

CHAPITRE 2

ALGÈBRE LINÉAIRE

PARTIE 2.1 : RÉVISIONS

REMARQUE 2.1 : Soit une famille quelconque $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E , on appelle combinaison linéaire de cette famille tout vecteur x de E qui s'écrit $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille

de scalaires pour laquelle $J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_K\}$ est fini (on dit que $(\lambda_i)_{i \in I}$ est à **support fini**) de sorte que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ s'interprète comme étant $x = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i$ (car $0_K \cdot x_i = 0_E$ est neutre pour l'addition).

On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble de toutes les familles $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini. On définit l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $(x_i)_{i \in I}$, noté $\text{Vect}((x_i)_{i \in I}) = \text{Vect}_{i \in I}(x_i) = \{x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \mid (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}\}$.

C'est un sous-espace vectoriel de E qui est à la fois le plus petit sous-espace de E qui contient tous les vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$ mais aussi l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent les vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

EXEMPLE 2.1 : Avec cette définition : $\text{Vect}((X^k)_{k \in \mathbb{N}}) = \mathbb{C}[X]$.

DÉFINITION 2.1 :

Soit E est un espace, $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E , on dit que F est **stable** par f si $f(F) \subset F$. On pose alors l'**application induite** par f dans F , notée $f_F : F \rightarrow F \in \mathcal{L}(F)$ et définie par : $\forall x \in F, f_F(x) = f(x)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.2 : Soit E, F, G trois espaces et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors :

- On a l'équivalence $g \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
- Pour la composition, on a aussi les inclusions $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
- Pour la multiplication par un scalaire, si $\alpha \neq 0 \in \mathbb{K}$, on a $\text{Im}(\alpha f) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(\alpha f) = \text{Ker}(f)$.

Soit E, F deux espaces et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f + g)$ et $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on a les inclusions classiques :

- Pour les noyaux : $\text{Ker}(f^0) = \{0_E\} \subset \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^p) \subset \dots$.
- Pour les images : $\text{Im}(f^0) = E \supset \text{Im}(f) \supset \text{Im}(f^2) \supset \dots \supset \text{Im}(f^p) \supset \dots$.

THÉORÈME ÉNORME 2.1 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E alors f induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$; c'est-à-dire que $f|_S^{\text{Im}(f)}$ est un isomorphisme.

REMARQUE HP 2.3 : Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r = \text{rg}(A)$ et la matrice $J_{n,p,r} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui ne contient que des 0 sauf $j_{1,1} = \dots = j_{r,r} = 1$: A et $J_{n,p,r}$ sont équivalentes.

A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont donc équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

PARTIE 2.2 : PRODUIT ET SOMME D'ESPACES

PROPOSITION 2.2 :

Soit $n \geq 3$ et des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$, si on définit les lois $+$ et $\cdot$ dans $E_1 \times \dots \times E_n$ par $(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ et $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$, alors $(E_1 \times \dots \times E_n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel dont le vecteur nul est $0_{E_1 \times \dots \times E_n} = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Si $E_1, \dots, E_n$ sont de dimensions finies, alors $\prod_{k=1}^n E_k$ aussi et $\dim \left(\prod_{k=1}^n E_k \right) = \sum_{k=1}^n \dim(E_k)$.

DÉFINITION 2.2 :

Soit p sous-espaces vectoriels de E notés $E_1, \dots, E_p$; on note $E_1 + \dots + E_p = \sum_{k=1}^p E_k$ la somme des sous-espaces $E_1, \dots, E_p$ définie par $\sum_{k=1}^p E_k = \left\{ x \in E \mid \exists (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, x = x_1 + \dots + x_p \right\}$.

PROPOSITION 2.3 :

Avec ces notations, $E_1 + \dots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant tous les E_k , c'est-à-dire le sous-espace de E engendré par la réunion des sous-espaces $E_1, \dots, E_p$. En dimension finie, $\dim \left(\sum_{k=1}^p E_k \right) \leq \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$.

DÉFINITION 2.3 :

Avec les notations ci-dessus, on dit que la somme des E_k est une somme directe et on note alors $\sum_{k=1}^p E_k = E_1 \oplus \dots \oplus E_p = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ si $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, x_1 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = \dots = x_p = 0_E$.

PROPOSITION 2.4 :

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E . On a l'équivalence (i) $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe $\iff$ (ii) $\forall x \in \sum_{k=1}^p E_k, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p E_k, x = x_1 + \dots + x_p \iff$ (iii) $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, E_k \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p E_j \right) = \{0_E\}$.

REMARQUE 2.4 : Attention : $\left(\sum_{k=1}^p E_k \text{ directe} \right) \not\iff \left(\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, i \neq j \implies E_i \cap E_j = \{0_E\} \right)$.

THÉORÈME 2.5 :

Si E de dimension finie, $\sum_{k=1}^p E_k = \bigoplus_{k=1}^p E_k \iff \dim \left(\sum_{k=1}^p E_k \right) = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$. Dans ce cas, si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des bases respectives de $E_1, \dots, E_p$ alors $\mathcal{B}_1 \amalg \dots \amalg \mathcal{B}_p$ est une base (adaptée) de $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.

PARTIE 2.3 : MATRICES PAR BLOCS**PROPOSITION 2.6 :**

Si $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est composée de blocs "de bonnes tailles" ainsi que $B = (B_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, alors

$AB = C$ où C est écrite par blocs $C = (C_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$ avec $C_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j}$.

PROPOSITION 2.7 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F . On a alors l'équivalence : (F est stable par f) $\iff$ ($\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs).

$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est alors la matrice dans la base $\mathcal{B}_F$ de l'endomorphisme f_F de F induit par f .

REMARQUE 2.5 : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$:

- (A est diagonale) $\iff (\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Vect}(e_k) \text{ est stable par } f)$.
- (A est triangulaire supérieure) $\iff (\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \text{ est stable par } f)$.

PROPOSITION 2.8 :

Si $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base adaptée à la décomposition, si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors on a l'équivalence : $(\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, E_k \text{ stable par } f) \iff (A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ diagonale par blocs dans } \mathcal{B})$.
 Dans ce cas : $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_p)$ où $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, A_k = \text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(f_k)$ avec $f_{E_k} = f_k$.

PROPOSITION 2.9 :

Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et u et v commutent (soit $u \circ v = v \circ u$) alors $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

THÉORÈME 2.10 :

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure) par blocs, c'est-à-dire qu'on a $M = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ avec $A_{i,j}$ matrice nulle si $i > j$ (resp. $i < j$) alors $\det(M) = \prod_{k=1}^p \det(A_{k,k})$.

PARTIE 2.4 : TRACE**DÉFINITION 2.4 :**

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la **trace** de A , c'est le scalaire $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$.

PROPOSITION 2.11 :

La trace est linéaire. Si ça existe, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ et $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A)$.

DÉFINITION 2.5 :

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **trace** de f le scalaire $\text{tr}(f) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ si $\mathcal{B}$ base de E .

PROPOSITION 2.12 :

La trace est linéaire. $\text{tr}(g \circ f) = \text{tr}(f \circ g)$ si ça existe et, si p est un projecteur, $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

PARTIE 2.5 : LAGRANGE ET VANDERMONDE**THÉORÈME 2.13 :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ distincts et $b_1, \dots, b_n$ des scalaires, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(a_k) = b_k$, il s'agit de $P = \sum_{k=1}^n b_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.6 : Avec ces notations, si on pose $L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$, alors $(L_1, \dots, L_n)$

est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et, si $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a $P = \sum_{k=1}^n P(a_k) L_k$.

PROPOSITION 2.14 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille de n scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, on se donne la matrice de VANDERMONDE $A = (\alpha_j^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\det(A) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\alpha_q - \alpha_p)$.

PARTIE 2.6 : POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

DÉFINITION 2.6 :

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $f^k = \text{id}_E$ si $k = 0$ et $f^k = f \circ f^{k-1}$ si $k \geq 1$.

Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par $P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k = a_d f^d + a_{d-1} f^{d-1} + \dots + a_1 f + a_0 \text{id}_E$.

THÉOREME 2.15 :

Soit E un espace, $f \in \mathcal{L}(E)$, $(P, Q, \alpha, \beta) \in \mathbb{K}[X]^2 \times \mathbb{K}^2$, $(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$, $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

REMARQUE 2.7 : • $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\text{Ker}(P(f))$ et $\text{Im}(P(f))$ sont stables par f .

- Si $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f (appelé le **commutant** de f) : $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathbb{K}[f] = \text{Vect}(f^k \mid k \in \mathbb{N})$.

DÉFINITION 2.7 :

Soit E un espace, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

REMARQUE HP 2.8 : Si E de dimension finie, f a au moins un polynôme annulateur non nul :

- Il existe un unique polynôme unitaire noté π_f tel que $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f) = 0 \implies \pi_f \mid P$.
- Si F est un sous-espace de E stable par f , alors $\pi_{f|_F} \mid \pi_f$.
- La dimension de $\mathbb{K}[f]$ est égale au degré de π_f .

REMARQUE 2.9 : Pour caractériser les automorphismes, soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$:

- Si $P(f) = 0$ avec $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ et $a_0 \neq 0$ alors $f^{-1} = - \sum_{k=1}^d \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}$.
- $f \in \text{GL}(E) \iff (\exists P \in \text{Ann}(f), P(0) \neq 0)$ (ce qui équivaut aussi à $\pi_f(0) \neq 0$).

REMARQUE FONDAMENTALE 2.10 : Si $P = \sum_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k}$ est un polynôme annulateur unitaire

scindé de degré n d'un endomorphisme f d'un espace E (le mieux est d'avoir P de bas degré donc P minimal est optimal), cela nous permet de calculer efficacement les puissances de f . Effectuons la division euclidienne de X^P par P qu'on écrit $X^P = Q_P P + R_P$ (E_P) avec $\deg(R_P) \leq n - 1$. Traitons deux cas :

- Si P est scindé à racines simples, c'est-à-dire si $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $m_k = 1$ qui équivaut à $r = n$, alors $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $R_P(\alpha_k) = a_k^P$ et R_P est donc un polynôme d'interpolation de LAGRANGE.
- Si P admet des racines multiples, on évalue, pour chaque $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, la relation (E_P) ainsi que ses dérivées jusqu'à la dérivée d'ordre $m_k - 1$ et cela nous donne un système de $\sum_{k=1}^r m_k = n$ équations avec

n inconnues (les coefficients de R_P) ce qui nous permet de déterminer R_P .

On évalue ensuite (E_P) en f et on a $f^P = R_P(f)$ car $(Q_P P)(f) = Q_P(f) \circ P(f) = 0$.

DÉFINITION 2.8 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A^k = I_n$ si $k = 0$ et $A^k = A \times A^{k-1}$ si $k \geq 1$.

Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k = a_d A^d + \dots + a_1 A + a_0 I_n$.

PROPOSITION 2.16 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$, $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$.

REMARQUE 2.11 : Si $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA\}$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec A (le **commutant** de A) : $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui contient $\mathbb{K}[A] = \text{Vect}(A^k \mid k \in \mathbb{N})$.