TD 03 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2025-2026 **vendredi 19 septembre 2025**

3.1 *CCP PSI 2013* Anaïs Espéron

Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$ est libre avec $f_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $g_k : t \mapsto \sin(kt)$.

3.2 *E3A PSI 2014* Soufiane Eddamani

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que : $u^2 = 0 \iff \big($il existe deux projecteurs p et q de même image tels que $u = p - q\big)$.

3.3 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 124I*

Soit p et q deux projecteurs d'un espace E. Montrer que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$ si et seulement si $p = p \circ q$ et $q = q \circ p$.

3.4 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 105II abordable dès la première année* Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3$.

3.5 *ENS Cachan PSI 2017* Tom Huix II

a. Soit un entier $n \geqslant 1$ et $a_0, \cdots, a_{n-1}$ des réels positifs.

Montrer que le polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$ admet au plus une racine sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $a_0, \cdots, a_{n-1}$ des complexes et $a_0 \neq 0$. Soit ρ l'unique racine de $P = X^n - |a_{n-1}|X^{n-1} - \cdots - |a_0|$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si α est une racine complexe de $Q = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$, alors $|\alpha| \leqslant \rho$.

3.6 *Mines PSI 2017* Tom Huix I

a. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré n et unitaire tel que $P_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$.

b. Développer la fraction rationnelle $F_n = \dfrac{1}{P_n}$ en éléments simples.

3.7 *Mines PSI 2018* Antoine Secher I

Soit E un espace vectoriel de dimension $3n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang $2n$ tel que $f^3 = 0$.

a. Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par f. En déduire que $\dim(\operatorname{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker}(f))$.

b. Montrer que $\operatorname{rang}(f^2) = n$.

c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

3.8 *Petites Mines PSI 2019* Augustin Aumont II

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Trouver un supplémentaire "naturel" de F qu'on notera G.

c. Donner l'expression analytique de la projection sur G parallèlement à F.

3.9 *X PSI 2022* Olivier Courmont I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})^2$ tel que $A^2 = B^2 = 0$ et $\operatorname{rang}(A) \geqslant n$ et $\operatorname{rang}(B) \geqslant n$.

Montrer que A et B sont semblables.

3.10 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Baesen et Lucas Lacampagne Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} (X-k)$.

a. Montrer qu'il existe un unique $r_n \in]0;1[$ tel que $P'_n(r_n) = 0$.

b. Trouver une expression sous forme de somme de $\frac{P'_n(x)}{P_n(x)}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus [\![0;n]\!]$.

c. Déterminer la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

d. Trouver un équivalent de r_n.

e. Comment établir que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$?

3.11 *Centrale Maths1 PSI 2017 et 2022* Clément Maurel et Naïs Baubry

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = P'$.

a. Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u ne contient que des 0 et des 1.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

c. Montrer que si Q ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, alors l'unique polynôme P de la question précédente a la même propriété.

d. Montrer que si P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ alors Q l'est également.

3.12 *Mines PSI 2021 et 2022* Yuan Le Guennic I et Louis Bardinet II

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne des fonctions $f_1, \cdots, f_n$ de E.
Pour une famille $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la matrice $A_x = \big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si $\det(A_x) \neq 0$, alors la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E.

b. Réciproquement, montrer par récurrence que si la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E, alors il existe une famille de réels $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\det(A_x) \neq 0$.

3.13 *Mines PSI 2019 et 2022* Louis Destarac et Anna Decrock II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \mathrm{Ker}(f^n)$ et $I_n = \mathrm{Im}\,(f^n)$. On pose aussi $K = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ et $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$.

a. Montrer que I et K sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Montrer l'existence d'un entier $N \leqslant \dim(E)$ tel que $\forall k \geqslant 0,\ K_{k+N} = K_N$. Que vaut K ?

c. Montrer que $E = I \oplus K$, que K et I sont stables par f.

d. Montrer que f_I est un automorphisme de I et que f_K est nilpotent.

3.14 *Mines PSI 2022* Thibault Le Gal I

Soit E espace de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

a. Montrer que si E est de dimension finie, $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

b. Qu'en est-il en dimension quelconque ?

3.15 *Centrale Maths1 PSI 2024* Armand Coiffe

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire G de F dans E.

Soit $t \in]0;1[$ et $\varphi_t : f \mapsto g$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - f(tx)$.

c. Montrer que φ_t est un endomorphisme injectif de F.

d. Soit $(f, g) \in F^2$ tel que $g = \varphi_t(f)$. Montrer que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$. Conclure.

e. Déterminer toutes les fonctions $f \in F$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x$.