TD 04 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2025-2026 **vendredi 26 septembre 2025**

4.1 *Mines PSI 2013* Jordan Diby

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2 *OdlT 2014/2015 ENSAE-ENSIIE PSI planche 329I*

Écrire la matrice de f, endomorphisme d'un espace de dimension finie, tel que $\text{rang}\,(f) = \mathsf{Tr}\,(f) = 1$, dans une base bien choisie et en déduire que c'est un projecteur.

4.3 *Mines PSI 2015* Gaël Perez

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 0$ sauf si $|i-j| = 1$ et alors $a_{i,j} = 1$.

On pose $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$.

a. Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$. Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

b. Pour $x \in]-2;2[$, on pose $x = 2\cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0;\pi[$. Montrer que $P_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

c. En déduire les racines de P_n et le factoriser.

4.4 *E3A PSI 2015* Bastien Chevallier

Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{id}_E$.

a. Montrer que $\text{Im}\,(f - \text{id}_E) \subset \mathsf{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$.

b. Est-ce qu'on a $E = \text{Im}\,(f - \text{id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(f - \text{id}_E)$?

c. Est-ce que ce résultat est toujours vrai en dimension infinie ?

d. Montrer que $\text{rang}\,(f - \text{id}_E)$ est pair.

Indication : montrer que f induit un endomorphisme u dans $\mathsf{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$.

4.5 *Mines PSI 2016* Samuel Cailleaux I

Soit $(a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ et la matrice $M = \big((a_i + b_j)^n\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer $\det(M)$.

4.6 *Mines PSI 2017* Sam Pérochon II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Montrer que n pair $\Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathsf{GL}(E)^2,\ u \circ v = -v \circ u$.

4.7 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 122II, abordable dès la première année* Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

4.8 *Mines PSI 2018* Erwan Dessailly I

Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille de vecteurs de E.

a. Si la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre, montrer que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une famille $(h_1, \cdots, h_n) \in E^n$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = \displaystyle\int_0^1 h_i f_j$.

b. Supposons que $\forall M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists (h_1, \cdots, h_n) \in E^n,\ \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = \displaystyle\int_0^1 h_i f_j$, peut-on conclure à la liberté de la famille $(f_1, \cdots, f_n)$?

4.9 *OdlT 2018/2019 Mines PSI planche 115I, abordable dès la première année*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in GL(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est fini.

a. Montrer que $\forall x \in E$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $u^k(x) = x$.

b. Montrer que $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $u^N = \mathrm{id}_E$.

c. Les résultats de **a.** et **b.** subsistent-ils si u n'est pas inversible ?

4.10 *Mines PSI 2019* Léo Simplet I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que si $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.

b. Si f est non nul et que $\mathrm{Tr}\,(f) = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre.

c. Si f est non nul et que $\mathrm{Tr}\,(f) = 0$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ (matrice ligne), $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ (matrice carrée).

d. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$, alors M est semblable à une matrice à diagonale nulle.

4.11 *CCP PSI 2019* Maël Classeau I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

b. Donner un vecteur de $\mathrm{Ker}(f^2)$ qui n'est pas dans $\mathrm{Ker}(f)$.

c. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.12 *X PSI 2021* Antoine Greil II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère S_A l'ensemble des matrices semblables à A.
Déterminer l'ensemble des matrices A telles que S_A soit fini.

4.13 *Mines PSI 2022* Matis Viozelange II

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n ($u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$).

a. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(u^k)$ pour tout entier $k \in [\![0; n]\!]$.

c. Montrer que les seuls sous-espaces de E stables par u sont les $\mathrm{Ker}(u^k)$ avec $k \in [\![0; n]\!]$.

4.14 *Mines PSI 2024* Edward Bauduin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Par exemple, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On appelle permutation de $[\![1; n]\!]$ une bijection de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$ et on note d_n le nombre de dérangements de $[\![1; n]\!]$, un dérangement étant une permutation de $[\![1; n]\!]$ sans point fixe. On prend par convention $d_0 = 1$.
On note p_n la probabilité d'obtenir un dérangement si on prend une permutation au hasard.

a. Déterminer A_n^{-1}. Indication : trouver $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $A_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

c. Trouver une relation entre A_n^T, $(0!\ 1!\ \cdots\ (n-1)!\ n!)^T$ et $(d_0\ d_1\ \cdots\ d_n)^T$.

d. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Déterminer p_n et $\lim_{n \to +\infty} p_n$.