

TD 02 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2025-2026

vendredi 12 septembre 2025

2.1 Traitons quelques cas en posant $u_n = a^{\lfloor \ln n \rfloor}$:

Si $|a| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = |a^{\lfloor \ln n \rfloor}| = 1$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 : $\sum_{n \geq 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ diverge grossièrement.

Si $|a| > 1$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor \ln(n) \rfloor = +\infty$, la suite $(a^{\lfloor \ln n \rfloor})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 car $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^{\lfloor \ln n \rfloor}| = +\infty$ et la divergence de la série $\sum_{n \geq 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ est encore grossière.

Si $a = 0$, comme $\forall n \geq 3$, $\lfloor \ln n \rfloor \geq 1$, on a $a^{\lfloor \ln n \rfloor} = 0$, ce qui montre la convergence de $\sum_{n \geq 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$.

Si $a \in]0; 1[$, $\ln(n) - 1 < \lfloor \ln(n) \rfloor \leq \ln(n)$ par définition de la partie entière, $a^{\ln(n)} \leq a^{\lfloor \ln n \rfloor} < a^{\ln(n)-1}$ car $0 < a < 1$. Or $a^{\ln(n)} = e^{\ln(n) \ln(a)} = e^{\ln(a) \ln(n)} = n^{\ln(a)} = \frac{1}{n^{-\ln(a)}}$. Ainsi, $\frac{1}{n^{-\ln(a)}} \leq u_n < \frac{1}{an^{-\ln(a)}}$.

Si $-\ln(a) > 1 \iff a < 1/e$, alors l'inégalité $0 < u_n < \frac{1}{an^{-\ln(a)}}$ montre par comparaison à une série de RIEMANN que $\sum_{n \geq 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ converge.

Si $-\ln(a) \leq 1 \iff a \geq 1/e$, l'inégalité $\frac{1}{n^{-\ln(a)}} \leq u_n$ montre par comparaison que $\sum_{n \geq 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ diverge.

Si $a \in]-1/e; 0[$, $|a^{\lfloor \ln n \rfloor}| = |a|^{\lfloor \ln n \rfloor}$ donc, par un des cas précédents, $\sum_{n \geq 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ converge absolument.

Si $a \in]-1; -1/e[$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n a^{\lfloor \ln k \rfloor}$. L'idée est de faire des paquets de termes pour lesquels $\lfloor \ln(k) \rfloor$ est constant. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors $p = \lfloor \ln(k) \rfloor \iff p \leq \ln(k) < p+1 \iff e^p \leq k < e^{p+1}$. Ainsi, si on pose $I_p = [u_p; v_p]$ avec $u_p = \lfloor e^p \rfloor + 1$ et $v_p = \lfloor e^{p+1} \rfloor - 1$, on a la valeur constante $\forall k \in I_p$, $\lfloor \ln(k) \rfloor = p$. Ainsi, $\sum_{k \in I_p} a^p = S_{v_p} - S_{u_p-1} = a^p(v_p - u_p + 1)$. Mais, $e^p < u_p \leq e^p + 1$ et $e^{p+1} - 2 < v_p \leq e^{p+1} - 1$ donc $e^{p+1} - 2 - e^p < v_p - u_p + 1 < e^{p+1} - e^p$ ce qui assure par encadrement que $v_p - u_p + 1 \underset{+\infty}{\sim} e^p(e-1)$ car $e^{p+1} - 2 - e^p \underset{+\infty}{\sim} e^{p+1} - e^p = e^p(e-1)$. Ainsi, $S_{v_p} - S_{u_p-1} \underset{+\infty}{\sim} (ae)^p(e-1)$ qui ne tend pas vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Or si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeait vers S , les deux suites extraites $(S_{u_p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{v_p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ tendraient vers S donc on aurait $\lim_{p \rightarrow +\infty} (S_{v_p} - S_{u_p-1}) = 0$. Par l'absurde, $(S_n)_{n \geq 1}$ diverge. Ainsi $\sum_{n \geq 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ diverge.

Au final : $\sum_{n \geq 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ converge si et seulement si $-e^{-1} < a < e^{-1}$.

2.2 Cherchons d'abord un développement asymptotique de u_n .

Première méthode : $\sin(u_n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2}$ car $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in]-1; 1[$. Ainsi, $\sin(u_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2n^\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{1 - \frac{4(-1)^n}{3n^\alpha} - \frac{4}{3n^{2\alpha}}}$. Or $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ donc $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2n^\alpha} + \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{6n^\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{6n^{2\alpha}} + \frac{\sqrt{3}}{18n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{3n^\alpha} + \frac{2\sqrt{3}}{9n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

Comme $u_n = \text{Arcsin}(\sin(u_n))$ et que $\text{Arcsin}(x) = x + o(x^2)$, on a $u_n = \frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{3n^\alpha} + \frac{2\sqrt{3}}{9n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

Deuxième méthode : soit $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2} + x\right) - \frac{\pi}{6}$ dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ avec $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1/2 + x)^2}}$.

Ainsi, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x}{3} - \frac{4x^2}{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2x}{3}\right) + o(x)$. En primitivant, $f(x) = f(0) + \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{2x^2}{3\sqrt{3}} + o(x^2)$.

Or $f(0) = 0$ donc $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{2x^2}{3\sqrt{3}} + o(x^2)$. Par conséquent : $u_n = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{3} n^\alpha} + \frac{2}{3\sqrt{3} n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

Troisième méthode : soit $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2} + x\right)$, alors f est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ donc admet un DL en 0 à tout ordre. On a $f(0) = \frac{\pi}{6}$ et, par calculs, $f'(0) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $f''(0) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$. Ainsi, par TAYLOR-YOUNG,

$f(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{2x^2}{3\sqrt{3}} + o(x^2)$. Ainsi, comme $\alpha > 0$, on a $u_n = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{3} n^\alpha} + \frac{2}{3\sqrt{3} n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

• Dans tous les cas, on peut écrire $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{3} n^\alpha}$ et $w_n \sim \frac{2}{3\sqrt{3} n^{2\alpha}} > 0$. Or $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\alpha > 0$ donc la suite $\left(\frac{2}{\sqrt{3} n^\alpha}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0 et $\sum_{n \geq 0} w_n$ converge si et seulement si $2\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$ par comparaison de séries à termes positifs aux séries de RIEMANN. Par somme, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

2.3 Posons $u_n = \frac{1}{n^a} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ pour $n \geq 1$. Puisque $a > 0$ et que $|u_n| \leq \frac{1}{n^a}$, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Si $a > 1$, comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge par RIEMANN, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument par comparaison.

Si $a \leq 1$, montrons que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge de deux manières :

Méthode 1 : comme la suite $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)\right)_{n \geq 1}$ est 10-périodique car la fonction $\sin$ est 2π -périodique, on voit une alternance de termes positifs et négatifs dans cette série, ce qui nous conduit à effectuer une sommation par paquets de 5 termes consécutifs. Soit $v_n = u_{5n-4} + u_{5n-3} + u_{5n-2} + u_{5n-1} + u_{5n}$ pour tout $n \geq 1$.

On constate que v_n est positif si n est impair et que v_n est négatif si n est pair, ainsi la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est

alternée. Si on définit les deux sommes partielles associées $S_p = \sum_{k=1}^p u_k$ et $T_p = \sum_{k=1}^p v_k$ pour $p \geq 1$, on a

la relation $\sum_{k=1}^p v_k = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=5k-4}^{5k} u_i\right) = T_p = S_{5p} = \sum_{n=1}^{5p} u_n$. Avec les propriétés de signe de v_n , comme $\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin(\theta)$, on a la relation $v_n = (-1)^{n-1} w_n$ en définissant le réel $w_n = |v_n| \geq 0$ par $w_n = \frac{1}{(5n-4)^a} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{(5n-3)^a} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{(5n-2)^a} \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \frac{1}{(5n-1)^a} \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Or $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est clairement décroissante et tend vers 0 donc $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge d'après le critère spécial des

séries alternées. Notons T la limite de la suite des sommes partielles $(T_n)_{n \geq 1}$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n} = T$.

De plus, on a $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1} = T_n + o(1) = T + o(1)$, puis $S_{5n+2} = S_{5n+1} + u_{5n+2} = T + o(1)$,

$S_{5n+3} = S_{5n+2} + u_{5n+3} = T + o(1)$ et $S_{5n+4} = S_{5n+3} + u_{5n+4} = T + o(1)$, d'où l'on déduit (on a les 5

restes possibles) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n+4} = T$.

Ainsi, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge ce qui signifie que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge. On a même $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = T$.

Méthode 2 : la 10-périodicité de $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)\right)_{n \geq 1}$ nous conduit à sommer par paquets de 10 termes. Soit $z_n = u_{10n-9} + u_{10n-8} + u_{10n-7} + u_{10n-6} + u_{10n-5} + u_{10n-4} + u_{10n-3} + u_{10n-2} + u_{10n-1} + u_{10n}$ pour tout entier $n \geq 1$. Alors, si on définit les deux sommes partielles associées $S_p = \sum_{k=1}^p u_k$ et $T_p = \sum_{k=1}^p z_k$ pour $p \geq 1$, on a $T_p = S_{10p}$ comme précédemment.

On a donc $z_n = \sum_{k=0}^9 \frac{1}{(10n-k)^a} \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ ($\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) = 0$ si $k = 0$ ou $k = 5$ mais on le laisse) et, en écrivant par exemple $\frac{1}{(10n-9)^a} = \frac{1}{(10n)^a} \left(1 - \frac{9}{10n}\right)^{-a} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(10n)^a} + \frac{9a}{(10n)^{a+1}} + o\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(10n)^a} + O\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right)$, on obtient $z_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(10n)^a} \sum_{k=0}^9 \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) + O\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right)$. Or $\sum_{k=0}^9 \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ est la partie imaginaire de la somme des 10 racines dixièmes de l'unité et on sait que cette somme est nulle. Ainsi, $z_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right)$ ce qui garantit par comparaison aux séries de RIEMANN la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} z_n$. Ainsi, si on note T la limite de la suite $(T_n)_{n \geq 1}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{10n} = T$. De plus, $S_{10n+1} = S_{10n} + u_{10n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{10n+1} = T$. De même, on montre que $\forall k \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{10n+k} = T$ ce qui implique la convergence de $(S_n)_{n \geq 1}$ vers T et, à nouveau, on en conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge. On a même $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = T$.

Méthode 3 : on peut faire une transformation d'ABEL en prenant $b_n = \frac{1}{n^a}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0 et en posant $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ et on montre classiquement que $(A_n)_{n \geq 1}$ est bornée si $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ (elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs car $(a_n)_{n \geq 1}$ est 10-périodique et que $A_{10} = 0$ car la somme des racines dixièmes de l'unité est nulle. Mais tout ceci est hors programme !

2.4 La fonction Arccos est décroissante sur $[-1; 1]$ et $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ donc $\text{Arccos}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \text{Arccos}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ainsi $u_n \leq 0$. De plus, comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \text{Arccos}(t) = \frac{\pi}{2}$, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Par conséquent, $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} u_n$ or $\sin(u_n) = \sin(a_n - b_n)$ en notant $a_n = \text{Arccos}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n = \text{Arccos}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On obtient donc $\sin(u_n) = \sin(a_n) \cos(b_n) - \sin(b_n) \cos(a_n)$. On sait que $\forall x \in [-1; 1]$, $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ donc $\sin(u_n) = \frac{1}{n^2} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n^4}}$. Or $\sqrt{1-x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ donc $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$. On peut ne garder comme information que $u_n \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et même $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

On pouvait aussi se servir de la relation $\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)$ pour avoir $\text{Arccos}(x) \underset{0}{=} \frac{\pi}{2} - x + O(x^2)$ et obtenir plus simplement $u_n \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n} < 0$. Comme la série harmonique diverge, par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

Or $(-1)^n u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ qu'on peut écrire $(-1)^n u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + v_n$ avec $v_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0. De plus, $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge absolument par comparaison car $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Par somme $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$ converge.

2.5 a. Comme $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \ell u_n^\alpha$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \ell u_n^\alpha > 0$, alors $u_n - u_{n+1}$ devient strictement positif à partir

d'un certain rang. En effet, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{\ell u_n^\alpha} = 1$, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, \left| \frac{u_n - u_{n+1}}{\ell u_n^\alpha} - 1 \right| < \frac{1}{2}$ donc $0 < \frac{1}{2} < \frac{u_n - u_{n+1}}{\ell u_n^\alpha} < \frac{3}{2}$ et on conclut bien que $u_n - u_{n+1} > 0$ pour tout entier $n \geq N$. Ainsi, $(u_n)_{n \geq N}$ est strictement décroissante.

b. Si $\alpha < 2$ et $n \geq N$, $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ étant décroissante sur $[u_{n+1}; u_n]$, $\forall t \in [u_{n+1}; u_n], \frac{1}{t^{\alpha-1}} \geq \frac{1}{u_n^{\alpha-1}}$. On intègre sur $[u_{n+1}; u_n]$ (car $n \geq N$ donc $u_{n+1} \leq u_n$) pour obtenir $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} = \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{u_n^{\alpha-1}} dt \leq \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt$.

Pour $m \geq N + 1$, en sommant ces inégalités pour $n \in \llbracket N; m-1 \rrbracket$ et avec la relation de CHASLES, on obtient $\sum_{n=N}^m \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \leq \sum_{n=N}^m \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt = \int_{u_m}^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt \leq \int_0^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt = \left[\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_0^{u_N} = \frac{u_N^{2-\alpha}}{2-\alpha}$ (la convergence de l'intégrale est assurée par le critère de RIEMANN). Or la suite $\left(\sum_{n=N}^m \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \right)_{m \geq N}$ est croissante et majorée donc elle converge, ce qui garantit la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}}$. Enfin, par hypothèse, on a $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \ell u_n > 0$ donc, par comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge aussi.

c. Si $\alpha \geq 2$ et $n \geq N$, cette fois-ci, on préfère écrire $\forall t \in [u_{n+1}; u_n], \frac{1}{t^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{u_{n+1}^{\alpha-1}}$ toujours par décroissance $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ sur $[u_{n+1}; u_n]$. On intègre sur $[u_{n+1}; u_n]$ (car $n \geq N$ donc $u_{n+1} \leq u_n$) pour obtenir l'inégalité $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}} = \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{u_{n+1}^{\alpha-1}} dt \geq \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt$. Pour $m \geq N + 1$, en sommant pour $n \in \llbracket N; m-1 \rrbracket$ et encore avec la relation de CHASLES, on obtient $\sum_{n=N}^m \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}} \geq \sum_{n=N}^m \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt = \int_{u_m}^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt$. Comme maintenant $\alpha - 1 \geq 1$, le critère de RIEMANN donne la divergence de l'intégrale $\int_0^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt$ donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{u_m}^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt = +\infty$. Ainsi, par encadrement, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=N}^m \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}} = +\infty$ d'où la divergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}}$ (ses sommes partielles tendent vers $+\infty$).

Une nouvelle fois, par hypothèse, $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \ell u_n^\alpha$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\alpha \geq 2$ donc $u_n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(u_n)$ (vrai dès que $\alpha > 1$). Ainsi, on a $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{=} o(u_n)$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} u_{n+1}$ et il vient $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \ell u_n$. Comme on parle de suites positives strictement (au moins à partir d'un certain rang), on conclut de la divergence vue ci-dessus que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge si $\alpha \geq 2$.

En conclusion, avec ces hypothèses, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.

2.6 a. D'abord, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Ceci justifie l'existence du reste R_n pour tout entier $n \geq -1$.

On sait d'après ce même théorème que R_n est du signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ donc $|R_n| = (-1)^{n+1} R_n$. Ainsi, on a $|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^{n+1} R_n - (-1)^{n+2} R_{n+1} = (-1)^{n+1} (R_n + R_{n+1})$. Or, en posant $k = j + 1$, il vient $R_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{j=n+1}^{+\infty} (-1)^{j+1} u_{j+1}$. Ainsi, en regroupant les deux séries, on obtient la relation

$|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} ((-1)^k u_k + (-1)^{k+1} u_{k+1})$ d'où $|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ en notant $v_k = u_k - u_{k+1}$. Or, par hypothèse, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, positive, et tend vers 0 (par somme). Par conséquent, par le critère spécial des séries alternées, comme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ est le reste d'ordre n de la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k v_k$, le signe de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ est celui de $(-1)^{n+1} v_{n+1}$ donc celui de $(-1)^{n+1}$. On en déduit que le signe de $|R_n| - |R_{n+1}|$ est celui de $(-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = 1$ ce qui permet de conclure que $|R_n| - |R_{n+1}| \geq 0$, c'est-à-dire que $(|R_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Comme avant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|R_n| + |R_{n+1}| = (-1)^{n+1} R_n + (-1)^{n+2} R_{n+1} = (-1)^{n+1} (R_n - R_{n+1})$ or $R_n - R_{n+1} = (-1)^{n+1} u_{n+1}$ après simplification. Ainsi, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$. Mais on sait que la suite $(|R_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $|R_{n+1}| \leq |R_n| \leq |R_{n-1}|$ qui devient, en ajoutant $|R_n|$ et d'après ce qui précède, $u_{n+1} \leq 2|R_n| \leq u_n$ et on a bien $\frac{u_{n+1}}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_n}{2}$.

c. Comme $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$ d'après l'énoncé, le théorème des gendarmes prouve que $|R_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$ d'après l'encadrement $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2|R_n|}{u_n} \leq 1$. Et puisque $R_n = (-1)^{n+1} |R_n|$, on en déduit que $R_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \frac{u_n}{2}$.

d. Posons $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ donc f est décroissante sur $[e; +\infty[$ donc sur $[3; +\infty[$. f est même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve $f''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$ donc f'' est positive sur $[e^{3/2}; +\infty[$ donc sur $[5; +\infty[$. Ainsi, la fonction f est convexe sur $[5; +\infty[$. De plus, en posant $u_n = \frac{\ln(n)}{n} = f(n)$, on a $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ car $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} = o(\ln(n))$ et $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$ donc, en divisant, $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. Pour $n \geq 5$, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe deux réels $\alpha_n \in]n+1; n+2[$ et $\beta_n \in]n; n+1[$ tels que $u_{n+2} - u_{n+1} = f(n+2) - f(n+1) = f'(\alpha_n)$ et $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) = f'(\beta_n)$. Mais comme f' est croissante sur $[5; +\infty[$, on a $f'(\beta_n) \leq f'(\alpha_n)$ car $\beta_n \leq \alpha_n$. Ainsi, pour $n \geq 5$, $u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$.

On en déduit d'après la question **c.** (comme on parle de reste, le fait que les propriétés requises ne commencent qu'à partir du rang 5 importe peu) que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{2n}$.

2.7 a. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ converge car en notant $u_n = \frac{1}{n!}$, on a par exemple $u_n \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ou alors par D'ALEMBERT

car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$. On reconnaît la série exponentielle et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e^1 = e$. Par conséquent $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ existe pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ en tant que reste d'une série convergente.

b. On isole les deux premiers termes, $(n+1)!R_n = (n+1)! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} = 1 + \frac{1}{n+2} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!}$ or, pour tout entier $k \geq n+3$, on a $\frac{(n+1)!}{k!} = \frac{1}{k(k-1) \cdots (n+2)} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Ainsi, en sommant $\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} \leq \sum_{k=n+3}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n+2}$. Ainsi, $1 \leq (n+1)!R_n \leq 1 + \frac{2}{n+2}$ et on conclut par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)!R_n = 1$.

On pouvait aussi écrire que $\forall k \geq n+2$, $\frac{(n+1)!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)\cdots(n+2)} \leq \frac{1}{(n+2)^{k-n-1}}$ donc, en sommant $1 \leq (n+1)!R_n \leq 1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-n-1}} = 1 + \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = 1 + \frac{1}{n+1}$ avec la même conclusion.

c. On sait que $e = S_n + R_n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ donc $en! = n!S_n + n!R_n$ mais $n!S_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$ est un entier donc $\sin(2\pi en!) = \sin(2\pi n!S_n + 2\pi n!R_n) = \sin(2\pi n!R_n)$ par 2π -périodicité de la fonction $\sin$. Comme $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$, on a $2\pi n!R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n+1}$ donc $u_n = \sin(2\pi en!) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n+1} > 0$ ce qui garantit par comparaison à la série harmonique de RIEMANN la divergence de la série $\sum_{n \geq 0} \sin(2\pi en!)$.

2.8 a. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : x \mapsto (\tan(x))^k$ est continue sur le segment $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc u_k est bien défini. De plus, $\forall x \in I$, $0 \leq \tan(x) \leq 1$ donc $0 \leq f_{k+1}(x) \leq f_k(x)$ ce qui, par croissance de l'intégrale, donne $0 \leq u_{k+1} \leq u_k$. La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc positive et décroissante.

b. La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$ par le théorème de la limite monotone. La fonction $\tan$ est convexe sur I car $\forall x \in I$, $\tan''(x) = 2\tan(x)(1 + \tan^2(x)) \geq 0$ donc la courbe représentative de $\tan$ est en dessous de ses cordes sur I , notamment $\forall x \in I$, $0 \leq \tan(x) \leq \frac{4x}{\pi}$.

Ainsi $0 \leq u_k \leq \int_0^{\pi/4} \left(\frac{4x}{\pi}\right)^k dx = \frac{4^k}{\pi^k} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4(k+1)}$ toujours par croissance de l'intégrale. Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0$, par encadrement, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$.

On aurait aussi pu utiliser le chapitre sur les suites de fonctions :

(H₁) La suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < \frac{\pi}{4}$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(H₂) Les fonctions f_k et la fonction f sont continues sur I .

(H₃) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_k(x)| \leq \varphi(x) = 1$ et φ est intégrable sur I .

Par le théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} f_k = \int_0^{\pi/4} f = 0$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k + u_{k+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^k(x)(1 + \tan^2(x))dx = \int_0^{\pi/4} \tan^k(x) \tan'(x)dx$ par linéarité de l'intégrale donc $u_k + u_{k+2} = \left[\frac{\tan^{k+1}(x)}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{k+1}$.

d. $u_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$ et $u_1 = \int_0^{\pi/4} \tan(x)dx = [\ln(\cos(x))]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}$. Grâce à c., on a $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k(u_{2k} + u_{2k+2}) = u_0 + (-1)^{n-1}u_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ donc $u_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$. De même, on a la relation $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}(u_{2k-1} + u_{2k+1}) = u_1 + (-1)^nu_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ d'où l'on déduit que $u_{2n+1} = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} - \frac{\ln(2)}{2}\right)$.

e. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \frac{\ln(2)}{2}$. D'où la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et les valeurs $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

2.9 Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, $u_n r^n = O(r^n)$ et $\sum_{n \geq 0} r^n$ converge (série géométrique) car $|r| < 1$ donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} u_n r^n$ converge absolument donc converge. Ainsi, l'application x est bien définie.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \neq v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, notons $p = \min \left(\left\{ n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq v_n \right\} \right)$, cet entier existe car la partie $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq v_n \right\}$ de $\mathbb{N}$ est non vide puisque $u \neq v$ donc, par propriété fondamentale des entiers, A admet un minimum.

Prenons par exemple $u_p = -1$ et $v_p = 1$ (l'autre cas est analogue et on le traite par symétrie), alors $x(v) - x(u) = r^p - (-r^p) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} (v_n - u_n) r^n$. Posons $y = \sum_{n=p+1}^{+\infty} (v_n - u_n) r^n$ de sorte que $x(v) - x(u) = 2r^p + y$.

Par convergence absolue des séries, $\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} (v_n - u_n) r^n \right| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} |v_n - u_n| r^n \leq 2 \sum_{n=p+1}^{+\infty} r^n = \frac{2r^{p+1}}{1-r}$ par inégalité triangulaire d'où $x(v) - x(u) - 2r^p \geq -\frac{2r^{p+1}}{1-r}$ qui devient $x(v) - x(u) \geq 2r^p - \frac{2r^{p+1}}{1-r} = \frac{2r^p(1-2r)}{1-r} > 0$.

Par conséquent, $x(u) \neq x(v)$ dès que $u \neq v$, ce qui est la définition de l'injectivité de x .

On peut constater que x n'est pas forcément injective dès que $r \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right[$, par exemple pour $r = \frac{1}{2}$, car puisque $1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{(1/2)}{1 - (1/2)}$, on a $x(1, -1, \dots, -1, \dots) = x(-1, 1, \dots, 1, \dots)$.

2.10 a. Comme l'intervalle $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ est stable par la fonction $\sin$ car $\sin \left(\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\right) =]0; 1[\subset]0; \frac{\pi}{2} \left[$ et que $u_0 \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \left[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$. Par stricte concavité de la fonction $\sin$ sur

$u_0 \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \left[$, on a $\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \left[$, $0 < \sin(x) < x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \sin(u_n) = u_{n+1} < u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \in [0; u_0]$. Or $\sin$ est aussi continue donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $\sin(u_n) = u_{n+1}$, on a $\sin(\ell) = \ell$ donc $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, par dualité suite-série, la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge. De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6} u_n^3 < 0$. Par conséquent, par comparaison de séries de termes de signe constant, $\sum_{n \geq 0} u_n^3$ converge.

c. Comme la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge car elle tend vers $-\infty$ d'après **a.**, par dualité suite-série à nouveau, la série $\sum_{n \geq 0} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge. Or, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \underset{+\infty}{=} \ln \left(\frac{u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)}{u_n} \right)$ ce qui donne $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{+\infty}{=} \ln \left(1 - \frac{u_n^2}{6} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6} u_n^2 < 0$. Par comparaison encore, la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ diverge.

d. En élevant au carré, $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$, on a $\sin(u_n)^2 \underset{+\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) \right)^2$ qui se réduit en $\sin(u_n)^2 \underset{+\infty}{=} u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right) \underset{+\infty}{=} u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2) \right) \underset{+\infty}{=} u_n^2 - \frac{u_n^4}{6} + o(u_n^4)$. Par conséquent, $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\sin(u_n)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2} \left(\frac{u_n^2}{\sin(u_n)^2} - 1 \right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{u_n^2} \left(\frac{u_n^2}{u_n^2 - \frac{u_n^4}{6} + o(u_n^4)} - 1 \right)$ donc, en simplifiant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \frac{1}{3}$ car $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{u_n^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)} - 1 \right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{u_n^2} \left(1 + \frac{u_n^2}{3} - 1 + o(u_n^2) \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3}$ avec

le développement limité $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$. Par le théorème de CESARO, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{3}$
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3}$ après télescopage d'où $u_n^2 \sim_{+\infty} \frac{3}{n}$ et $u_n = \sqrt{u_n^2} \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{3}{n}}$.
Bien sûr, ceci rend plus facile les questions précédentes car on a alors $u_n^3 \sim_{+\infty} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $u_n^2 \sim_{+\infty} \frac{3}{n}$.