

DM 02 : ENDOMORPHISMES CYCLIQUES

PSI 1 2025/2026

pour le mardi 23 septembre 2025

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est un **endomorphisme cyclique** si et seulement s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

PARTIE 1 : EXEMPLES ET PREMIÈRE PROPRIÉTÉ

- 1 Analyse** : soit $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $E = \text{Vect}(\sin, \cos, 1) \subset F$, $u : E \rightarrow E$ définie par : $\forall f \in F, u(f) = f'$. On pose aussi la famille $\mathcal{B} = (1, \sin, \cos)$ (1 est compris ici comme la fonction constante égale à 1).
Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de E . Justifier que u est un endomorphisme de E . u est-il cyclique ?
- 2 Géométrie** : soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, u(x, y, z) = (y, x, z)$.
Caractériser géométriquement u . u est-il cyclique ?
On revient dans les deux questions qui suivent à un espace E quelconque.
- 3 Nilpotence** : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p \geq 1$, c-à-d que $u^p = 0$ (endomorphisme nul) et $u^{p-1} \neq 0$
 - 3.1** Montrer l'existence d'un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, \dots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre.
 - 3.2** En déduire que : $(u \text{ est cyclique}) \iff (p = n)$.
- 4 Minoration du rang d'un cyclique** : soit donc u cyclique et $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ une base de E
 - 4.1** Comparer $\text{rang}(u)$ et le rang de la famille de vecteurs $(u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0), u^n(x_0))$.
 - 4.2** Quelles sont donc les deux seules valeurs possibles de $\text{rang}(u)$?

PARTIE 2 : C'EST DU PROPRE

Soit encore E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$; on suppose qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts tels que : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \exists e_i \in E, e_i \neq 0$ et $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

On dit que λ_i est une **valeur propre** de u et e_i est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ_i .

On suppose que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est liée ; soit alors r le plus petit entier tel que $(e_1, \dots, e_r)$ est liée et $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ non tous nuls telle que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = 0$.

- 1** Prouver que $r \geq 2$ et que $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r)e_1 + \dots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)e_{r-1} = 0$.
- 2** Que peut-on donc dire de la famille $(e_1, \dots, e_n)$?

On pose dorénavant $x_0 = e_1 + \dots + e_n$.

- 3** Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, exprimer $u^k(x_0)$ en fonction de $e_1, \dots, e_n$.
- 4** Montrer que u est cyclique.

PARTIE 3 : POLYNÔMES ANNULATEURS

- 1 Polynôme minimal d'un endomorphisme cyclique** : soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .
On note $\text{Ann}(u)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de u : c'est-à-dire $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(u) = 0\}$.
- 1.1** Rappeler la structure de $\text{Ann}(u)$ dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$.
Justifier l'existence d'un unique polynôme π_u unitaire tel que $\text{Ann}(u)$ soit l'ensemble des multiples de π_u ; ce qu'on écrit $\text{Ann}(u) = \pi_u \mathbb{R}[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists R \in \mathbb{R}[X], P = \pi_u R\}$.
- 1.2** Justifier l'existence de réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que $u^n(x_0) + \alpha_{n-1}u^{n-1}(x_0) + \dots + \alpha_1u(x_0) + \alpha_0x_0 = 0$.
- 1.3** En déduire que $\pi_u = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ (π_u est le polynôme minimal de u).
- 1.4** En déduire que $\mathbb{R}[u] = \mathbb{R}_{n-1}[u]$. Justifier que $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}[u]$.
- 2 Réunion de sous-espaces** : pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_m =$ "si un $\mathbb{R}$ -espace F vérifie $\dim(F) = m$ et $F = \bigcup_{k=1}^r G_k$ avec $r \in \mathbb{N}^*$ et $G_1, \dots, G_r$ des sous-espaces de F , alors $\exists k \in \llbracket 1; r \rrbracket, F = G_k$ ".
- 2.1** Montrer que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Justifier que tout espace de dimension ≥ 2 possède une infinité d'hyperplans.
- 2.2** Établir que $\mathcal{P}_m$ est vraie pour tout entier $m \geq 1$.
- 3 Réciproque** : soit maintenant $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme minimal π_u soit de degré $n = \dim(E)$. On pose, pour $x \in E$ non nul, $A_x = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$
- 3.1** Montrer que A_x est un idéal de $\mathbb{R}[X]$, et qu'il existe un unique polynôme unitaire π_x de $\mathbb{R}[X]$ tel que $A_x = \pi_x \mathbb{R}[X]$ et tel que π_x divise π_u .
On écrit la décomposition en polynômes irréductibles de π_u : $\pi_u = \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^s (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{n_k}$ avec $r \geq 0, s \geq 0$, des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ distincts deux à deux avec $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, des couples $(\beta_1, \gamma_1), \dots, (\beta_s, \gamma_s)$ de réels distincts deux à deux tels que $\forall k \in \llbracket 1; s \rrbracket, b_k - 4\gamma_k < 0$ et $(n_1, \dots, n_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$.
- 3.2** Combien y-a-t-il de polynômes unitaires réels qui divisent π_u ? En déduire qu'il existe un nombre fini de vecteurs non nuls de E , notons les $v_1, \dots, v_p$, tels que pour tout $x \in E$ non nul, on ait $\pi_x \in \{\pi_{v_1}, \dots, \pi_{v_p}\}$.
- 3.3** Montrer qu'il existe un entier $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ tel que $E = \text{Ker}(\pi_{v_k}(u))$.
- 3.4** En déduire enfin que u est cyclique.

PARTIE 4 : COMMUTANT DES CYCLIQUES

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique de E et $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

Soit $\mathcal{C}(u)$ le **commutant** de u : $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$ (les $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent avec u).

- 1** Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre $\mathcal{L}(E)$ (sous-espace vectoriel et sous-anneau) et $n \leq \dim(\mathcal{C}(u)) \leq n^2$.
- 2 Base et dimension de $\mathcal{C}(u)$** : soit $v \in \mathcal{C}(u)$
- 2.1** Prouver qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v(x_0) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 u(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0)$.
- 2.2** Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, v \circ u^k = u^k \circ v$.
- 2.3** Établir enfin que $v = \alpha_0 \text{id}_E + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$.
- 2.4** En déduire la valeur de $\dim(\mathcal{C}(u))$.