géométriques : CNS de convergence, somme, équivalent ;

2 Séries à termes positifs :

- une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée ;
- théorème de comparaison : majoration, grand O, équivalence entre les termes ;
- définition de la constante d'Euler par la série harmonique et équivalent de Stirling ;
- règle de d'Alembert ; cas pratique $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n$ selon les cas ; comparaison logarithmique (HP) ;
- comparaison série-intégrale : équivalence entre convergence d'une intégrale et d'une série ;
- séries de Bertrand : connaître les arguments même si c'est censé être hors programme ;
- équivalent des sommes partielles ou des restes d'une série de Riemann selon les cas ;

3 Séries à termes réels ou complexes :

- convergence absolue d'une série, espace $\ell^1(\mathbb{K})$, absolue convergence d'une série complexe à l'aide de celle de ses parties réelles et imaginaires ;
- toute série absolument convergente est convergente ; la réciproque est fausse ; semi-convergence ;
- critère spécial des séries alternées : majoration du reste ;
- utilisation des développements limités pour déterminer la nature des séries de signe variable ;
- transformation d'Abel (HP) : condition suffisante de convergence ;
- produit de Cauchy de deux séries : définition et exemples ;
- le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergente et admet pour somme le produit des deux sommes des deux séries ;
- fonction exponentielle sous forme de série (reconnaissance plus tard) ;
- définition des produits infinis et de leur convergence (HP) : exemples ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir le produit de Cauchy de deux séries (défi. 1.6)
2 énoncer les différentes implications sur la "linéarité" de la convergence des séries (prop. 1.3)
3 énoncer le théorème de comparaison version séries à termes positifs (th. 1.9)
4 énoncer le théorème de comparaison version séries à termes quelconques (th. 1.12)
5 énoncer les résultats sur le développement asymptotique de H_n et l'équivalent de Stirling (rem. 1.23 et th. 1.16)
6 énoncer le critère spécial des séries alternées (th 1.18)
7 énoncer le théorème sur la relation entre les produits de Cauchy et les séries (th. 1.20)
8 prouver le théorème sur la dualité suite/série (th. 1.5)
9 prouver que si $u_n > 0$ et $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a < 1$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge (rem. 1.25)
10 prouver la règle de d'Alembert (th. 1.17)

Prévision pour la prochaine semaine : séries numériques et révisions d'algèbre linéaire