CHAPITRE 1
SÉRIES NUMÉRIQUES

⊙ La considération de véritables sommes infinies est une question étroitement liée à celle du passage à la limite. L'absence persistante de concepts satisfaisants engendra de nombreuses interrogations et spéculations, à l'exemple des paradoxes de Zénon. On trouve néanmoins déjà chez Archimède (quadrature de la parabole) les premières sommations explicites, avec les progressions géométriques.

En Angleterre, Richard Suiseth (XIVe siècle) calcule la somme de la série de terme général $\frac{n}{2^n}$ et son contemporain français Nicolas Oresme établit la divergence de la série harmonique. À la même époque, le mathématicien et astronome indien Madhava est le premier à considérer des développements de fonctions trigonométriques, sous forme de séries de Taylor, séries trigonométriques pour l'approximation de π.

Au XVIIe siècle, James Gregory redécouvre plusieurs de ces résultats, notamment le développement des fonctions trigonométriques en séries de Taylor et celui de la fonction arc-tangente permettant le calcul de π. En 1715, Brook Taylor, en donnant la construction générale des séries qui portent son nom, établit un lien fructueux avec le calcul différentiel. Au XVIIIe siècle également, Leonhard Euler établit de nombreuses relations remarquables portant sur des séries, notamment la très célèbre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En 1821, Cauchy établit le premier une théorie rigoureuse, il énonce avant Riemann la règle de convergence des séries qui portent son nom.

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

Cette section a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.

L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

1 : Compléments sur les séries numériques

Contenus	Capacités & Commentaires
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	La démonstration n'est pas exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

D'abord un bref rappel de résultats sur les suites réelles et complexes :

EN PRATIQUE :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite :

- *On trouve $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telles que $u_n = v_n w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
- *On trouve $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $\ell \in \mathbb{R}$ telles que $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*
- *On trouve $\ell \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 tels que $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*
- *On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée ou décroissante et minorée.*
- *On trouve $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.*
- *On trouve $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ telle que $u_n \geqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
- *On trouve $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $-\infty$ telle que $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge :

- *On trouve une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge.*
- *On trouve deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers des limites différentes.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe ℓ :

- *On trouve $\ell \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 tels que $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*
- *On montre que $(\mathrm{Re}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Re}\,(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$ respectivement.*

PARTIE 1.1 : COMPARAISON DES SUITES

DÉFINITION 1.1 :

Soit deux suites réelles ou complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec la suite* v *qui ne s'annule pas :*

- *On dit que* u *est* **négligeable devant** v*, noté* $u \underset{\infty}{=} o(v)$*, ou* $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$ *si l'on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$*, on dit que* u *est un* **"petit O"** *de* v *(au voisinage de* $+\infty$*).*
- *On dit que* u *est* **dominée par** v*, noté* $u \underset{\infty}{=} O(v)$*, ou* $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$ *si* $\frac{u}{v}$ *bornée (*$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée), on dit que* u *est un* **"grand O"** *de* v*.*
- *On dit que* u *est* **équivalente à** v*, noté* $u \underset{+\infty}{\sim} v$*, ou* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *si l'on a* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n/v_n) = 1$*.*

THÉORÈME 1.1 :

On se donne des suites u, v, w, z, t (certaines ne doivent pas s'annuler) et des scalaires λ et μ :

(i) $u_n \underset{\infty}{=} O(u_n)$ **et** $u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

(ii) $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$ **et** $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

(iii) $\big(u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)\big) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(w_n)$ **et** $\big(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ **et** $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n\big) \Longrightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$.

(iv) $\big(u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)\big) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$ **et** $\big(u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} o(w_n)\big) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$.

(v) $\big(u_n \underset{\infty}{=} O(w_n)$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)\big) \Longrightarrow \lambda u_n + \mu v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)$ **et**
$\big(u_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} o(w_n)\big) \Longrightarrow \lambda u_n + \mu v_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$.

(vi) $\big(u_n \underset{\infty}{=} O(z_n)$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} O(t_n)\big) \Longrightarrow u_n v_n \underset{\infty}{=} O(z_n t_n)$ **et** $\big(u_n \underset{+\infty}{\sim} z_n$ **et** $v_n \underset{+\infty}{\sim} t_n\big) \Longrightarrow u_n v_n \underset{+\infty}{\sim} z_n t_n$.

(vii) $\big(u_n \underset{\infty}{=} o(z_n)$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} O(t_n)\big) \Longrightarrow u_n v_n \underset{\infty}{=} o(z_n t_n)$ **et**
$\big(u_n \underset{\infty}{=} O(z_n)$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} o(t_n)\big) \Longrightarrow u_n v_n \underset{\infty}{=} o(z_n t_n)$.

(viii) $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow \frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$ **et** $\big(u_n \underset{+\infty}{\sim} z_n$ **et** $v_n \underset{+\infty}{\sim} t_n\big) \Longrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{z_n}{t_n}$.

(ix) $\big(u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$ **et** $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **strictement croissante** $\big) \Longrightarrow u_{\varphi(n)} \underset{\infty}{=} o(v_{\varphi(n)})$.

(x) $\big(u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$ **et** $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **strictement croissante** $\big) \Longrightarrow u_{\varphi(n)} \underset{\infty}{=} O(v_{\varphi(n)})$.

(xi) $\big(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ **et** $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **strictement croissante** $\big) \Longrightarrow u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

(xii) $\big(u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$ **et** $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n\big) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$ **et** $\big(u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$ **et** $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n\big) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(w_n)$.

(xiii) $\big(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} o(w_n)\big) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$ **et** $\big(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ **et** $v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)\big) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(w_n)$.

(xiv) $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \underset{\infty}{=} o(u_n) \Longleftrightarrow v_n - u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$.

(xv) $\lim\limits_{\infty}(u_n - v_n) = 0 \Longleftrightarrow e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

Si u et v sont des suites strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}$:

(xvi) **Si** $\alpha > 0$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$, $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n) \Longleftrightarrow u_n^\alpha \underset{\infty}{=} O(v_n^\alpha)$ **et** $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \Longleftrightarrow u_n^\alpha \underset{\infty}{=} o(v_n^\alpha)$.

(xvii) **Si** $\alpha < 0$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$, $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n) \Longleftrightarrow v_n^\alpha \underset{\infty}{=} O(u_n^\alpha)$ **et** $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \Longleftrightarrow v_n^\alpha \underset{\infty}{=} o(u_n^\alpha)$.

(xviii) $\big(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ **et** $\lim\limits_{\infty} u_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+} \setminus \{1\}\big) \Longrightarrow \ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

REMARQUE 1.1 :

- *La propriété (v) du théorème suivant nous dit que l'ensemble des suites dominées par une suite fixe* v *est un espace vectoriel ; même chose pour les fonctions négligeables devant* v*.*
- *La propriété (xviii) ne doit pas être utilisée telle quelle car hors programme, on peut souvent s'en passer comme pour montrer que* $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$*.*

EXEMPLE 1.1 : • $n^{10} \underset{+\infty}{=} o(2^n)$ et $\big(\ln(n)\big)^5 \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{n})$ d'après les croissances comparées.

• Si on note p_n le n-ième nombre premier et $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n, alors il a été prouvé en 1896 qu'on avait $p_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$ et $\pi(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

REMARQUE 1.2 : Quelques implications :

- $u_n \underset{\infty}{=} O(1)$ *est équivalent à* u *est bornée.*
- $u_n \underset{\infty}{=} o(1)$ *est équivalent à* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ *impliquent* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

REMARQUE 1.3 : Avec la notation $\ll$ *de* HARDY *qui est équivalente à* o : $u_n \ll v_n \Longleftrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$ *et en prenant douze réels :* $0 < b' < a' < 1 < a < b$, $\delta' < \gamma' < 0 < \gamma < \delta$, $\beta' < \alpha' < 0 < \alpha < \beta$, *on a :*
$b'^n \ll a'^n \ll n^{\delta'} \ll n^{\gamma'} \ll \ln^{\beta'} n \ll \ln^{\alpha'} n \ll 1 \ll \ln^{\alpha} n \ll \ln^{\beta} n \ll n^{\gamma} \ll n^{\delta} \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n$.

REMARQUE HP 1.4 : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels strictement positifs telles que* $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. *On peut alors conclure que :* $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$ *(comparaison logarithmique).*

PARTIE 1.2 : RÉVISIONS SUR LES SÉRIES

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

1.2.1 : Définitions et exemples

DÉFINITION 1.2 :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathbb{K}$, *on dit que la* **série de terme général** u_n, *notée* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, *ou* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *ou même* $\sum u_n$, *est une* **série convergente** *si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *définie par* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, *est elle-même convergente. Dans le cas contraire, on dit que la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est une* **série divergente**.

S_n *est appelé* **somme partielle d'ordre** n *de la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, on appelle* **somme de la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, *notée* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, *la limite* $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. *Dans ce cas, on définit, pour* $n \in \mathbb{N}$, *le* **reste d'ordre** n *de la série par* $R_n = \left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_p\right) - S_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

EXEMPLE 1.2 : • La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e$.

• La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

• La **série harmonique** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

1.2.2 : Conditions de convergence

PROPOSITION SUR LES RESTES DE SÉRIES CONVERGENTES 1.2 :
On a une "réciproque" : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = S_n - S_{n-1}$ **avec la convention** $S_{-1} = 0$.
Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$. **De plus,** $\forall n \geqslant -1,\ S = S_n + R_n$ **avec** $R_{-1} = S$.

<u>*REMARQUE 1.5*</u> *: Si* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *n'est définie qu'à partir de* $n_0 \in \mathbb{N}^*$*, on considère la série* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ *; si elle converge, sa somme est notée* $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$*. Par exemple les séries de* RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION SUR LA "LINÉARITÉ" DE LA CONVERGENCE DE SÉRIES 1.3 :
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **deux suites d'éléments de** $\mathbb{K}$ **:**

(i) Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ **convergent :** $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ **converge et** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(ii) Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **est convergente :** $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\lambda u_n)$ **converge et** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

(iii) Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ **diverge :** $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ **diverge.**

<u>*REMARQUE 1.6*</u> *:* • *On ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes.*

• *L'application "somme"* $S\ :\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est une forme linéaire sur le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *constitué par les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*

PROPOSITION SUR UNE CONDITION NÉCESSAIRE DE CONVERGENCE 1.4 :
<u>Si</u> la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge <u>alors</u> la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** 0.

<u>*REMARQUE 1.7*</u> *:* • **La réciproque est fausse** *comme en témoigne la série harmonique.*

• *Une série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *telle que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend même pas vers* 0 *est dite* **grossièrement divergente**.

THÉORÈME SUR LA DUALITÉ SUITE/SÉRIE (ÉNORME) 1.5 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$**, on a l'équivalence :** $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge**$\big) \iff \big(\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ **converge**$\big)$.

<u>*REMARQUE 1.8*</u> *: En cas de convergence ci-dessus,* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \big(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\big) - u_0$.

<u>***EXERCICE 1.3***</u> ***:*** Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$. Indication : on pourra montrer que pour deux réels a et b tels que $a > b > 0$, on a $\mathrm{Arctan}(a) - \mathrm{Arctan}(b) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.

PROPOSITION SUR LES SÉRIES COMPLEXES 1.6 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes :

(i) $\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge}\right) \Longleftrightarrow \left(\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n) \text{ convergent}\right)$.

(ii) Dans ce cas, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

<u>REMARQUE 1.9</u> : Cela ne doit pas nous faire perdre de vue qu'on peut montrer la convergence d'une série à terme général complexe sans passer par les parties réelle et imaginaire.

EN PRATIQUE : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, pour montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge :

- *On trouve $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers ℓ telle que $u_n = v_n - v_{n+1}$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = v_0 - \ell$.*
- *On exprime $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ comme la somme de deux séries convergentes.*
- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complexe, on montre que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, pour montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge :

- *On justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.*
- *On trouve $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente telle que $u_n = v_n - v_{n+1}$.*
- *On exprime $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ comme la somme d'une série convergente et d'une série divergente.*
- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complexe, on montre que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ diverge.*

<u>EXERCICE 1.4</u> : Convergence et valeur de la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

PROPOSITION SUR LES SÉRIES GÉOMÉTRIQUES 1.7 :
Soit $a \in \mathbb{C}$, à propos des séries géométriques :

(i) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n$ **converge si et seulement si** $|a| < 1$.

(ii) Si $|a| < 1$ **alors** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$ **et** $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a^k = \dfrac{a^{n+1}}{1-a}$.

1.2.3 : Comparaison de deux séries positives

<u>REMARQUE 1.10</u> : On convient, dans $[0;+\infty]$, de prolonger les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}_+$ en ajoutant :

- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ *si* $a \in \mathbb{R}_+$ *pour l'addition*
- $0 \times (+\infty) = 0$, $a \times (+\infty) = (+\infty) \times a = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ *si* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *pour la multiplication.*

La relation d'ordre $\leqslant$ est aussi prolongée sur $[0;+\infty]$ en convenant que $a \leqslant +\infty$ si $a \in \mathbb{R}_+$.

DÉFINITION 1.3 :
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, on note alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

PROPOSITION SUR UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE CONVERGENCE DES SÉRIES A TERMES POSITIFS 1.8 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs :

(i) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

(ii) Si c'est le cas : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$; sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

REMARQUE 1.11 : • On a un résultat analogue pour les suites réelles à valeurs négatives.

• Cette équivalence est valable même si le terme général u_n n'est positif qu'à partir d'un certain rang n_0 : mais si la série converge on a seulement $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname{Sup}\limits_{n\geqslant n_0} S_n$ et pas forcément $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

EXERCICE 1.5 : Rappeler sans preuve ce que vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$. On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+8+\cdots+n^3}$.

THÉORÈME DE COMPARAISON 1.9 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs :

(i) Si $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ u_n\leqslant v_n$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

(ii) Si $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ u_n\leqslant v_n$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(iii) Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(iv) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

REMARQUE 1.12 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ; alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge aussi.

EXERCICE 1.6 : Après en avoir justifié l'existence, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

REMARQUE 1.13 :

• La plupart du temps, on a même $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ ce qui implique $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.

• On peut comme avant ne supposer la positivité de ces deux suites qu'à partir d'un certain rang : si on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors que $v_n>0$, on a bien sûr $u_n>0$ à partir d'un certain rang.

• Ce qui compte est la constance des signes donc cela marche aussi si les suites sont négatives.

ORAL BLANC 1.7 : Mines PSI 2014

a. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0>0$ et $a_{n+1}=1-e^{-a_n}$.

b. Nature des séries de terme général $(-1)^n a_n$ et a_n^2.

c. Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ (on pourra étudier $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$).

d. Trouver un équivalent de a_n avec le théorème de CESARO (voir ci-dessous).

REMARQUE HP 1.14 : On se rappelle du théorème de CESARO *: si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite des moyennes arithmétiques $\left(m_n=\frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.*

REMARQUE HP 1.15 : Soit deux suites strictement positives $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *telles que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. *Alors si* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, on a* $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$. *De plus, si* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge, on a* $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

Démonstration : • Soit un réel $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_k - v_k| \leqslant \varepsilon v_k$ et, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a donc $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |u_k - v_k| \leqslant \varepsilon \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

• Soit $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_k - v_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} v_k$. Mais $\forall n \geqslant n_0$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right| \leqslant A + \sum\limits_{k=n_0}^{n} |u_k - v_k|$ en notant $A = \left|\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n_0-1} v_k\right|$. Il existe n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1,\ A \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ car la série diverge (sa somme partielle tend vers $+\infty$). Alors $\forall n \geqslant \mathrm{Max}(n_0, n_1)$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right| \leqslant A + \sum\limits_{k=n_0}^{n} |u_k - v_k| \leqslant \varepsilon \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

EXEMPLE 1.8 : On peut utiliser ce résultat pour montrer par exemple que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

EXERCICE 1.9 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. En considérant $u_{n+1}^2 - u_n^2$, trouver un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

1.2.4 : Convergence absolue

DÉFINITION 1.4 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, *on dit que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est* **une série absolument convergente** *si* $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ *est convergente.*

REMARQUE 1.16 : $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ *est à termes positifs : on peut lui appliquer les techniques précédentes.*

PROPOSITION SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DES SÉRIES COMPLEXES 1.10 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, alors on a l'équivalence suivante :
$\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ le sont.

THÉORÈME SUR UNE IMPLICATION ENTRE CONVERGENCE ET ABSOLUE CONVERGENCE (ÉNORME) 1.11 :
Toute série absolument convergente est une série convergente.
Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente alors $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

REMARQUE 1.17 : • *La réciproque de ce théorème est fausse.*

- *Une série convergente mais non absolument convergente est dite une* **série semi-convergente**.
- *Soit* $a \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n$ *est absolument convergente si et seulement si* $|a| < 1$.

THÉORÈME DE COMPARAISON (ÉNORME) 1.12 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes :
- **(i) Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ absolument convergente $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ absolument convergente.**
- **(ii) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ absolument convergente $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ absolument convergente.**

PARTIE 1.3 : COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES

1.3.1 : Comparaison série-intégrale

THÉORÈME DE COMPARAISON SÉRIE / INTÉGRALE (ÉNORME) 1.13 :
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$:
$\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

<u>REMARQUE HP 1.18</u> : Avec ces hypothèses : si on définit $w_n = \left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt\right) - f(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ converge.

THÉORÈME 1.14 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, à propos des séries de RIEMANN : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

<u>REMARQUE 1.19</u> : Avec $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ continue et décroissante sur $[1; +\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge mais $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = S$ donc , en posant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, on a $S_n \underset{+\infty}{=} 2\sqrt{n} + c + o(1)$ avec $c = -1 - S$.

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 1.20</u> : **Fonction zêta de** RIEMANN $\zeta :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

- *Quelques valeurs classiques sont à connaître : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.*
- *L'encadrement établi lors de la démonstration de la proposition précédente montre la double inégalité : $\forall \alpha > 1$, $\frac{1}{\alpha - 1} \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} + 1$; donc l'équivalent $\zeta(\alpha) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}$ et la limite $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \zeta(\alpha) = 1$.*
- *La fonction ζ de RIEMANN se prolonge à $\mathbb{C}$ et la position de ses zéros a un rapport étroit avec la répartition des nombres premiers via la relation $\zeta(\alpha) = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-\alpha}}$ qui utilise les séries ci-dessus.*

<u>ORAL BLANC 1.10</u> : Montrer que $\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

<u>REMARQUE 1.21</u> : On peut se servir de cette comparaison série-intégrale pour les équivalents des sommes partielles des séries de RIEMANN divergentes et des restes des séries de RIEMANN convergentes :

- *Si $\alpha \in [0; 1[$ alors $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.*
- *Si $\alpha > 1$ alors $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$.*

PROPOSITION 1.15 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $k > 0$:

(i) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(ii) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

(iii) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(iv) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant \frac{k}{n^\alpha}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

<u>REMARQUE 1.22</u> : En pratique, on montre souvent, pour une série de terme général $u_n > 0$:

- *qu'elle converge en établissant que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ avec $\alpha > 1$,*
- *qu'elle diverge en montrant que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ avec $\alpha \leqslant 1$.*

*<u>REMARQUE FONDAMENTALE 1.23</u> : Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ (appelée constante d'*EULER*) telle que l'on ait le développement asymptotique suivant : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$. Et $\gamma \sim 0,577$.*

<u>EXERCICE CONCOURS 1.11</u> : CCP PSI 2014 Aymeline et Centrale PSI 2013
Calculer les sommes de $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}\right)$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{4k^3 - k}$.

<u>REMARQUE HP 1.24</u> : Nature des **séries de** BERTRAND $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:*

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Les séries de BERTRAND*, comme les intégrales du même nom, sont extrêmement classiques, doivent être connues mais on doit connaître la preuve de la divergence ou de la convergence.*

1.3.2 : Formule de STIRLING

<u>EXEMPLE FONDAMENTAL 1.12</u> : Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$ (**intégrales de** WALLIS).

a. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}.
b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Puis que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
c. Donner une expression avec des factorielles de I_{2p}, de I_{2p+1}.

THÉORÈME SUR L'ÉQUIVALENT DE STIRLING (ÉNORME) 1.16 :
Formule de STIRLING **:** $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

1.3.3 : Règle de D'ALEMBERT

<u>REMARQUE 1.25</u> : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ est telle que $\forall n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a < 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge. C'est un résultat du à D'ALEMBERT *mais en pratique on utilise plutôt :*

THÉORÈME SUR LA RÈGLE DE D'ALEMBERT (ÉNORME) 1.17 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, **alors :**

- **Si** $\ell > 1$ **alors la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **diverge grossièrement.**
- **Si** $\ell < 1$ **alors la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge absolument.**

***EXEMPLE 1.13* :** Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}$.

REMARQUE 1.26 : Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème ci-dessus :

- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, *on ne peut a priori rien dire de la convergence de la série car c'est le cas pour toutes les séries de* RIEMANN *pour lesquelles on a* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1^+$, *alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge (grossièrement) car* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante à partir d'un certain rang et strictement positive donc ne tend pas vers* 0.

EN PRATIQUE : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite positive, pour montrer que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, on trouve :*

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\forall n \in\ \ u_n \leqslant v_n$ *et telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *converge.*
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ *(ou* $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$*) et telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *converge.*
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *converge.*
- $\alpha > 1$ *et* $k > 0$ *tels que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$ *ou* $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.
- $\alpha > 1$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$.
- $\ell < 1$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite positive, pour montrer que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge, on trouve :*

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *positive telle que* $\forall n \in\ \ v_n \leqslant u_n$ *et telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *positive telle que* $v_n \underset{+\infty}{=} O(u_n)$ *(ou* $v_n \underset{+\infty}{=} o(u_n)$*) et telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *et telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*
- $0 < \alpha \leqslant 1$ *et* $k > 0$ *tels que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$ *ou* $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{+\infty}{=} O\big(u_n\big)$.
- $0 < \alpha \leqslant 1$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$.
- $\ell > 1$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

***ORAL BLANC 1.14* :** Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\Big)$ quand elle converge.

***EXERCICE CONCOURS 1.15* :** Mines PSI 2017/2018 Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1.3.4 : Séries alternées

DÉFINITION 1.5 :
On dit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est une* **série alternée** *s'il existe* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *réelle de signe fixe et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n v_n$.

REMARQUE 1.27 : On peut ne commencer qu'à un rang n_0 *: l'important est l'alternance des signes.*

EXEMPLE FONDAMENTAL 1.16 : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

REMARQUE HP 1.28 : Que se passe-t-il si on permute les termes d'une série réelle convergente ? En d'autres termes, si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge et si* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une bijection, que peut-on dire de* $\sum_{n\geqslant 0} u_{\sigma(n)}$ *?*

- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est absolument convergente, alors toute série* $\sum_{n\geqslant 0} u_{\sigma(n)}$ *converge (et vers la même somme).*
- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est semi-convergente, alors on peut faire converger* $\sum_{n\geqslant 0} u_{\sigma(n)}$ *vers n'importe quoi !!!!!!!!!!*

THÉORÈME SPÉCIAL DES SÉRIES ALTERNÉES (ÉNORME) 1.18 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite réelle telle que**

(H_1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est alternée :** $\exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ **telle que** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \varepsilon(-1)^n v_n$ **avec** $\varepsilon = \pm 1$.

(H_2) $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante, c'est-à-dire** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante.**

(H_3) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** 0.

alors le critère spécial des séries alternées (en abrégé TSSA ou CSSA) permet d'affirmer, en notant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ **pour** $n \geqslant -1$**, que**

(R_1) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **converge.**

(R_2) $\forall n \geqslant -1,\ R_n$ **est du signe de** u_{n+1} **(même si** $u_{n+1} = 0$**).**

(R_3) $\forall n \geqslant -1,\ |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

REMARQUE 1.29 : Le critère spécial des séries alternées est une condition suffisante mais pas nécessaire de convergence pour les séries qui sont alternées.

EXEMPLE 1.17 : Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive qui tend vers 0 telle que :

- la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge et telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.
- la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ diverge et telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.

REMARQUE FONDAMENTALE 1.30 :

- *Avec les hypothèses du CSSA, la série* $\sum_{n\geqslant 0} (u_{2n} + u_{2n+1})$ *converge absolument. Réciproquement, c'est une alternative possible au CSSA pour une série alternée de montrer que* $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ *convergent vers la même limite par absolue convergence.*
- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *vérifie le CSSA alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est du signe de* u_0 *et* $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant |u_0|$.
- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est alternée,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0 *et* $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante à partir du rang* n_0 *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge. Par contre les propriétés sur le reste* R_n *ne sont a priori valables que pour* $n \geqslant n_0$.

EXERCICE 1.18 : Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ converge.

Vérifie-t-elle les hypothèses du TSSA ? Calculer sa somme.

EXEMPLE 1.19 : Soit α un réel :

- Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ est absolument convergente.
- Si $0 < \alpha \leqslant 1$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ est semi-convergente.
- Si $\alpha \leqslant 0$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ est grossièrement divergente.

REMARQUE FONDAMENTALE 1.31 : Ne pas utiliser la règle des équivalents pour des séries non positives : si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$ *alors* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *diverge alors que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge.*

EXEMPLE 1.20 : Étudier la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$.

ORAL BLANC 1.21 : Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la nature de $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

REMARQUE HP 1.32 : Sommation par paquets : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe, si on trouve une suite strictement croissante d'entiers* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $+\infty$ *et telle que* $\left(\sum_{k=0}^{v_n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge (vers* ℓ*) et qu'en plus* $\left(\sum_{k=v_n+1}^{v_{n+1}} |u_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0*, alors la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge et sa somme vaut* ℓ*.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, par la première hypothèse, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|\sum_{k=0}^{v_n} u_k - \ell\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Or, la seconde condition montre qu'il existe aussi $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1,\ \sum_{k=v_n+1}^{v_{n+1}} |u_k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Avec $n_2 = \mathrm{Max}(n_0, n_1)$, pour tout entier $p \geqslant v_{n_2}$, il existe un unique entier $n \geqslant n_2$ tel que $v_n \leqslant p < v_{n+1}$, et on a la majoration : $\left|\sum_{k=0}^{p} u_k - \ell\right| = \left|\sum_{k=0}^{v_n} u_k - \ell + \sum_{k=v_n+1}^{p} u_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{v_n} u_k - \ell\right| + \sum_{k=v_n+1}^{v_{n+1}} |u_k| \leqslant \varepsilon$.

ORAL BLANC 1.22 : Centrale PSI 2012 On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le réel : $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

a. Justifier que les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \left(u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}\right)$ ont même nature.

b. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité $\sum_{k=1}^{3n} u_k$ en fonction de H_{3n} et H_n.

c. En déduire l'existence et la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

EN PRATIQUE : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, pour montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge :

- *On justifie que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.*
- *On trouve $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge et $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle alternée, pour montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge :

- *On établit que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0.*
- *On décompose $u_n = v_n + w_n$ par DL avec $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ qui vérifie le CSSA et $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ ACV.*
- *On décompose $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ par paquets (petit en valeur absolue) dont la série converge.*

1.3.5 : Transformation d'Abel (HP)

REMARQUE HP 1.33 : L'idée est de faire une analogie avec l'intégration par parties des intégrales. Au niveau des suites, ce qui fait office de dérivée est la différence $u_{n+1} - u_n$ de termes consécutifs et ce qui ressemble à une primitive est une somme partielle.

Quand on a une somme partielle faisant intervenir un produit $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles ou complexes, on exprime l'un des termes, disons v_n, sous la forme $v_n = V_n - V_{n-1}$ avec $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ et $V_{-1} = 0$ par convention. Ainsi, l'analogie donne :

$$\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k(V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} V_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k.$$

PROPOSITION SUR LA TRANSFORMATION D'ABEL 1.19 :
(HP) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n b_n$, on pose $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante avec $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

REMARQUE 1.34 : Si $a_n = (-1)^n$, on retrouve le critère spécial des séries alternées (critère de LEIBNIZ*).*

EXEMPLE 1.23 : Soit $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $a > 0$, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{in\alpha}}{n^a}$ converge.

1.3.6 : Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

DÉFINITION 1.6 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes, on appelle **produit de** CAUCHY *des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$.*

EXEMPLE 1.24 : Avec ces notations, si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = \dfrac{1}{n!}$, on a $w_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

THÉORÈME SUR LE PRODUIT DE CAUCHY (ÉNORME) 1.20 :
Si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de CAUCHY $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ l'est aussi et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

DÉMONSTRATION : Cette preuve n'est pas exigible en PSI.
Posons $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k$, $W'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |w_k|$, $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $U'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$, $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, $V'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |v_k|$ mais aussi $z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}|$ et $Z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$ et enfin les sommes $U = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, $V = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$, $U' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$, $V' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |v_n|$ qui existent par hypothèse de convergence absolue (donc convergence) des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$.

- $\sum\limits_{i+j\leqslant n} |u_i||v_j| = Z_n \leqslant U'_nV'_n = \sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n} |u_i||v_j| \leqslant Z_{2n} = \sum\limits_{i+j\leqslant 2n} |u_i||v_j|$ donc $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (car c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs) et majorée par $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |v_n|\right)$ donc elle est convergente par théorème de la limite monotone. On pose $Z = \lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$.
Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} Z'_n = (\lim\limits_{n\to+\infty} U'_n) \times (\lim\limits_{n\to+\infty} V'_n)$, c'est-à-dire $Z = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right) \times \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |v_n|\right)$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ |w_n| = \left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_kv_{n-k}\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}| = z_n$ par inégalité triangulaire et $\sum\limits_{n\geqslant 0} z_n$ converge donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge absolument donc converge. On pose $W = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$ et $W' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |w_n|$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $E_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leqslant n\}$ et $F_n = \{(p,q) \in [\![0;n]\!]^2 \mid p+q > n\}$ alors, on obtient $|U_nV_n - W_n| = \left|\sum\limits_{(p,q)\in F_n} u_pv_q\right| \leqslant \sum\limits_{(p,q)\in F_n} |u_p||v_q| = \sum\limits_{(p,q)\in[\![0;n]\!]^2} |u_p||v_q| - \sum\limits_{(p,q)\in E_n} |u_p||v_q|$.
Ainsi $|U_nV_n - W_n| \leqslant U'_nV'_n - Z_n$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}(U'_nV'_n - W'_n) = 0$ d'après ce qui précède. Ainsi, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_nV_n - W_n) = 0$ donc la relation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 1.35 : Avec l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
On confirme avec le produit de CAUCHY *ce que l'on sait déjà,* $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

1.3.7 : Espaces de suites

REMARQUE HP 1.36 : Soit $x \in \mathbb{R}$*, on peut l'écrire* $x = n + a$ *où* $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ *et* $a = x - \lfloor x \rfloor \in [0;1[$*. Il suffit donc parler du* **développement décimal** *des réels entre* 0 *et* 1 *pour les avoir tous.*

On définit, pour $a \in [0;1[$ *et tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, les entiers* $c_n = \lfloor 10^n a \rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1} a \right\rfloor \in [\![0;9]\!]$*. La série* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{10^n}$ *converge et* $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n}$ *: ce qu'on écrit* $a = 0,c_1c_2\cdots c_n\cdots$.

- *Les réels pour lesquels* $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ c_n = 0$ *sont les décimaux.*
- *Les réels pour lesquels* $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \exists m \geqslant 1,\ \forall n \geqslant n_0,\ c_{n+m} = c_n$ *sont les rationnels.*

$\frac{1}{2} = 0,4999999\cdots$ *est un développement décimal impropre. L'algorithme donne* $\frac{1}{2} = 0,5000\cdots$ *!*

DÉMONSTRATION : $10^n a - 1 < \lfloor 10^n a \rfloor \leqslant 10^n a$ et $10^n a - 10 < 10\left\lfloor 10^{n-1} a\right\rfloor \leqslant 10^n a$ et en “soustrayant” ces inégalités, on obtient $-1 < c_n < 10$, mais comme c_n est un entier, cela revient à $c_n \in [\![0;9]\!]$.
Posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{c_k}{10^k}$. Comme $S_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{9}{10^k} = \dfrac{9}{10}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right) \leqslant 1$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est croissante et majorée. On a $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{c_k}{10^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\lfloor 10^k a\rfloor}{10^k} - \dfrac{\lfloor 10^{k-1} a\rfloor}{10^{k-1}}\right) = \dfrac{\lfloor 10^n a\rfloor}{10^n}$ par télescopage car $\lfloor a \rfloor = 0$. Ainsi, $a - \dfrac{1}{10^n} < S_n \leqslant a$ d'où, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = a$.

REMARQUE 1.37 : Les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

- $\ell^\infty(\mathbb{K})$ *: suites bornées (norme* $\|(u_n)\|_\infty = \operatorname{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$*).*
- $\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n| \text{ converge}\right\}$ *(suites sommables).*
- $\ell^2(\mathbb{K}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|^2 \text{ converge}\right\}$ *(suites de carré sommables).*
- $\ell^1(\mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$. $\big((u_n),(v_n)\big) \in \ell_2(\mathbb{K})^2 \Longrightarrow (u_n v_n) \in \ell_1(\mathbb{K})$ *car* $2|u_n v_n| \leqslant |u_n|^2 + |v_n|^2$.
- *Comme* $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k||v_k| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|^2}\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} |v_k|^2}$ *(inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ*), si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont de carré sommable, on a l'inégalité* $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}\sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2}$.

1.3.8 : Produits infinis (HP)

REMARQUE HP 1.38 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que le **produit infini** $\prod\limits_{n\geqslant 0}(1+u_n)$ *converge si la suite* $\left(P_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(1+u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers $P \neq 0$ et on note alors* $P = \prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1+u_n) \in \mathbb{R}^*$.

- *il n'existe donc pas de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = -1$ sinon on aurait $\forall n \geqslant n_0,\ P_n = 0$.*
- *comme $\forall n \geqslant 0,\ P_{n+1} = (1+u_{n+1})P_n$, une condition nécessaire de convergence est que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ *ou* 0^-, $\prod\limits_{n\geqslant 0}(1+u_n)$ *converge si et seulement si* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*

EXERCICE 1.25 : Calcul du produit de WALLIS $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{4n^2}\right)$.

COMPÉTENCES

- déterminer si une série est à termes positifs, alternés... à partir d'un certain rang.
- établir la convergence absolue d'une série par comparaison aux séries géométriques ou de RIEMANN.
- montrer la convergence absolue d'une série par application de la règle de D'ALEMBERT.
- prouver la convergence d'une suite par dualité suite-série.
- appliquer sans oublier d'hypothèses le critère spécial des séries alternées.
- trouver des équivalents des sommes partielles des séries divergentes par comparaison série-intégrale.
- trouver des équivalents des restes des séries convergentes par comparaison série-intégrale.
- reconnaître un produit de CAUCHY (avec la convergence absolue) et le calculer.