DEVOIR 02 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2025-2026 **mardi 09 septembre 2025**

QCM

1 *Série : soit deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (CV pour converge et DV pour diverge)*

1.1 $\left(\sum(u_n+v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ CV}\right) \Longrightarrow \left(\sum u_n \text{ CV}\right)$

1.2 $\left(\sum u_n \text{ CV et } \sum v_n \text{ DV}\right) \Longrightarrow \left(\sum(u_n+v_n) \text{ DV}\right)$

1.3 $\left(\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \text{ et } \sum v_n \text{ CV}\right) \Longrightarrow \left(\sum u_n \text{ CV}\right)$

1.4 $\sum u_n \text{ CV} \Longleftrightarrow \left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

2 Riemann *: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes réels strictement positifs*

2.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

2.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = +\infty \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge

2.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

2.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = +\infty \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

3 *Série alternée : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes positifs qui tend vers 0*

3.1 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge

3.2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge

3.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge

3.4 $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge

4 *Série alternée : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle positive décroissante qui tend vers 0, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$*

4.1 La suite $(|R_n|)_{n\geqslant 0}$ est décroissante

4.2 La suite $(R_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0

4.3 $|R_n| \leqslant u_n$

4.4 $R_n \leqslant |u_{n+1}|$

Énoncé Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, énoncer les deux implications de la règle de d'Alembert.

Preuve Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que l'on ait le renseignement $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.

Exercice 1 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$. On pose $\forall n\geqslant 1,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Justifier que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge. Pour $n\geqslant 1$, donner une expression de S_n faisant intervenir H_{2n} et H_n (une explication avec des pointillés suffira). Avec $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$, déterminer la valeur exacte de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2 Soit un réel $a>0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^n}{a^n n!}$.

a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Indication : passer en écriture exponentielle.

b. Pour $a\neq e$, quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$? Indication : utiliser la règle de d'Alembert.

c. Pour $a = e$, quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$? Indication : trouver un équivalent de u_n.

DEVOIR 02 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 02	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X	X			
2		X	X		
3		X	X	X	
4		X	X	X	

1.1 Vrai : $u_n = (u_n + v_n) - v_n$ **1.2** Vrai : par l'absurde **1.3** Faux : c'est vrai si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives mais pas si $u_n = -1$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ par exemple **1.4** Faux : ça marche si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive, mais pas si $u_n = (-1)^n$.
2.1 Faux : $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ par exemple **2.2** Vrai : $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ pour n assez grand **2.3** Vrai : $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **2.4** Faux : $u_n = \frac{1}{n}$ par exemple.
3.1 Faux : pour $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{n}$ **3.2** Vrai : c'est le CSSA **3.3** Vrai : $u_n^2 \underset{+\infty}{=} o(u_n)$ et $u_n > 0$ **3.4** Vrai : $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est donc absolument convergente donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ aussi.
4.1 Faux : $u = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ par exemple et la somme de la série vaut 1 **4.2** Vrai : un reste tend vers 0 **4.3** Vrai : $|R_n| \leqslant |u_{n+1}| = u_{n+1} \leqslant u_n$ **4.4** Vrai : $R_n \leqslant |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Énoncé Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, la règle de D'ALEMBERT s'énonce :

- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell < 1$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.

Preuve En multipliant les inégalités $\forall n \geqslant n_0,\ \forall k \in [\![n_0; n-1]\!],\ \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{v_{k+1}}{v_k}$ entre elles à partir du rang n_0 (tout est strictement positif), on obtient donc $\prod\limits_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \prod\limits_{k=n_0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k}$ ce qui donne, par télescopage multiplicatif, $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \frac{u_{n_0} v_n}{v_{n_0}}$ donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{\geqslant 0}$ est bornée et on conclut bien $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.

Exercice 1 Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, d'après RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente donc convergente.
Pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{2k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2H_{2n} - 2H_n$.
Alors $S_n \underset{+\infty}{=} 2\ln(2n) + 2\gamma - 2\ln(n) - 2\gamma + o(1) \underset{+\infty}{=} 2\ln(2) + o(1)$. Ainsi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\ln(2)$.

Exercice 2 **a.** Comme $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ et que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ donc, par continuité de l'exponentielle, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$.
b. Pour $n \geqslant 1$, comme $u_n > 0$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{a}$. D'après la règle de D'ALEMBERT, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si $\frac{e}{a} < 1 \iff a > e$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge si $\frac{e}{a} > 1 \iff a < e$.
c. D'après STIRLING, si $a = e$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge par comparaison à RIEMANN ($\frac{1}{2} < 1$).